Première épreuve CAPESA externe 2000

François Sauvageot

2 mars 2001

Partie I

Question I.1 On a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall (x,y) \in D^2, \qquad \forall t \in [0,1] \qquad ||tx+(1-t)y|| \le t||x|| + (1-t)||y|| \le t + (1-t) = 1$$

et donc D est convexe.

Question I.2 On a

$$\forall (x,y) \in \cap_{i\in I} X_i, \qquad \forall t \in [0,1] \qquad \forall i \in I \qquad tx+(1-t)y \in X_i$$

et donc $\cap_{i\in I} X_i$ est convexe.

Question I.3 Soit x et y dans $\bar{X}$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de points de X convergeant respectivement vers x et y. On a

$$\forall t \in [0,1] \qquad \lim_{n\to+\infty} (tx_n + (1-t)y_n) = tx + (1-t)y$$

et donc, pout tout t dans $[0,1]$, $tx+(1-t)y$ est limite de points de X, par convexité de X. Par conséquent $\bar{X}$ est convexe.

Question I.4 Un sous-espace affine étant stable par barycentration, il est évidemment stable par barycentration à coefficients positifs, i.e. il est convexe.

Question I.5.a On a

$$\forall x \in E, \qquad x \in H \Leftrightarrow \varphi\left(x - \frac{cp}{||p||^2}, p\right) = 0$$

et donc

$$H = \frac{cp}{||p||^2} + (\mathbf{R}p)^{\perp} \ .$$

C'est donc bien un hyperplan affine ; une base de sa direction est donnée par une base de vecteur orthogonaux à p et un vecteur normal à sa direction est p.

Question I.5.b On a

$$\forall (x,y) \in (H^-)^2, \qquad \forall t \in [0,1] \qquad \varphi(tx+(1-t)y,p) = t\varphi(x,p) + (1-t)\varphi(y,p) \le tc + (1-t)c = c$$

et donc H^- est convexe. Il est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbf{R}$ par une application (linéaire) continue.

Question I.6.a Pour $n=1$ et $S=\mathbf{Q}$, on a évidemment un ensemble stable par passage au milieu, mais le segment $[0,1]$, d'extrémités rationnelles, n'est pas constitué exclusivement que de rationnels. $\mathbf{Q}$ n'est donc pas convexe.

Question I.6.b Soit t un réel compris entre 0 et 1. On pose $t_0 = 0$ et $t'_0 = 1$; on a donc $t_0 \le t \le t'_0$. Si t_n et t'_n sont définis et si $t_n \le t \le t'_n$, soit u leur milieu. On définit t_{n+1} et t'_{n+1} de façon que $[t_{n+1},t'_{n+1}]$ contienne t et soit ou bien $[t_n,u]$, ou bien $[u,t'_n]$. De la sorte on a construit deux suites adjacentes convergeant vers t.

Soit maintenant x et y deux points de S, x_n et x'_n leurs barycentes affectés des coefficients $(t_n,1-t_n)$ et $(t'_n,1-t'_n)$ respectivement. Par hypothèse sur S et par construction des deux suites, ces points appartiennent à S et donc leur limite commune aussi. C'est-à-dire que $tx+(1-t)y$ appartient à S. Par conséquent S est convexe.

Partie II

Question II.1 conv(X) est convexe en tant qu'intersection de convexes, d'après I.2.

Si A est convexe et contient X, il contient conv(X) par définition et donc conv(X) est bien la plus petite partie convexe de E contenant X. En particulier $\langle X\rangle$ est un convexe contenant X, il contient donc conv(X).

Question II.2.1 Si X est inclus dans Y, conv(Y) contient Y et donc X. Comme il est convexe, d'après ce qui précède, il contient conv(X).

Question II.2.2 Si X est convexe, il se contient lui-même et il contient donc conv(X). Comme conv(X) contient X, c'est que ces deux ensembles sont égaux.

Réciproquement, comme conv(X) est convexe, il en est de même pour X, si ces deux ensembles sont égaux.

Question II.2.3 Cela résulte de la convexité de conv(X) et de la question précédente.

Question II.3.1 On montre cette propriété par récurrence sur l'entier naturel non nul n. C'est immédiat pour $n = 1$.

Si elle est vraie pour un certain n, elle est vraie pour $n+1$ par associativité du barycentre et la définition de la convexité.

Question II.3.2 Commme conv(X) contient X, il contient l'ensemble évoqué dans la question d'après ce qui précède.

Réciproquement cet ensemble contient X et est évidemment stable par barycentration à coefficients positifs, par associativité du barycentre. Il est donc convexe et, par suite, contient conv(X) et, finalement, lui est égal.

Question II.4 Si les trois points sont distincts, conv(X) est le triangle (bord et intérieur) formé par ces trois points.

Si deux sont égaux, c'est le segment formé par deux des points distincts.

Si les trois sont égaux, c'est ce point.

Question II.5.1 Il est immédiat que tout point intérieur à X ne peut être extrémal, par convexité des boules (question I.1). De plus un point de la frontière est extrémal si et seulement s'il n'est barycentre d'aucun couple de points distincts de la frontière.

Par conséquent les points extrémaux d'un segment sont ses extrémités.

Question II.5.2 Les points extrémaux d'un disque fermé sont les points de son cercle frontière, d'après la remarque qui précède.

Question II.5.3 Comme le disque ouvert est ouvert, il n'a pas de points extrémaux.

Question II.5.4 Les points extrémaux du carré sont ses sommets.

Question II.5.5 Les points extrémaux de $\mathbf{R}_+^2$ sont réduits à l'origine.

Question II.6.1 L'existence de b résulte de la continuité de la fonction $x \mapsto ||a-x||$ et de la compacité de X,

Question II.6.2 Si b est dans le segment $[c,d]$ avec c et d dans X, alors il existe t dans $[0,1]$ tel que $b = tc + (1-t)d$ et donc

$$||a-b|| = ||ta + (1-t)a - tc - (1-t)d|| \leq t||a-c|| + (1-t)||a-d|| \; .$$

Par maximalité de $||a-b||$, on a donc $||a-c|| = ||a-d|| = ||a-b||$ et, par égalité dans l'inégalité triangulaire, $a-c$, $a-d$ et $a-b$ sont colinéaires. Par égalité des normes, deux d'entres eux sont égaux et b est donc extrémal.

Question II.7 Si x est extrémal et si a et b sont dans $C \setminus \{x\}$ le segment $[a,b]$ est inclus dans C et ne contient pas x par convexité de C et extrémalité de x. Il en résulte que $C \setminus \{x\}$ est convexe.

Réciproquement si $C \setminus \{x\}$ est convexe et si a et b sont des points de C distincts de x, le segment $[a,b]$ est contenu dans $C \setminus \{x\}$ et ne contient donc pas x. Par définition cela montre que x est un point extrémal de C.

Question II.8 Soit x un point de conv(S). D'après la question II.3.2 il est barycentre à coefficients positifs de points de S. S'il n'appartient pas à S, il est donc barycentre d'au moins deux points de S. Par associativité du barycentre il est donc barycentre à coefficients positifs de deux points eux-mêmes barycentre à coefficients positifs de points de S, i.e. x n'est pas extrémal.

Question II.9 Montrons le résultat par récurrence sur $card(X)$. Si X est un singleton, il est convexe et formé d'un unique point extrémal. Le résultat est donc clair.

Soit maintenant $X = \{x_1, \ldots ,x_n\}$. Pour x un point de X, on note Y_x son complémentaire dans X. On suppose que $conv(Y_x)$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux, pour tout x dans X.

Si x dans X n'est pas extrémal dans conv(X), c'est qu'il est barycentre à coefficients positifs de points de conv(X) et donc, par associativité du barycentre, il est barycentre à coefficients positifs de points de X. On a donc

$$x = \lambda x + \sum_{y \in Y_x} \lambda_y y$$

avec tous les coefficients compris entre 0 et 1, et de somme 1. Il en résulte

$$x = \sum_{y \in Y_x} \frac{\lambda_y}{1-\lambda} y$$

et donc x appartient à $conv(Y_x)$. Par conséquent conv(X) est égal à $conv(Y_x)$ et est donc l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Si maintenant tous les points de X sont extrémaux, conv(X) est l'enveloppe convexe de points extrémaux de $conv(X)$. D'où le résultat.

Question II.10 Pour un disque ouvert le résultat est en défaut d'après II.5.3.

Partie III

Question III.1 Soit c un point de C et $r = ||a-c||$. La boule $B_F(a,r)$ rencontre C par contruction, d'où l'assertion.

Question III.2 Soit r comme dans la question précédente. Si c appartient à C mais pas à $B_F(a,r)$, sa distance à a est supérieure à r et donc

$$\inf\{||x-c|| \ ; \ c \in C\} = \inf\{||x-c|| \ ; \ c \in C \cap B_F(a,r)\} \ .$$

Or $B_F(a,r)$ est compacte et donc $C \cap B_F(a,r)$ est compact en tant que fermé dans le compact $B_F(a,r)$. L'assertion résulte de la continuité de la fonction $x \mapsto ||a-x||$.

Question III.3 Soit b et c réalisant l'infimum. On a

$$||a-b||^2 + ||a-c||^2 = 2\left|\left|a - \frac{b+c}{2}\right|\right|^2 + 2\left|\left|\frac{b-c}{2}\right|\right|^2$$

soit

$$\left|\left|a - \frac{b+c}{2}\right|\right|^2 = \inf\{||x-c|| \ ; \ c \in C\} - \frac{1}{4}||b-c||^2 \ .$$

Il en résulte $b = c$ par convexité de C. Par conséquent le minimum est atteint en un point unique.

Question III.4 Pour $n = 1$ et $C = [0,1[$ la projection de 1 sur C n'existe pas.

Pour $n = 1$ et $C = [0,1] \cup [3,4]$, la projection de 2 n'est pas unique.

Question III.5.1 Soit b et x dans C, on a

$$||a-x||^2 - ||a-b||^2 = ||a-b+b-x||^2 - ||a-b||^2 = ||b-x||^2 + 2\varphi(x-b,b-a) \ .$$

Par conséquent la seconde propriété entraîne la première.

Soit maintenant x dans C tel que $\varphi(x-b,b-a)$ est strictement négatif, il en est de même en remplaçant x par $tx+(1-t)b$ avec t entre 0 et 1 ($tx+(1-t)b$ appartient aussi à C par convexité) car

$$\varphi(tx+(1-t)b-b,b-a) = t\varphi(x-b,b-a) \ .$$

De plus

$$||a-(tx+(1-t)b)||^2 = ||a-b||^2 + 2t\varphi(x-b,b-a) + t^2||b-x||^2$$

et donc, pour t assez petit, $||a-(tx+(1-t)b)||^2$ est inférieur à $||a-b||^2$. Par conséquent les deux propriétés sont bien équivalentes.

Question III.5.2 La condition (2) signifie que le triangle (ABX) est obtusangle en B.

Question III.5.3 On applique la condition (2) pour a à $x = p_C(a')$ et pour a' à $x = p_C(a)$. On a donc

$$\varphi(p_C(a')-p_C(a),p_C(a)-a) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(p_C(a)-p_C(a'),p_C(a')-a') \geq 0$$

et, par addition,

$$\varphi(p_C(a')-p_C(a),p_C(a)-a-p_C(a')+a') \geq 0$$

ou encore

$$||p_C(a')-p_C(a)||^2 \leq \varphi(p_C(a')-p_C(a),a'-a)\,,$$

ce qui est l'assertion demandée.

Question III.5.4 On déduit de la question précédente et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$||p_C(a)-p_C(a')||^2 \leq ||p_C(a)-p_C(a')||.||a-a'||$$

et donc, même (et surtout) si $||p_C(a)-p_C(a')||$ est nul,

$$||p_C(a)-p_C(a')|| \leq ||a-a'||\,.$$

L'application p_C est donc 1-lipschitzienne.

Question III.5.5 C'est évidemment faux en général : il suffit de prendre C réduit à un point puisqu'alors la fonction p_C est 0-lipschitzienne.

Remarquons néanmoins que p_C est l'identité sur C et donc si C comporte au moins deux points, la constante de Lipschitz est supérieure à 1.

Question III.6 Si C est un sous-espace affine, l'ensemble des $x-b$ pour x parcourant C est égal à V. La condition (2) du III.5.1 montre donc que b est la projection de a sur C si et seulement si le produit scalaire de $b-a$ avec tout vecteur de V est positif. Comme ceci est vrai également pour les opposés de vecteurs de V, on en déduit que ce produit scalaire est alors forcément nul.

Comme la projection existe, elle doit donc vérifier $b-a \in V^{\perp}$. La réciproque est immédiate.

Question III.7.1 Puisque $x \mapsto x^2$ est convexe son épigraphe l'est. Il est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\mathbf{R}_+$ par l'application continue $(x,y) \mapsto y-x^2$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.

Question III.7.2 Soit A extérieur à C et M dans l'intérieur de C. On peut donc trouver un disque ouvert contenant M et inclus dans C. Le segment $[MA]$ contient donc au moins un autre point, disons N, de C. Ce point étant à une distance inférieure à $d(A,M)$ de A, il en résulte que M ne peut être la projection de A sur C.

Par conséquent B appartient à la frontière de C, i.e. à la parabole.

Partie IV

Question IV.1 Géométriquement deux parties séparables à l'aide de demi-espaces délimités par H sont de part et d'autre de H.

Question IV.2.1 X_1 est convexe en tant qu'épigraphe de la fonction convexe de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ qui à x associe $1/x$.

Soit maintenant $(x_n,y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de X_1 convergeant vers un point (x,y). Comme x_n est positif pour tout entier naturel n, il en est de même pour x. Si x était nul, alors $y_n \geq 1/x_n$ montrerait que y_n tend vers l'infini avec n. Par conséquent x est strictement positif et y est supérieur à $1/x$ par continuité de la fonction inverse.

Par convexité de la fonction inverse, son épigraphe X_1 est situé au-dessus de toutes les tangentes à son graphe. En particulier il est au-dessus de la droite $y - 1/5 = -1/25(x-5)$, i.e. tout point de X_1 vérifie $y - 1/5 \geq -1/25(x-5)$. Comme 0.1 est inférieur à $1/5$, la droite $y - 1/5 = -1/25(x-5)$ sépare bien X_1 et $(5{,}0.1)$.

Question IV.2.2 Soit D une droite déparant strictement X_1 et X_2. En particulier, elle ne rencontre pas X_2 et ne contient donc aucun point d'abscisse négative. C'est donc une droite verticale d'équation $x = c$ avec c strictement positif. Mais alors elle rencontre X_1, ce qui est une contradiction. Par conséquent aucune droite ne peut séparer strictement X_1 et X_2.

Question IV.3 Soit $b = p_C(a)$, l'hyperplan d'équation $\varphi(x,b-a) = \frac{1}{2}\varphi(b+a,b-a)$ sépare strictement $\{a\}$ et C. En effet on a

$$\forall x \in C \qquad \varphi(x,b-a) \geq \varphi(b,b-a) > \varphi(b,b-a) - \frac{1}{2}||b-a||^2 = \frac{1}{2}\varphi(b+a,b-a)$$

et

$$\varphi(a,b-a) < \varphi(a,b-a) + \frac{1}{2}||b-a||^2 = \frac{1}{2}\varphi(b+a,b-a)\ .$$

Question IV.4.1 On a

$$\forall (c_1,c_2) \in C^2,\quad \forall (c_1',c_2') \in (C')^2, \qquad \forall t \in [0,1] \qquad t(c_1 - c_1') + (1-t)(c_2 - c_2') = (tc_1 + (1-t)c_2) - (tc_1' + (1-t)c_2')$$

et donc $C - C'$ est convexe par convexité de C et C'.

Comme C et C' sont disjoints, A ne contient pas l'origine.

Enfin si $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n')_{n\in\mathbf{N}}$ sont des suites de points de C et C' telles que $(c_n - c_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un point x de E. Alors $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite convergente vers un certain point c de C par compacité de C. Mais alors la suite extraite de $(c_n')_{n\in\mathbf{N}}$ correspondante converge vers $c - x$ et donc, puisque C' est fermé, $c - x$ appartient à C' et donc x appartient à $C - C'$, ce qui prouve que A est fermé.

Question IV.4.2 Soit H un hyperplan séparant strictement $\{O\}$ et A et $\varphi(x,p) = a$ une équation de H. Quitte à changer (p,a) en $(-p,-a)$ (ce qui ne change pas H) on peut supposer que a est strictement positif (puisque O n'appartient à H).

Par conséquent pour c et c' dans C et C', on a $\varphi(c - c',p) - a > 0$ puisque H sépare strictement $C - C'$ et $\{O\}$ et $\varphi(0,p) - a < 0$.

Par compacité de C et continuité de l'application f qui à x associe $\varphi(x,p) - a$, la quantité $m = \inf_{c\in C}\varphi(c,p)$ est finie. De plus

$$\forall c' \in C' \qquad \varphi(c',p) < m - a$$

en prenant l'infimum (qui est atteint) dans ce qui précède.

Par conséquent l'hyperplan d'équation $\varphi(x,p) = m - a/2$ sépare strictement C et C'.

Question IV.5.1 Puisque a n'est pas un point intérieur de C, pour tout entier naturel n la boule ouverte de centre a et de rayon $1/(n+1)$ contient au moins un point, que l'on notera a_n, qui n'appartient pas à C. Par construction cette suite de points converge évidemment vers a.

Question IV.5.2 On a, d'après III.5.1

$$\forall x \in C \qquad \varphi(p_C(a_p) - a_p, x - a_p) = \varphi(p_C(a_p) - a_p, x - p_C(a_p)) + ||p_C(a_p) - a_p||^2 \geq ||p_C(a_p) - a_p||^2$$

et donc, puisque a_p n'appartient pas à C,

$$\forall x \in C \qquad \varphi(p_C(a_p) - a_p, x - a_p) > 0\ .$$

Il suffit donc de prendre n_p colinéaire et de même sens avec $p_C(a_p) - a_p$ pour obtenir un vecteur unitaire n_p tel que

$$\forall x \in C \qquad \varphi(n_p, x - a_p) > 0\ .$$

Question IV.5.3 Comme la boule unité de E est compacte, la suite n_p admet au moins une valeur d'adhérence, notée n. Pour x fixé dans C on a

$$\forall p \in \mathbf{N} \qquad \varphi(n_p, x - a_p) > 0$$

et, en passant à la limite sur la sous-suite correspondant à n,

$$\varphi(n,x-a) \geq 0 \ .$$

Question IV.5.4 L'équation $\varphi(n,x-a) = 0$ définit bien un hyperplan puisque n n'est pas nul ; il sépare C et a d'après ce qui précède et le fait que $\varphi(n,a-a) \leq 0$.

Question IV.6 Soit D une droite d'appui à C en A. Elle passe donc par A. Elle ne peut rencontrer C en un autre point sinon, par stricte convexité de la fonction carré, le morceau de parabole compris entre les deux absisses serait sous cette corde. Elle est donc tangente à C, i.e. c'est la tangente en A à la parabole C.

Question IV.7 On se place dans le repère où le demi-disque admet pour équation $x^2+y^2 \leq 1$ et $x \geq 0$. Les droites d'équation $y-1 = ax$ sont des droites d'appui en $(0,1)$ dès que a est positif. En effet si $y-1 = ax$, alors $x^2+y^2 = 1+2ax+(1+a^2)x^2$ et cette quantité est supérieure à 1 puisque x est positif.

Question IV.8.1 Soit a un point intérieur à X et B une boule ouverte centrée en a contenue dans X. Tout hyperplan H coupe B suivant une boule ouverte de H et rencontre donc X en d'autres points que a. Il en résulte que H ne peut être un hyperplan d'appui à X en a.

Question IV.8.2 Soit $\varphi(x-a,p) = 0$ et $\varphi(x-a,p') = 0$ deux hyperplans d'appui à X en A. On choisit, comme il est loisible, les équations de sorte que X soit inclus dans les demi-espaces $\varphi(x-a,p) \geq 0$ et $\varphi(x-a,p') \geq 0$.

Puisque ces deux hyperplans sont distincts p et p' sont indépendants. Il en résulte que pour tout t dans $[0,1]$ l'hyperplan $\varphi(x-a,tp+(1-t)p') = 0$ est un hyperplan d'appui à X en a et tous ces hyperplans sont distincts. Il y en a donc une infinité.

Question IV.9.1 Comme l'origine appartient à E^+, elle n'appartient pas à $X \setminus E^+$ et, a fortiori, n'en est pas un point intérieur.

Ce n'est évidemment pas la bonne question ! On va plutôt démontrer que l'origine n'est pas intérieure à X. En effet tout boule ouverte centrée en l'origine contient un point x tel que $x > 0$ et donc un point intérieur à E^+. Par conséquent toute boule ouverte centrée en l'origine contient des points n'appartenant pas à X et O n'est donc pas intérieur à X.

Question IV.9.2 Comme O n'est pas intérieur à X il existe d'après IV.3 et IV.5 un hyperplan séparant O et X. Cet hyperplan admet pour équation $\varphi(x,p) = c$. Quitte à changer (p,c) en $(-p,-c)$, on peut supposer que X est inclus dans le demi-espace $\varphi(x,p) \leq c$. Et comme $\varphi(0,p) = 0$, il en résulte $c \leq 0$. Par conséquent X est inclus dans le demi-espace $\varphi(x,p) \leq 0$.

Question IV.9.3 C'est évidemment totalement faux. On prend X réduit à un point $-p$ avec p ayant des coordonnées de signes distincts. L'hyperplan $\varphi(x,p) = 0$ convient et pourtant on n'a pas $p \geq 0$.

Question IV.10 On prend $p = (3,1)$ qui est bien strictement positif. La droite $3x+y = 0$ sépare X et E^+. En effet si (x,y) est dans E^+, alors $3x+y$ est positif. S'il appartient au contraire à X, on a $3x+y = (x+2y)+(2x-y) \leq 0$, ce qui prouve que la droite $3x+y = 0$ sépare X et E^+.

Question IV.11 Dans $\mathbf{R}^2$, on prend $X = X_2$, défini en IV.2. On a vu dans cette question que les seules droites pouvant séparer X_2 de quelque chose sont les droites verticales qui correspondent à des vecteurs normaux p de seconde coordonnée nulle. De plus la droite des ordonnées sépare effectivement X et E^+ et cet exemple répond bien à la question.

Question IV.12 C'est évidemment faux. Si X est inclus dans un hyperplan, cet hyperplan le sépare de n'importe quoi.