DEUXIÈME ÉPREUVE CAPESA EXTERNE 2000

par

François Sauvageot

Premier Problème

Question 1.1 La série entière $\sum_{n\in\mathbf{N}} P(X=n)t^n$ est une série à coefficients positifs tous majorés par 1. D'après le théorème de comparaison entre séries entières, son rayon de convergence est donc supérieur à celui de $\sum_{n\in\mathbf{N}} t^n$ qui est 1.

Question 1.2 La fonction $\varphi_X(t)$ est de classe C^∞ sur son disque ouvert de convergence, en particulier sur $[0;R_X[$, et ses dérivées son données par dérivation sous le signe somme. Il en résulte pour t dans $[0;R_X[$

$$\varphi'_X(t) = \sum_{n\in\mathbf{N}} nP(X=n)t^{n-1}$$

et donc, puisque R_X est strictement supérieur à 1,

$$\varphi'_X(1) = \sum_{n\in\mathbf{N}} nP(X=n) .$$

Or cette dernière expression est, par définition, l'espérance mathématique de X. Ainsi X admet une espérance et $E(X) = \varphi'_X(1)$.

Pour les mêmes raisons on a pour t dans $[0;R_X[$

$$\varphi''_X(t) = \sum_{n\in\mathbf{N}} n(n-1)P(X=n)t^{n-2}$$

et donc

$$\varphi''_X(1) = \sum_{n\in\mathbf{N}} n(n-1)P(X=n) .$$

Par conséquent $X(X-1)$ admet une espérance mathématique et celle-ci est égale à $\varphi''_X(1)$.

On a donc

$$\nu(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \varphi''_X(1) + \varphi'_X(1)\,(1-\varphi'_X(1)) .$$

Question 1.3 Comme $P(X=0)$ ne vaut pas 1, c'est qu'il existe un entier non nul n tel que $P(X=n)$ soit non nul. Par conséquent la fonction $t \mapsto P(X=n)t^n$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$. Il en résulte que φ_X est somme de fonctions croissantes, dont l'une au moins strictement croissante, et est donc strictement croissante sur son domaine de définition $[0; R_X[$.

De plus $\varphi_X(1) = E(1) = 1$ et donc $\varphi_X(1) < R_X$ par hypothèse. Par continuité de φ_X, il existe donc un voisinage de 1 où elle reste inférieure à R_X. L'existence de α en résulte.

Question 1.4 Par définition $E(t^X)$ est, quand elle existe, la quantité

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} t^n P(X = n) ,$$

c'est-à-dire, pour t dans $[0; R_X[$, $\varphi_X(t)$.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$ et R le plus petit des nombres R_{X_1} et R_{X_2}. Pour t dans $[0; R[$, $\varphi_{X_1}(t)$ et $\varphi_{X_2}(t)$ sont définis et on a

$$\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) = E(t^{X_1})E(t^{X_2}) .$$

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes on a

$$E(t^{X_1})E(t^{X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1+X_2}) .$$

Cette quantité est donc finie et, par conséquent $R_{X_1+X_2}$ est supérieur à t. Il en résulte

$$\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) = \varphi_{X_1+X_2}(t)$$

pour tout t dans $[0; R[$. L'assertion en résulte puisque R est strictement positif.

Si maintenant $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont n variables aléatoires réelles indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$ et R le plus petit des nombres R_{X_i} pour i entre 1 et n, pour tout t dans $[0; R[$ et tout entier i entre 1 et n, $\varphi_{X_i}(t)$ est défini et on a

$$\prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} E(t^{X_i}) = E\left(\prod_{i=1}^{n} t^{X_i}\right) = E(t^{\sum_{i=1}^{n} X_i})$$

par indépendance mutuelle de X_1, X_2, …, X_n. Il en résulte que $R_{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ est supérieur à R et

$$\prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) = \varphi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t)$$

pour tout t dans $[0; R[$. Comme R est strictement positif, l'assertion en résulte.

Question 1.5.1 Dans le cas d'une variable $\mathcal{B}(n,p)$ binomiale de paramètres n et p, on a

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} t^k = (pt + 1 - p)^n .$$

Comme X est à valeurs finies, φ_X est un polynôme et R_X est évidemment infini.

On a enfin

$$E(X) = \varphi'_X(1) = np(p + 1 - p)^{n-1} = np$$

et

$$\nu(X) = \varphi''_X(1) + \varphi'_X(1)(1 - \varphi'_X(1)) = n(n-1)p^2(p + 1 - p)^{n-2} + np(1 - np) = np(1 - p) .$$

Question 1.5.2 Dans le cas d'une variable géométrique de paramètre p, on étudie la série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^k t^k .$$

Comme la série $\sum_{k=0}^{+\infty} t^k$ a un rayon de convergence 1, par changement de variable, la série étudiée a un rayon de convergence égal à $1/(1-p)$ et on a

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^k t^k = \frac{p}{1-(1-p)t} \ .$$

On a donc $R_X = (1-p)^{-1}$,

$$E(X) = \varphi'_X(1) = \frac{p(1-p)}{(1-(1-p))^2} = \frac{1-p}{p}$$

et

$$\nu(X) = \varphi''_X(1) + \varphi'_X(1)(1-\varphi'_X(1)) = 2\frac{p(1-p)^2}{(1-(1-p))^3} + \frac{1-p}{p}\left(1 - \frac{1-p}{p}\right)$$

soit

$$\nu(X) = \frac{1-p}{p}\left(2\frac{1-p}{p} + 1 - \frac{1-p}{p}\right) = \frac{1-p}{p}\left(\frac{1-p}{p} + 1\right) = \frac{1-p}{p^2} \ .$$

Question 2.1.1 Pour simplifier notons 1, 2, ..., N les graines émises par une plante donnée. Pour i entre 1 et N, on définit x_i de la façon suivante : x_i vaut 0 si la graine i n'a pas germé et x_i vaut 1 si elle a germé. De la sorte l'espace des événements est l'ensemble des N-uplets $(x_1, \ldots, x_N)$ de $\{0,1\}^N$ représentant la germination des N graines. Autrement dit on assimilé Ω à $\{0,1\}^N$. La tribu $\mathcal{A}$ est tout simplement l'ensemble des parties de Ω. On a, par indépendance supposée des x_i, pour tout $(a_1, \ldots, a_N)$ dans $\{0,1\}^N$

$$P\left((x_1, \ldots, x_N) = (a_1, \ldots, a_N)\right) = \prod_{i=1}^{N} P(x_i = a_i)$$

et $P(x_i = 0) = 1-p$ et $P(x_i = 1) = p$. Par conséquent la probabilité d'un événement ω est donnée par $p^k(1-p)^{N-k}$ où k est le nombre des x_i non nuls dans ω.

La variable aléatoire X est tout simplement l'application qui à $\omega = (x_1, \ldots, x_N)$ associe le nombre de graines ayant germé, i.e. $\sum_{i=1}^{N} x_i$. Il y a donc une bijection entre l'ensemble des événements pour lesquels X vaut k, pour un entier k entre 0 et N, et l'ensemble des parties à k éléments de $\{1, \ldots, N\}$. On a donc

$$P(X=k) = \sum_{\omega\in\Omega} P(X(\omega)=k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k} \ .$$

Autrement dit X est une loi binomiale de paramètres N et p.

Il résulte de 1.5.1 que R_X est infini et φ_X est la fonction polynomiale $t \mapsto (pt+1-p)^N$.

Question 2.1.2.a La loi de Z_1 étant celle de X, c'est une loi binomiale de paramètres N et p. Il en résulte

$$u_1 = P(X=0) = (1-p)^N \ .$$

Question 2.1.2.b Si $Z_1 = k$, notons X_1, X_2, ..., X_k les variables aléatoires correspondant à chacune des plantes de la génération $\mathcal{G}_1$. Par hypothèse ces variables sont indépendantes et Z_2 est la variable $X_1 + \ldots + X_k$.

On a donc

$$P(Z_2 = 0 | Z_1 = k) = P(X_1 + \ldots + X_k = 0) = \varphi_{X_1+\ldots+X_k}(0) = \prod_{i=1}^{k} \varphi_{X_i}(0) = \varphi_X(0)^k = (1-p)^{Nk} \ .$$

Par conséquent

$$u_2 = \sum_{k\in\mathbf{N}} P(Z_1 = k)P(Z_2 = 0|Z_1 = k) = \sum_{k\in\mathbf{N}} P(Z_1 = k)u_1^k = \phi_X(u_1) = (p(1-p)^N + 1 - p)^N \ .$$

Question 2.1.2.c Supposons encore que Z_1 vaille k et notons X_1, X_2, ..., X_k les variables aléatoires correspondant à la taille des descendants de la n^e génération issus de chacune des plantes de la génération $\mathcal{G}_1$. Par hypothèse ces variables sont indépendantes, Z_n est la variable $X_1 + \ldots + X_k$ et chacune des variables X_i a la même loi que Z_{n-1}.

On a donc

$$P(Z_n = 0|Z_1 = k) = P(X_1 + \ldots + X_k = 0) = \varphi_{X_1+\ldots+X_k}(0) = \prod_{i=1}^{k} \varphi_{X_i}(0) = u_{n-1}^k$$

et

$$u_n = \sum_{k\in\mathbf{N}} P(Z_1 = k)P(Z_n = 0|Z_1 = k) = \sum_{k\in\mathbf{N}} P(Z_1 = k)u_{n-1}^k = \phi_X(u_{n-1}) = (pu_{n-1} + 1 - p)^N \ .$$

Question 2.1.2.d Si on pose $u_0 = 0$, on a donc $u_n = \varphi_X(u_{n-1})$ pour tout entier naturel non nul n. Comme φ_X est croissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone. Comme $u_1 = (1-p)^N$ est supérieur à $u_0 = 0$, la suite est croissante.

Comme les u_n sont des probabilités, on a $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier n et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

Question 2.1.2.e Pour t et u réels strictement positifs, par stricte croissance de la fonction logarithme, le signe de $u - t$ est celui de $\ln(u) - \ln(t)$. L'assertion en résulte en appliquant cela à $t = x$ et $u = (px + 1 - p)^N$.

Question 2.1.2.f On a

$$h(u_1) = N \ln\left(p(1-p)^N + 1 - p\right) - N\ln(1-p) = N \ln\left(1 + p(1-p)^{N-1}\right)$$

et donc $h(u_1)$ est strictement positif puisque p et $1 - p$ le sont.

Question 2.1.2.g La fonction h est de classe C^∞ sur son domaine de définition et on a

$$h'(x) = \frac{pN}{px + 1 - p} - \frac{1}{x} = \frac{p(N-1)x + p - 1}{x(px + 1 - p)} \ .$$

Cette fonction est du signe de son numérateur. La fonction $x \mapsto p(N-1)x + p - 1$ est strictement croissante et est strictement négative en 0. En 1 elle vaut $Np - 1$. On a donc deux cas de figure :

1. Si $Np \leq 1$, h' est donc strictement négative sur $]0; 1[$ et h est strictement décroissante. Comme $h(1) = 0$, on en déduit que h et g sont strictement positives sur $]0; 1[$ et admettent 1 comme unique zéro.
2. Si $Np > 1$, h' s'annule en un point. Elle décroit donc de sa limite en 0 (à savoir $+\infty$) vers une certaine valeur $h(x_0)$ avant de croître (strictement) jusqu'à sa valeur en 1 (à savoir 0). Par conséquent h et donc g admettent deux zéros et sont strictement positives avant leur premier zéro, puis strictement négatives entre ces deux zéros.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite récurrente associée à la fonction continue φ_X, elle converge vers l'un de ses points fixes, i.e. un zéro de g. Si Np est inférieur à 1, c'est nécessairement 1 et donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

De plus si l est un point fixe de φ_X, alors le signe de $u_n - l$ est constant puisque $u_{n+1} - l = \varphi_X(u_n) - \varphi_X(l)$ et φ_X est croissante. Il en résulte que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en fait vers le plus petit point fixe de φ_X qui lui est supérieur. Comme u_0 est nul, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le plus petit point fixe de φ_X. Celui-ci n'est égal à 1 que si 1 est l'unique point fixe de φ_X.

D'après l'étude qui précède la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge donc vers 1 si et seulement si son espérance Np est inférieure (ou égale) à 1.

En d'autres termes les plantes meurent presque surement si et seulement si le nombre moyen de descendants directs par plante est inférieur à 1 (ce que l'on aurait pu prédire intuitivement).

Remarque : introduire h ne sert qu'à compliquer les choses. De même la non introduction de u_0 ne facilite pas le travail. Il est clair que g est convexe en tant que somme de fonctions convexes (si vous n'êtes pas convaincu, calculez la dérivée seconde). Sa dérivée est croissante et vaut Np-1 en 1. On a donc immédiatement le tableau de variation de g.

Par ailleurs il n'y a pas de question 2.2 ...

Question 2.3 On fait le même raisonnement qu'en 2.1.2.c : supposons que Z_1 vaille k et notons X_1, X_2, ..., X_k les variables aléatoires correspondant à la taille des descendants de la n^e génération issus de chacune des plantes de la génération $\mathcal{G}_1$. Par hypothèse ces variables sont indépendantes et de même loi que Z_{n-1}. Comme $W_{n,k}$ est la somme de ces variables, l'assertion en résulte.

On a donc pour tout t dans $[0; R_{n-1}[$,

$$\varphi_{W_{n,k}}(t) = \varphi_{X_1+\ldots+X_k}(t) = \prod_{i=1}^{k} \varphi_{X_i}(t) = \varphi_{n-1}^k(t) \ .$$

Comme les séries qui définissent $\varphi_{W_{n,k}}$ et φ_{n-1} sont à coefficients positifs, cette égalité prouve qu'elles ont même rayon de convergence. Par définition du domaine de définition de φ_X, ceci prouve que les fonctions $\varphi_{W_{n,k}}$ et φ_{n-1} sont bien égales.

Question 2.4 On a, pour tout t dans $[0; R_n[$,

$$\varphi_n(t) = \sum_{\ell \in \mathbf{N}} \left(\sum_{k \in \mathbf{N}} P(Z_1 = k) P(W_{n,k} = \ell) \right) t^\ell$$

et, par positivité de tous les termes (et donc absolue convergence de la série), cette somme est commutativement convergente. Par conséquent

$$\varphi_n(t) = \sum_{k \in \mathbf{N}} P(Z_1 = k) \varphi_{W_{n,k}}(t)$$

et en particulier t est inférieur à R_{n-1} (i.e. $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante). Il en résulte

$$\varphi_n(t) = \sum_{k \in \mathbf{N}} P(Z_1 = k) \varphi_{n-1}^k(t) = \varphi(\varphi_{n-1}(t)) \ .$$

Montrons par récurrence sur l'entier naturel non nul n que R_n est strictement supérieur à 1. Pour $n = 1$ cela résulte de l'hypothèse initiale $R_X > 1$.

Soit maintenant n un entier supérieur à 2 tel que R_{n-1} soit strictement supérieur à 1. Puisque les séries considérées sont à termes positifs les séries (formelles) données par φ_n et $\varphi \circ \varphi_{n-1}$ ont même rayon de convergence (c'est toujours le critère de convergence commutative). Par conséquent si un réel positif t est tel que $\varphi_{n-1}(t)$ soit strictement inférieur à R_X, alors R_n est supérieur à t. Or $\varphi_{n-1}(1)$ est égal à 1 (puisque c'est $E(1)$) et l'existence de t strictement supérieur à 1 tel que $\varphi_{n-1}(t)$ soit strictement inférieur à R_X résulte de la continuité de φ_{n-1} en 1 (puisque R_{n-1} est strictement supérieur à 1) et du fait que R_X est strictement supérieur à 1. La propriété est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence on a donc établi que R_n est strictement supérieur à 1 pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1.

On peut donc calculer les espérances grâce aux formules du 1.2 :

$$E(Z_n) = \varphi'_n(1) = \varphi'_{n-1}(1)\varphi'(\varphi_{n-1}(1)) = E(Z_{n-1})\varphi'(1) = \mu E(Z_{n-1})$$

et la suite $(E(Z_n))_{n\geq}$ est une suite géométrique de raison μ.

Comme $E(Z_0) = 1$ c'est que $E(Z_n) = \mu^n$. Si on ne veut pas utiliser Z_0, on a $E(Z_1) = E(X) = \mu$ et la conclusion est la même.

Par conséquent $E(Z_n)$ tend vers $+\infty$ si l'espérance de X est strictement supérieure à 1, vers 1 si elle vaut 1 et vers 0 sinon. (L'espérance de X est bien entendu positive.)

Question 2.5 Pour tout n entier supérieur à 2, on a

$$u_n = \varphi_n(0) = \varphi(\varphi_{n-1}(0)) = \varphi(u_{n-1}) \ ,$$

ce qui est l'assertion désirée.

Comme φ est croissante et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite récurrente associée à φ, c'est une suite monotone. Comme elle est bornée, à valeurs dans $[0;1]$, elle est donc convergente. Par continuité de φ elle converge vers un point fixe de φ.

Par hypothèse sur X, il existe n supérieur à 2 tel que $P(X = n)$ est non nul. Par conséquent φ est strictement convexe comme somme de fonctions convexes dont l'une au moins est strictement convexe. Il en est donc de même pour la fonction g définie sur $[0;1]$ par $g(x) = \varphi(x) - x$. Cette fonction est de classe C^∞ sur $[0;1]$ puisque R_X est strictement supérieur à 1. Sa dérivée est strictement croissante et vaut $\varphi'(1) - 1$, i.e. $\mu - 1$, en 1.

Par conséquent si μ est inférieur à 1, g est strictement décroissante sur $[0;1]$. Comme elle s'annule en 1, le seul point fixe de φ sur $[0;1]$ est 1 et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

Si par contre μ est strictement supérieur à 1, g décroît de $\varphi(0)$ (i.e. $P(X = 0)$) à une certaine valeur négative puis croît jusqu'à sa valeur en 1, i.e. 0. Par conséquent φ admet deux points fixes.

Par croissance de φ la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le plus petit point fixe supérieur à u_0, i.e. le plus petit des deux points fixes de φ, c'est donc un nombre de $[0;1[$. **Il n'y a aucune raison pour que ce point fixe ne soit pas nul : il est en fait nul si et seulement si** $P(X = 0) = 0$. Remarquez par contre que l'on ne peut avoir simultanément $P(X = 0) = 0$ et $E(X) = 1$ car alors $P(X = 1) = 1$ et donc $P(X \geq 2) = 0$ ce qui a été exclus.

En d'autre termes : si toute plante a au moins un descendant ($P(X = 0) = 0$), la probabilité pour que la population s'éteigne est nulle ; sinon la probabilité pour que la population survive est non nulle si et seulement si son espérance de descendant est strictement supérieure à 1 (ce qui contient, au passage, le cas précédent).

Lorsque X est un variable binomiale de paramètres $N = 50$ et $p = 0.022$, μ vaut $Np = 1.1$. On implémente une méthode dichotomie (ou on la fait à la main) avec $g(x) = (0.022x + 0.978)^{50} - x$ pour trouver l'unique point fixe de φ dans $]0;1[$. Or on trouve $g(0.82) \simeq 4.7\ 10^{-5}$ et $g(0.83) \simeq -8.4\ 10^{-4}$. Par conséquent on a

$$0.82 \leq l \leq 0.83 \ .$$

Lorsque X est un variable binomiale de paramètres $N = 50$ et $p = 0.08$, μ vaut $Np = 4$. On recommence la dichotomie avec $g(x) = (0.08x + 0.92)^{50} - x$. On trouve $g(0.01) \simeq 6.2\ 10^{-3}$ et $g(0.02) \simeq -3.1\ 10^{-2}$. Par conséquent

$$0.01 \leq l \leq 0.02 \ .$$

Deuxième problème

Question I.1.a Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned} w_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)dt &= \left[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\sin^2(t)dt \\ &= (n+1)(w_n - w_{n+2}) \end{aligned}$$

et donc

$$(n+2)w_{n+2} = (n+1)w_n \ .$$

Question I.1.b Montrons par récurrence sur l'entier naturel n que $(n+1)w_{n+1}w_n$ est égal à $\pi/2$.

Pour $n=0$, on a $w_0=\pi/2$ et $w_1=1$, donc $w_1w_0=\pi/2$, ce qui est bien l'assertion voulue.

Soit maintenant n un entier naturel tel que $(n+1)w_{n+1}w_n=\pi/2$. On a alors

$$(n+2)w_{n+2}w_{n+1}=(n+1)w_nw_{n+1}=\frac{\pi}{2}$$

et la propriété est donc héréditaire. Le principe de récurrence permet donc d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $(n+1)w_{n+1}w_n=\pi/2$.

Question I.2 La fonction $n\mapsto\cos^n(t)$ est croissante pour tout t dans $[O;\pi/2]$ et il en est donc de même pour w_n. Comme $t\mapsto\cos^n(t)$ est positive et continue sur $[0;\pi/2]$ et n'est pas identiquement nulle, w_n est strictement positif. Il en résulte, pour tout entier naturel n,

$$1\geq\frac{w_{n+1}}{w_n}\geq\frac{w_{n+2}}{w_n}=\frac{n+1}{n+2}$$

et donc $w_n\sim w_{n+1}$. A fortiori l'assertion en résulte.

Question I.3 On a

$$w_{2n}=\frac{2n-1}{2n}w_{2n-2}=\frac{(2n-1)\dots1}{2n\dots2}w_0=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!n!}\frac{\pi}{2}=C_{2n}^n\frac{\pi}{2^{2n+1}}\ .$$

Question I.4 Par conséquent

$$C_{2n}^n\frac{\pi}{2^{2n}}=\frac{2}{\pi}w_{2n}=\frac{2}{\pi}\sqrt{w_{2n}^2}\simeq\frac{2}{\pi}\sqrt{w_{2n}w_{2n+1}}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4n}}=\sqrt{\frac{1}{n\pi}}$$

ce qui est l'assertion désirée.

Question II.1 L'intégrand étant une fonction de classe C^∞ des deux variables x et θ et l'intégrale étant propre (i.e. sur un compact), J_n est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et ses dérivées sont données par dérivation sous le signe somme.

L'intégrand étant une fonction décroissante de x, J_n l'est également.

On a de plus, pour x non nul,

$$|J_n(x)|\leq\int_0^\pi e^{-2x\theta}d\theta=\frac{1-e^{-2x\theta}}{2x}$$

et donc $\lim_{x\to+\infty}J_n(x)=0$.

Prenons maintenant a réel strictement entre 0 et $\pi/2$. On a, toujours pour x non nul,

$$J_n(x)\geq\int_a^{\pi-a}e^{-2x\theta}\sin^{2n}(a)d\theta=\sin^{2n}(a)\frac{e^{-2x(\pi-a)}-e^{-2ax}}{-2x}\ .$$

Comme $\pi-a$ est strictement supérieur à a, le terme dominant en $-\infty$ est $e^{-2x(\pi-a)}$ et donc $\lim_{x\to-\infty}J_n(x)=+\infty$.

Enfin

$$J_n(0)=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(\theta)d\theta+\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(\pi-\theta)d\theta=2w_{2n}=\frac{\pi}{2^{2n}}C_{2n}^n\ .$$

Question II.2 On a, par intégrations par partie successives, pour n entier naturel non nul

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \left[-e^{-2x\theta}\sin^{2n-1}(\theta)\cos(\theta)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(\theta)e^{-2x\theta}\left(-2x\sin^{2n-1}(\theta) + (2n-1)\sin^{2n-2}(\theta)\cos(\theta)\right)d\theta \\ &= -2x\int_0^\pi \cos(\theta)e^{-2x\theta}\sin^{2n-1}(\theta)d\theta + (2n-1)(J_{n-1}(x) - J_n(x)) \\ &= -2x\left[e^{-2x\theta}\frac{\sin^{2n}(\theta)}{2n}\right]_0^\pi - \frac{2x^2}{n}\int_0^\pi e^{-2x\theta}\sin^{2n}(\theta)d\theta + (2n-1)(J_{n-1}(x) - J_n(x)) \end{aligned}$$

et donc

$$2n\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)J_n(x) = (2n-1)J_{n-1}(x)\ .$$

Question II.3.a Soit a un réel quelconque compris strictement entre 0 et $\pi/2$, M le supremum de φ sur $[0;\pi/2]$ et α le supremum de φ sur $[a;\pi/2]$. On a, par positivité de la fonction sinus,

$$|\lambda_n| \leq M\int_0^a \sin^{2n}(\theta)d\theta + \alpha\int_a^{\pi/2}\sin^{2n}(\theta)d\theta \leq M\int_0^a \sin^{2n}(\theta)d\theta + \alpha w_{2n} \leq M\pi\sin^{2n}(a) + \alpha w_{2n}\ .$$

Donnons-nous maintenant un réel strictement positif ε. D'après les questions I.3 et I.4, w_{2n} est équivalent à $\sqrt{\pi}/2\sqrt{n}$ et est donc majoré par $2/\sqrt{n}$ pour n assez grand. Puisque φ tend vers 0 quand a tend vers $\pi/2$, on peut trouver a tel que α soit inférieur à $\epsilon/4$ et on a alors

$$|\lambda_n| \leq M\pi\sin^{2n}(a) + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$$

pour n assez grand. Comme $\sin(a)$ est strictement inférieur à 1, la suite $\sin^{2n}(a)$ décroît plus vite que $1/\sqrt{n}$ et donc, pour n assez grand on a

$$|\lambda_n| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

i.e. λ_n est dominé par $1/\sqrt{n}$, ce qui est l'assertion recherchée.

Question II.3.b On applique ce qui précède à la fonction $f = \varphi - \varphi(\pi/2)$. On a donc

$$\lambda_n - \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2}J_n(0) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et donc, d'après la question I.4

$$\lambda_n = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{4n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et par conséquent

$$\lambda_n \sim \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{4n}}\ ,$$

ce qui est l'assertion recherchée.

Question II.3.c D'après la relation de Chasle et grâce à un changement de variables affine, on a

$$J_n(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-2x\theta}\sin^{2n}(\theta)d\theta + \int_0^{\pi/2} e^{-2x(\pi/2-\theta)}\sin^{2n}(\theta)d\theta$$

et l'assertion en résulte.

Question II.3.d On applique le résultat II.3.b aux fonctions $\theta \mapsto e^{\pm x\theta}$ et on obtient

$$J_n(x) = e^{-\pi x}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + e^{-2\pi x}e^{\pi x}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et donc

$$J_n(x) \sim e^{-\pi x}\sqrt{\frac{\pi}{n}} .$$

Question III.1.a L'intégrand étant de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$, il est localement intégrable et le problème de convergence ne se pose qu'en l'infini.

Pour x négatif ou nul, l'intégrand est minoré par sa valeur en $x = 0$. Or, pour tout entier naturel non nul k et tout réel u supérieur à $k\pi$, on a

$$\int_0^u \sin^{2n}(\theta)d\theta \geq \sum_{i=0}^{k-1}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \sin^{2n}(\theta)d\theta = kJ_n(0) \qquad \text{avec} \quad J_n(0) > 0$$

et donc $A_n(x)$ est divergente.

Pour x strictement positif, l'intégrand est dominé par la fonction de référence $\theta \mapsto e^{-2x\theta}$ et $A_n(x)$ est donc convergente.

En résumé $A_n(x)$ est convergente si et seulement si x est strictement positif.

Question III.1.b On a directement, pour x strictement positif, $A_0(x) = 1/2x$ et

$$A_1(x) = -\frac{1}{2x}\left[e^{-2x\theta}\sin^2(\theta)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-2x\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-2x\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta$$

et donc

$$A_n(x) = -\frac{1}{2x^2}\left[e^{-2x\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2x^2}\int_0^{+\infty} e^{-2x\theta}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = \frac{1}{2x^2}\int_0^{+\infty} e^{-2x\theta}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))d\theta\ ;$$

d'où

$$A_1(x) = \frac{1}{2x^2}A_0(x) - \frac{1}{x^2}A_1(x) \qquad \text{soit} \qquad x^2A_1(x) = \frac{1}{2}A_0(x) - A_1(x)$$

et donc

$$A_1(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}A_0(x) = \frac{1}{4x(1+x^2)} .$$

Question III.2.a Par un changement de variable affine $\theta = t + k\pi$, on obtient

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2x\theta}\sin^{2n}(\theta)d\theta = e^{-2k\pi x}J_n(x) .$$

Question III.2.b L'intégrale définissant $A_n(x)$ étant absolument convergente, on a

$$A_n(x) = \sum_{k\in\mathbf{N}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2x\theta}\sin^{2n}(\theta)d\theta = \sum_{k\in\mathbf{N}} e^{-2k\pi x}J_n(x) = \frac{1}{1-e^{-2\pi x}}J_n(x) .$$

L'assertion en découle pour f définie par $f(x) = (1 - e^{-2\pi x})^{-1}$.

Question III.3 D'après les questions II.2 et III.2.b, on a, pour x strictement positif et n entier naturel,

$$2n\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)A_n(x) = (2n-1)A_{n-1}(x)$$

et donc
$$A_n(x) = \frac{2n-1}{2n}\frac{n^2}{x^2+n^2}A_{n-1}(x)\ .$$
Par conséquent
$$A_n(x) = \frac{(2n-1)\dots 1}{2n\dots 2}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2}{x^2+k^2}A_0(x)$$
soit
$$A_n(x) = \frac{1}{2x}\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2}{x^2+k^2}$$
d'après les calculs déjà effectués en I.3 et III.1.b.

Question III.4 D'après les questions I.4, II.3.d, III.2.b et III.3, on a
$$\prod_{k=1}^{n}\frac{x^2+k^2}{k^2} = \frac{1}{2xA_n(x)}\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \sim \frac{1-e^{-2\pi x}}{2xJ_n(x)}\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sim \frac{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}{2\pi x} = \frac{\operatorname{sh}(\pi x)}{\pi x}$$
c'est-à-dire que la limite quand n tend vers l'infini du produit considéré est égale à $\operatorname{sh}(\pi x)/\pi x$.

Par parité des fonctions considérées, l'égalité s'étend à $\mathbf{R}^*$.

Question IV.1 La fonction sh étant de classe C^∞ et strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$, la fonction D est bien définie et de classe C^∞ sur ce même domaine. Par imparité des numérateur et dénominateur, il en est de même sur $\mathbf{R}_-^*$. Comme la fonction sh est équivalente, au voisinage de 0, à l'identité, le quotient $\operatorname{sh}(\pi x)/\pi x$ admet 1 comme limite en 0 et donc D est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbf{R}$ en posant $D(0) = 0$.

Question IV.2 Si x est nul, l'identité est immédiate. Par parité il nous suffit donc de démontrer l'identité pour x strictement positif. Elle résulte de la continuité du logarithme et la question III.4.

Question IV.3.a La fonction $\ln(1+x)$ est développable en série entière au voisinage de 0 et admet le développement
$$\ln(1+x) = \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}$$
pour x dans $]-1;1[$.

On applique cette égalité à x^2/k^2 pour x dans $]-1;1[$ et k entier naturel non nul pour obtenir
$$\ln\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{x^{2p}}{pk^{2p}}\ .$$
L'assertion en résulte immédiatement.

Question IV.3.b La série en p de terme général x^{2p}/pk^{2p} est positive et majorée par celle de terme général x^{2p}/k^{2p} et donc elle est convergente, majorée par
$$\frac{x^2}{k^2}\frac{1}{1-x^2/k^2} = \frac{x^2}{k^2-x^2}\ .$$
Cette série en k est convergente par le critère de Riemann et donc la série en k de terme général $\sum_{p\geq 1} x^{2p}/pk^{2p}$ est convergente (majorée par $x^2\sum_{k\geq 1} k^{-2}$).

Question IV.4 On a donc

$$D(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2p} \right) x^{2p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}\zeta(2p)}{p} x^{2p} \ .$$

Par unicité du développement en série (ou du développement limité), on obtient donc les deux sommes demandées en considérant les termes de degré 2 et 4 respectivement du développement de D. Or

$$\mathrm{sh}(\pi x) = \pi x + \frac{\pi^3 x^3}{6} + \frac{\pi^5 x^5}{120} + o(x^6)$$

et donc

$$\frac{\mathrm{sh}(\pi x)}{\pi x} = 1 + \frac{\pi^2 x^2}{6} + \frac{\pi^4 x^4}{120} + o(x^5) \ .$$

D'où

$$D(x) = \frac{\pi^2 x^2}{6} + \frac{\pi^4 x^4}{120} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 x^2}{6} \right)^2 + o(x^5)$$

soit

$$D(x) = \frac{\pi^2}{6} x^2 - \frac{\pi^4}{180} x^4 + o(x^5)$$

et donc

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \zeta(4) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \ .$$

François Sauvageot