Première épreuve CAPES Agricole 2002

François Sauvageot

25 février 2002

Partie I

Remarque préliminaire : la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbf{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \; .$$

La fonction, définie sur $\mathbf{R}^*$, $x \mapsto (e^x - 1)/x$ est donc prolongeable par continuité en 0, y est développable en série entière, de rayon de convergence infini. Le prolongement ainsi obtenu est égal à $1/f$, puisque

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = exp'(0) = 1$$

et donc $1/f$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$, de rayon de convergence infini. Elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et ne s'y annule pas. Par conséquent f, qui n'est autre que l'inverse de $1/f$ est également de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

Question I.1.1

Puisque f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, elle y est continue et dérivable.

Question I.1.2

La fonction exponentielle est convexe. Par conséquent son taux d'accroissement entre 0 et un réel x est une fonction croissante de x. Comme ce taux tend vers 0 en $-\infty$, il est toujours positif et donc son inverse est positif et est une fonction décroissante de x. Par conséquent f est décroissante sur $\mathbf{R}$.

Question I.1.3

Par croissance comparée de l'expontielle et des fonctions polynômes, on a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \; .$$

La courbe (C) admet donc l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

De plus

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \qquad f(x) + x = \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

et donc

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = 0 \; .$$

Il en résulte que (C) admet la seconde bissectrice comme asymptote en $-\infty$.

Comme f est continue sur $\mathbf{R}$, il n'y a pas d'autres branches infinies.

Question I.1.4

Question I.2.1

Puisque f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, le théorème de Taylor-Young entraîne qu'elle a un développement limité en tout point et à tout ordre, en particulier en 0.

Question I.2.2

D'après l'écriture de $1/f$ donnée en remarque préliminaire, on a, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1 + x/2 + x^2/6 + x^3/24 + x^4/120 + o(x^4)} \\
&= 1 - x\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{120}\right) + x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24}\right)^2 - x^3\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6}\right)^3 + \frac{x^4}{2^4} + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^4}{16} + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Remarque : on peut obtenir ce développement limité, en attendant un peu (environ 1 minute), sur une Ti-89 avec la commande `taylor(x/(e^x-1),x,4,0)`.

Question I.3.1

D'après la remarque préliminaire, $1/f$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$ et son développement en 0 est donné par

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \frac{1}{f(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \ .$$

Remarque : l'énoncé ne précise pas en quel point on doit donner le développement en série entière, ce qui est pourtant nécessaire.

Question I.3.2

Puisque f est développable en série entière sur $\mathbf{R}$, elle est analytique et est, en particulier, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

Question I.3.3

La formule de Taylor-Young et l'unicité du développement limité entraîne, grâce à I.2.2,

$$f(0) = 1 \ , \qquad f'(0) = -\frac{1}{2} \ , \qquad f''(0) = \frac{1}{6} \ , \qquad f^{(3)}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f^{(4)}(0) = -\frac{1}{30} \ .$$

Question I.4.1

Par définition de f, pour tout réel non nul, on a $(e^x - 1)f(x) = x$. Comme cette formule est encore vraie en 0, elle l'est sur $\mathbf{R}$. Les fonctions $x \mapsto e^x - 1$, f et identité sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et on peut donc leur appliquer la formule de Liebnitz :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in \mathbf{R} \qquad n \geq 2 \Rightarrow (e^x - 1)f^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k e^x f^{(n-k)}(x) = 0$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad n \geq 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} C_n^k B_{n-k} = 0$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad n \geq 2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0 \ .$$

Pour n entier naturel on note (H_n) la propriété : pour tout entier inférieur à n, B_k est rationnel. Comme $B_0 = 1$, la propriété (H_0) est vraie. Si maintenant n est un entier naturel non nul quelconque, $n+1$ est alors supérieur à 2 et l'identité précédente montre que $(n+1)B_n$ est l'opposé de $\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k = 0$. Comme $n+1$ est un entier et comme les nombres de combinaisons aussi, la propriété (H_n) est héréditaire et le principe de récurrence permet de conclure que, pour tout entier naturel k, B_k est un nombre rationnel.

Remarque : on utilise en fait la question I.5.1. Bien entendu la rationnalité résulte de la formule de Liebnitz d'une façon qualitative, mais il faudra en I.5.1 le rendre quantitatif, alors autant le faire tout de suite.

Question I.4.2

Pour tout réel non nul x, on a

$$f(x) - B_1 x = \frac{x}{2}\frac{2 + e^x - 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\frac{ch(x/2)}{sh(x/2)} = \frac{x}{2}\coth\left(\frac{x}{2}\right)$$

et donc la fonction, définie sur $\mathbf{R}$, $x \mapsto f(x) - B_1 x$ est paire. Par unicité du développement limité, son développement limité à tout ordre est donné par un polynôme pair et il en résulte que les nombres de Bernoulli d'indice impair, excepté le premier, sont tous nuls.

Question I.5.1

D'après les résultats démontrés en I.4.1, on a $B_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad n \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k} B_k = 0$$

et l'assertion cherchée en résulte.

Question I.5.2

Il vient

$$B_6 = -\frac{1}{7}\left(1 - \frac{7}{2} + \frac{21}{6} - \frac{35}{30}\right) = \frac{1}{42}\ .$$

Question I.6.1

Remarque : l'énoncé est absurde. Il faut préciser où on doit résoudre l'équation différentielle (E). On peut, par ailleurs, demander de l'aide à une Ti-89 de la façon suivante : `résolvED(x*y'+(x-1)*y+y^2=0,x,y)` .

Soit x_0 un réel non nul, au voisinage de x_0, l'équation différentielle (E) est équivalente à l'équation

$$(E') \qquad y' = \frac{1-x}{x}y - \frac{y^2}{x}\ .$$

Comme la fonction, définie sur $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto ((1-x)y - y^2)/x$ est de classe C^1, on peut en particulier appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Par conséquent si y est solution de (E') et est nulle en x_0, alors y est nulle au voisinage de x_0, par unicité de la solution au voisinage de x_0. Ceci étant vrai pour tout réel non nul x_0, il en résulte qu'une solution de (E) qui s'annule sur un intervalle inclus dans $\mathbf{R}^*$ y est identiquement nulle.

Soit maintenant I un intervalle ne contenant pas 0. Soit y une solution non nulle de (E) sur I ; d'après ce qui précède, elle ne s'annule en aucun point de I. On peut donc considérer la fonction $z = 1/y$ et z est une fonction dérivable sur I. De plus z vérifie, sur I, l'équation différentielle

$$(E'') \qquad -xz' + (x-1)z + 1 = 0\ .$$

Posons enfin $u = xz$ et $v = u + 1$. Ces fonctions sont également dérivables et vérifient, sur I,

$$-u' + u + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad -v' + v = 0\ .$$

Il en résulte qu'il existe un réel λ tel que, pour tout x dans I, on ait

$$v(x) = \lambda e^x\ , \qquad u(x) = \lambda e^x - 1\ , \qquad z(x) = \frac{\lambda e^x - 1}{x} \qquad \text{et} \qquad y(x) = \frac{x}{\lambda e^x - 1}\ .$$

Remarquons que cette solution de (E) n'est prolongeable par continuité en 0 (si 0 est adhérent à I) que si λ vaut 1 et que y est alors la restriction de f à I. Dans ce cas le prolongement en 0 vaut 1 et ne peut donc se recoller avec la fonction nulle.

Il en résulte que les solutions de (E) sur un intervalle quelconque I sont

1. la fonction nulle
2. si I contient 0, la restriction de f à I
3. si I ne contient pas 0, les fonctions $x \mapsto x/(\lambda e^x - 1)$ pour λ réel.

Remarque : on remarquera que l'ensemble des solutions n'est pas un espace affine et n'a pas nécessairement la dimension attendue. Il sert encore une fois de faire la question suivante avant celle-ci ! Une solution particulière de (E) un peu plus simple est $x \mapsto -x$. Enfin l'introduction de u et v est guidée par le fait que l'on cherche à retrouver f comme solution particulière ...

Question I.6.2

Ceci résulte de l'étude précédente, à condition de supposer que l'on cherche les solutions de (E) définies sur $\mathbf{R}$.

Question I.7.1

Comme f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, g l'est aussi et on a, par la formule de Liebnitz,

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in \mathbf{R} \qquad g^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x) + (x-1)f^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad g^{(n)}(0) = nB_n - B_n + nB_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k B_{n-k} \ .$$

Comme g est nulle, d'après I.6.2, il vient

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad (n-1)B_n + nB_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k B_{n-k} = 0 \ .$$

Question I.7.2

Par définition on a $b_0 = 1$ et $b_1 = B_2/2 = 1/12$. De plus la relation précédente et la nullité des nombres de Bernoulli impairs (à l'exception de B_1) entraîne, en l'appliquant à $2n$ pour n entier naturel non nul,

$$(2n-1)b_n + \frac{1}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k (2k)!(2n-2k)! b_k b_{n-k} = (2n+1)b_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} = 0$$

et la relation cherchée s'en déduit.

Question I.7.3

Il vient

$$B_8 = -8!\frac{2b_1b_3 + b_2^2}{9} = -\frac{1}{9}\left(2C_8^2\frac{1}{42.6} + C_8^4\frac{1}{900}\right) = -\frac{1}{9}\left(\frac{2}{9} - \frac{7}{90}\right) = -\frac{27}{810} = -\frac{1}{30}$$

et donc, en résumé,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_n	1	-1/2	1/6	0	-1/30	0	1/42	0	-1/30	0

Question I.8

Pour n entier naturel non nul, soit (H_n) la propriété : pour tout entier naturel non nul inférieur à n, B_{2k} est du signe de $(-1)^{n-1}$.

Comme $B_2 = 1/6$, (H_1) est vraie. Soit maintenant n un entier naturel non nul. Si (H_n) est vraie, pour tout entier naturel non nul k, la quantité $b_k b_{n-k}$ est du signe de $(-1)^{k-1+n-k-1}$, i.e. du signe de $(-1)^n$. La relation donnée en $I.7.2$ montre alors que b_n est du signe de $(-1)^{n-1}$ et donc la propriété (H_n) est héréditaire. Le principe de récurrence permet de conclure que, pour tout entier naturel non nul n, B_{2n} est du signe de $(-1)^{n-1}$.

Partie II

Question II.1.1

Pour t et x réels, on a $f_t(x) = e^{tx} f(x)$ et donc f_t est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ en tant que produit de deux telles fonctions.

Question II.1.2 L'écriture précédente exhibe f_t comme produit de deux fonctions, une seule dépendant de t. Par conséquent les valeurs en 0 des dérivées (en x) de tout ordre de ces deux fonctions sont soit constantes (en t), soit un monôme en t d'après les propriétés de l'exponentielle. La formule de Liebnitz assure donc que la valeur en 0 de toutes les dérivées de f_t sont des polynômes en t.

Plus précisément, on a

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in \mathbf{R} \qquad f_t^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k e^{tx} f^{(n-k)}(x)$$

et donc

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \qquad f_t^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k t^{n-k} \ .$$

Il vient donc, pour tout réel t et tout entier naturel n, $P_n(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k t^{n-k}$ et, *a fortiori*, $P_n(0) = B_n$.

Question II.2.1

On a

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \forall x \in \mathbf{R}^* \qquad f_{t+1}(x) - f_t(x) = \frac{xe^{(t+1)x}}{e^x - 1} - \frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = xe^{tx}$$

et cette formule est encore valable si x est nul. Il en résulte, par dérivation (en convenant que $t \mapsto t^0$ est la fonction constante égale à 1)

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in \mathbf{R} \qquad f_{t+1}^{(n)}(x) - f_t^{(n)}(x) = xt^n e^{tx} + nt^{n-1} e^{tx}$$

d'où

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \qquad P_n(t+1) - P_n(t) = nt^{n-1} \ .$$

Question II.2.2

Il en résulte, en évaluant l'identité précédente en t égal à 0, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_n(1) - P_n(0) = 0$, ce qui est l'assertion cherchée.

Question II.2.3

On a, d'après II.1.2,

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \qquad P_n'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k (n-k) t^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n C_{n-1}^k B_k t^{n-1-k} = nP_{n-1}(t) \ .$$

Question II.2.4

Il vient

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \int_0^1 P_n(t)dt = \left[\frac{P_{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{P_{n+1}(1) - P_{n+1}(0)}{n+1} = 0 \ .$$

Partie III

Question III.1.1

Soit n un entier naturel non nul. Puisque l'exponentielle est développable en série entière sur $\mathbf{R}$, il en est de même pour h_n, en tant que somme de produits de telles fonctions. De plus, pour k entier naturel non nul, le coefficient de x^k dans le développement en série entière de h_n en 0 est la somme des coefficients de x^{k-1} dans ceux de $x \mapsto e^{px}$ pour p variant entre 0 et $n-1$, i.e.

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad h_n(x) = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_{k-1}(n-1)}{(k-1)!} x^k \ .$$

Question III.1.2

Pour x réel non nul et n entier naturel non nul, on a

$$\sum_{p=0}^{n-1} e^{px} = \frac{e^{nx}-1}{e^x-1}$$

et il vient $h_n = f_n - f$.

Question III.1.3

La formule II.1.2 entraîne

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall k \in \mathbf{N} \qquad f_n^{(k)}(0) = P_k(n) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j B_j^{k-j} = B_k + \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j B_j n^{k-j}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in \mathbf{R} \qquad h_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k-1} C_k^j B_j n^{k-j}}{k!} x^k \ .$$

Question III.2.1

Soit k et n deux entiers naturels non nuls, par identification du coefficient de x^{k+1} dans les développements en série entière de h_n donnés en III.1.1 et III.1.3, il vient

$$\frac{S_k(n-1)}{k!} = \frac{\sum_{j=0}^{k} C_{k+1}^j B_j n^{k+1-j}}{(k+1)!}$$

et donc

$$S_k(n) = n^k + S_k(n-1) = n^k + \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} C_{k+1}^j B_j n^{k+1-j} \ .$$

Question III.2.2

Par conséquent, pour tout entier naturel non nul n,

$$S_4(n) = n^4 + \frac{1}{5}\left(n^5 - \frac{5}{2}n^4 + \frac{10}{6}n^3 - \frac{5}{30}n\right) = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30} = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

et

$$S_5(n) = n^5 + \frac{1}{6}\left(n^6 - \frac{6}{2}n^5 + \frac{15}{6}n^4 - \frac{15}{30}n^2\right) = \frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12} = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} \ .$$

Remarque : ces expressions totalement factorisées s'obtiennent directement avec la Ti-89 avec les commandes : `Σ(k^4,k,1,n)` et `Σ(k^5,k,1,n)`. On peut également vérifier les formes développées en demandant `dévelop(n*(n+1)*(6n^3+9n^2+n-1))` et `dévelop(n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1))` .

Question III.2.3

Les polynômes donnant $S_4(n)$ et $S_5(n)$ sont respectivement $X(X+1)(6X^3+9X^2+X-1)/30$ et $X^2(X+1)^2(2X^2+2X-1)/12$ dont les ensembles de racines réelles sont respectivement $\{0,-1,-1/2,-1/2+\sqrt{21}/6,-1/2-\sqrt{21}/6\}$ et $\{0,-1,-1/2+\sqrt{3}/2,-1/2-\sqrt{3}/2\}$. Dans le second cas 0 et -1 sont racines doubles. En effet on a trouvé autant de racines réelles que le degré de chacun des polynômes, en comptant les multiplicités, ce sont donc exactement les racines de ces polynômes.
Remarque : pour S_5, il n'y a aucun problème, par contre pour S_4 il faut soit trouver la racine $-1/2$ soit utiliser une calculatrice. Avec la Ti-89 on demande simplement `solve(6n^3+9n^2+n-1=0,n)` .

Partie IV

La remarque concernant la démonstration de l'identité admise est tout simplement odieuse.

Question IV.1

D'après I.8, le signe de B_{2k} est celui de $(-1)^{k-1}$ pour tout entier naturel non nul k. Avec l'identité admise, il suffit pour obtenir l'équivalent cherché de démontrer

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}=1\ .$$

On remarque tout d'abord que la série considérée est bien convergente d'après le critère de Riemann (même si ce fait semble acquis au vu du phrasé de l'énoncé). Par décroissance et comparaison avec une intégrale, il vient, pour k entier naturel non nul,

$$1+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2k}}\le 1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}\le 1+\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^{2k}}$$

et donc

$$1+\frac{1}{2k-1}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}\le 1+\frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}}$$

et la limite recherchée découle du théorème d'encadrement des limites.

Question IV.2.1

Remarque : quand on pose une question, c'est bien de mettre un point d'interrogation !

A partir du rang 2, la série entière entière ne comporte que des termes pairs. On l'étudie donc en calculant les rapports de $B_{2n}/(2n)!$ entre deux termes pairs consécutifs et pour n tendant vers $+\infty$. D'après ce qui précède on a

$$\frac{(2n)!B_{2n+2}}{(2n+2)!B_{2n}}\sim-\frac{1}{4\pi^2}$$

et donc, par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence R cherché vérifie $1/R^2=1/4\pi^2$, autrement dit $R=2\pi$.

Question IV.2.2

Comme $1/f$ est développable en série entière en 0 et y est non nulle, il en est de même de f. Son développement en série entière est donc donné par son développement en série de Taylor, i.e. pour x dans un certain voisinage de 0, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$. D'après le théorème de prolongement des fonctions analytiques, il en résulte que cette égalité est vraie sur le plus grand disque de convergence de ces deux fonctions développables en série entière et, en particulier, sur $]-R;R[$.

Il vient

$$\forall x \in]-R;R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\ .$$

Remarque : la fonction f est méromorphe en tant que fonction d'une variable complexe. Ses pôles sont les multiples entiers non nuls de $2i\pi$ et elle est donc développable en série entière sur le disque $|z| < 2\pi$. C'est ce qui explique le résultat précédent (connu comme cas particulier du phénomène de Runge).

Question IV.3

Remarque : cette notation est scandaleuse. La fonction f_2 a déjà été définie en II.1. Par ailleurs, si l'on se sert du calcul fait en I.4.2, on sait que $f(2x) - 2B_1 x$ est égal à $f_2(x)$. Le développement en série entière s'en déduit alors trivialement.

On a

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \qquad x\coth(x) = x\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = x\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2}(e^{2x}+1)f(2x) = \frac{1}{2}(f+f_1)(2x)$$

et donc la fonction f_2 que l'on vient de définir de façon scandaleuse est développable en série entière en 0 et son terme général est

$$\frac{2^n}{2n!}(B_n + P_n(1))\ .$$

D'après II.2.2 et II.1.2, il vient, pour x au voisinage de 0,

$$f_2(x) = \frac{B_0+B_0}{2} + (B_1 + B_0 + B_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}\frac{B_n+B_n}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}\ .$$

D'après le critère de d'Alembert et l'identité admise en début de partie, cette série a donc un rayon de convergence égal à $\sqrt{\pi^2}$, i.e. π.

Remarque : une fois encore la fonction étudiée est méromorphe sur $\mathbf{C}$ et ses pôles sont les multiples entiers non nul de $i\pi$. Son rayon de convergence est donc nécessairement π. Par ailleurs, le rayon de convergence de cette série est $R/2$ en tant que produit de deux fonctions non nulles admettant un développement en série entière de rayons au moins égaux à $R/2$, dont l'un est exactement $R/2$.

Question IV.4

Pour tout z complexe, on a $iz\coth(iz) = z\cot(z)$. Il en résulte

$$\forall x \in]-\pi;\pi[\qquad f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}\ .$$

Partie V

Question V.1.1

L'intégrand est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ est y est donc localement intégrable. Par croissance comparée de l'exponentielle et des polynômes, c'est un $o(1/t^2)$ au voisinage de l'infini, puisqu'on a choisi n strictement positif. Par conséquent, pour tout (n,p) dans $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$, l'intégrale définissant $u_n(p)$ est convergente.

Question V.1.2

Soit (n,p) dans $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$, par intégration par parties, il vient

$$u_n(p+1) = -\frac{1}{n}\lim_{x\to+\infty} e^{-nx}x^{p+1} + \frac{p+1}{n}u_n(p)$$

et donc $nu_n(p+1) = (p+1)u_n(p)$.

Question V.1.3

Il en résulte

$$\forall (n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N} \qquad u_n(p) = \frac{p!}{n^p} u_n(0) = \frac{p!}{n^{p+1}} \ .$$

Question V.2

L'intégrand est une fonction continue sur $\mathbf{R}^*$ est y est donc localement intégrable. Par croissance comparée de l'exponentielle et des polynômes, c'est un $o(1/t^2)$ au voisinage de l'infini. De plus, au voisinage de 0, l'intégrand est équivalent à t^{2k-2} et y est localement intégrable par le critère de Riemman. Par conséquent, pour tout (n,k) dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, l'intégrale définissant $I_n(k)$ est convergente.

Soit k un entier naturel non nul ; la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $t^{2k-1}/(e^t - 1)$ est continue, prolongeable par continuité en 0 et tend vers 0 en $+\infty$. Elle est donc bornée sur $\mathbf{R}_+^*$. Soit M un tel majorant de sa valeur absolue (en fait la fonction considérée est positive). On a alors, pour tout entier naturel n, $|I_n(k)| \leq M u_n(0) = M/n$ et donc

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \qquad \lim_{n \to +\infty} I_n(k) = 0 \ .$$

Question V.3.1

Pour tout réel non nul t, tout couple (n,k) dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on a

$$\sum_{p=1}^{n} e^{-pt} t^{2k-1} = t^{2k-1} e^{-t} \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-t}} = t^{2k-1} \frac{1 - e^{-nt}}{e^t - 1}$$

et donc, puisqu'on manipule une somme finie d'intégrales absolument convergentes,

$$s_n(k) = I_0(k) - I_n(k) \ .$$

Question V.3.2

D'après la formule V.1.3, il vient, pour (n,k) dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$,

$$s_n(k) = (2k-1)! \sum_{p=1}^{n} p^{-2k}$$

de sorte que, en raison de V.2,

$$I_0(k) = \lim_{n \to +\infty} (I_0(k) - I_n(k)) = \lim_{n \to +\infty} s_n(k)$$

et donc, d'après l'indentité admise en IV,

$$I_0(k) = (2k-1)! \frac{|B_{2k}|(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} = \frac{|B_{2k}|(2\pi)^{2k}}{4k} \ .$$

Question V.3.3

En particulier

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = I_0(1) = B_2 \pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt = I_0(2) = 2\pi^4 |B_4| = \frac{\pi^4}{15} \ .$$