Deuxième épreuve CAPES Agricole 2002

François Sauvageot

25 février 2002

Partie I

Question I.1.a

Soit x un entier relatif et k un entier naturel. Si x est supérieur à k, on a $H_k(x) = C_x^k$. Si x est strictement négatif, on a $H_k(x) = (-1)^k C^k_{-x+k-1}$. Enfin si x est compris entre 0 et $k-1$, $H_k(x)$ est nul. Par conséquent $H_k(x)$ est un entier relatif.

Question I.1.b

Soit k un entier naturel non nul. D'après les formules précédentes : $H_k(k) = 1$, $H_k(-1) = (-1)^k$ et $H_k(0) = 0$. Par conséquent $H'_k(0)$ est la limite de $H_k(x)/x$ lorsque x tend vers 0, à savoir $(-1)^{k-1}/k$.

Si k est nul, on a $H_0(0) = H_0(-1) = 1$ et $H'_0(0) = 0$.

Question I.1.c

Soit k un entier naturel non nul. On a

$$kH_k(X) = \frac{1}{(k-1)!}X(X-1)\dots(X-k+1) = (X-k+1)H_{k-1}(X) .$$

Question I.2.a

L'opérateur de translation de 1 étant linéaire, Δ est différence de deux applications linéaires et est donc elle aussi une application linéaire.

Soit P un polynôme dans $\mathbf{R}[X]$ tel que $\Delta(P) = 0$. En particulier le polynôme $P - P(0)$ s'annule sur $\mathbf{Z}$ et donc est identiquement nul. Il en résulte que P est constant. Réciproquement si P est un polynôme constant, il est dans le noyau de Δ. Par conséquent le noyau de P est formé des polynômes constants.

La dérivation commutant à la translation, elle commute à Δ. Autrement dit, si P est dans $\mathbf{R}[X]$, on a $(\Delta(P))' = \Delta(P')$.

Question I.2.b

Soit n un entier naturel non nul. On a

$$\Delta(H_n) = \frac{1}{n!}\big((X+1)X\dots(X-n+2) - X(X-1)\dots(X-n+1)\big) = \frac{1}{n!}(X+1-X+n-1)X\dots(X-n+2) = H_{n-1} .$$

Question I.2.c

Remarquons que la suite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de polynômes étagée en degré et forme donc une base de $\mathbf{R}[X]$. Plus précisément, pour tout entier naturel N, $(H_n)_{n\leq N}$ est une base de l'espace E_N des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur à N. Il résulte par linéarité de Δ que, pour N non nul, $\Delta(E_N)$ est égal à E_{N-1}.

Pour n entier naturel, on note (A_n) la propriété : pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ et de degré inférieur ou égal à n, on a

$$P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0)H_k .$$

Les seuls polynômes de degré inférieur à 0 sont les polynômes constants. Si P est un tel polynôme, on a $P = P(0) = P(0)H_0$, ce qui montre que (A_0) est vraie.

Soit maintenant n un entier naturel tel que (A_n) soit vraie et P un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$. Comme $\Delta(P)$ est de degré inférieur à n, il vient

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^{k+1}(P)(0)H_k \qquad \text{ou encore} \qquad \Delta\left(P - \sum_{k=0}^{n} \Delta^{k+1}(P)(0)H_{k+1}\right) = 0\ .$$

Par conséquent le polynôme

$$P - \sum_{k=0}^{n} \Delta^{k+1}(P)(0)H_{k+1}$$

est constant. Sa valeur en 0 étant $P(0)$, il vient

$$P - \sum_{k=0}^{n} \Delta^{k+1}(P)(0)H_{k+1} = P(0) = \Delta^0(P)(0)H_0$$

et donc (A_{n+1}) est vraie. Le principe de récurrence permet de conclure : pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ et de degré inférieur ou égal à n, on a

$$P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0)H_k\ .$$

Question I.2.d

Soit k un entier naturel non nul et i un entier compris entre 0 et $k-1$. On a, d'après I.2.b et I.1.b,

$$\Delta^i(H_k')(0) = \left(\Delta^i(H_k)\right)'(0) = H_{k-i}'(0) = \frac{(-1)^{k-i}}{k-i}$$

et donc, d'après I.2.c et puisque H_k' est de degré $k-1$,

$$H_k' = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1-i}}{k-i} H_i\ .$$

Question I.3

Si (i) est vraie, alors (ii) l'est en prenant x_0 arbitraire.

Si (ii) est vraie, soit x_0 tel que $P(x_0)$, $P(x_0+1)$, …, $P(x_0+n)$ soient tous entiers relatifs. Dans ce cas $P(x_0+X)$ est un polynôme à coefficients entiers, d'après la formule du binôme de Newton, et est à valeurs entières en 0, 1, …, n. Par conséquent $\Delta^0(P)(0)$, $\Delta^1(P)(0)$, …, $\Delta^n(P)(0)$ sont des entiers et la formule I.2.c assure que P est combinaison linéaire entière de H_0, H_1, …, H_n, i.e. (iii) est vraie.

Enfin, si (iii) est vraie, (i) l'est aussi d'après I.1.a.

Il en résulte que les trois conditions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

Partie II

Question II.1

Soit n un entier naturel non nul et a un réel. La fonction $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k H_k(x) - aH_n(x)$ s'annule en n si et seulement si

$$aH_n(n) = f(n) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k H_k(n)$$

ce qui est possible pour exactement un réel a, puisque $H_n(n) = 1$.

Par conséquent on peut définir la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par récurrence ainsi qu'indiqué.

Question II.2

Soit m et n des entiers naturels avec $m \leq n$. D'après I.1.a et la définition de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, il vient

$$f(m) = \sum_{k=0}^{m} a_k H_k(m) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(m)$$

ce qui est la propriété recherchée.

Question II.3

Soit n un entier naturel. On a

$$b^n = (1 + b - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} (b-1)^k C_n^k = \sum_{k=0}^{n} (b-1)^k H_k(n)$$

et donc, par la définition donnée en II.1, la suite associée à la fonction $x \mapsto b^x$ est la suite $((b-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Question II.4.a

Si x est un entier naturel inférieur à n, on a $H_{n+1}(x) = 0$ et donc, d'après II.2,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x) + a.H_{n+1}(x)$$

pour tout réel a. Il en résulte que la formule proposée est valide pour tout réel θ dans le domaine de définition de f.

Question II.4.b

Soit I l'intervalle $[\min(0,x); \max(n,x)]$.

Si maintenant x n'est pas un entier naturel inférieur à n, $H_{n+1}(x)$ n'est pas nul et il existe donc un unique réel A tel que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x) = AH_{n+1}(x)\ .$$

Comme par ailleurs, pour entier naturel m inférieur à n, on a

$$f(m) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(m) = 0 = AH_{n+1}(m)\ ,$$

la fonction g, définie sur I par $g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(t) - AH_{n+1}(t)$, s'annule en les $n+2$ points 0, 1, $\ldots n$ et x.

Comme g est de classe C^∞ sur I, le théorème de Rolle assure que sa dérivée d'ordre $n+1$ s'annule en au moins un point de l'intérieur de I. Notons θ un point intérieur à I tel que $g^{(n+1)}(\theta) = 0$. On a en fait

$$0 = g^{(n+1)}(\theta) = f^{(n+1)}(\theta) - A$$

et donc la fonction

$$t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(t) - H_{n+1}(t) f^{(n+1)}(\theta)$$

s'annule en 0, 1, $\ldots$, n et x.

Il est par contre faux que l'on puisse imposer à θ d'être positif. Prenons en effet d quelconque non nul, x strictement négatif et f la fonction carré. Pour n nul on a $a_0 = 0$ et l'équation requise s'écrit : $x^2 = 2\theta x$, i.e. $\theta = x/2$ ce qui lui impose d'être négatif.

Partie III

Question III.1.a

Soit ρ un nombre réel et n un entier naturel non nul. Puisque H_n ne s'annule que sur les entiers compris entre 0 et $n-1$, t_n est strictement positif. Il en résulte que u_n est bien définie et il vient

$$u_n = \ln\left(\frac{t_{n+1}}{t_n}\right) = \rho \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{|x-n|}{n+1}\right)$$

et donc, au voisinage de l'infini, on a

$$u_n = \frac{\rho}{n} + \ln\left(1-\frac{x+1}{n+1}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\rho - x - 1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

Par le critère de Riemann, la série de terme général u_n est donc convergente si et seulement si ρ est égal à $x+1$. Dans le cas contraire, elle diverge vers $+\infty$ si $\rho > x+1$ et vers $-\infty$ si $\rho < x+1$.

Question III.1.b

Si la série de terme général u_n converge et admet S comme somme, la suite de terme général $\ln(t_n)$ converge vers $\ln(t_1) + S$ et donc, par continuité de l'exponentielle, la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $|x|e^S$. Comme x et e^S sont non nuls, il vient $t_n \sim |x|e^S$ ou encore $|H_n(x)| \sim |x|e^S/n^\rho$.

Par conséquent il existe un réel strictement positif $K(x)$ tel que l'on ait $|H_n(x)| \sim K(x)/n^{x+1}$.

Question III.2.a

Puisque x_0 n'est pas entier, la suite $(\lambda_n(x))_{n\geq b}$ est bien définie. De plus si x est entier naturel, c'est la suite nulle. Elle est donc monotone et converge vers 0.

On suppose maintenant que x n'est pas un entier naturel. Pour n entier naturel supérieur à b, $H_n(x)$ est donc non nul et on a

$$\frac{\lambda_{n+1}(x)}{\lambda_n(x)} = \frac{x-n}{x_0-n} = \frac{n-x}{n-x_0}$$

ce qui est une quantité strictement positive et strictement inférieure à 1 puisque $n \geq b > x > x_0$.

La suite $(\lambda_n(x))_{n\geq b}$ est donc de signe constant et elle est monotone si et seulement si la suite de ses valeurs absolues l'est. Or le calcul précédent prouve que cette dernière suite est décroissante.

Par ailleurs, pour n entier naturel supérieur à b, on a, au voisinage de l'infini,

$$\ln(|\lambda_{n+1}(x)|) - \ln(|\lambda_n(x)|) = \ln\left(\frac{n-x}{n-x_0}\right) = \ln\left(1-\frac{x-x_0}{n-x_0}\right) = -\frac{x-x_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc la série de terme général $\ln(|\lambda_{n+1}(x)|) - \ln(|\lambda_n(x)|)$ diverge vers $-\infty$. Par conséquent la suite de terme général $\ln(|\lambda_n(x)|)$ diverge aussi vers $-\infty$, ce qui entraîne, par passage à la limite dans l'exponentielle, que la suite de terme général $|\lambda_n(x)|$ tend vers 0. Il en est donc de même pour la suite sans les valeurs absolues.

En résumé, la suite $(\lambda_n(x))_{n\geq b}$ est monotone et tend vers 0.

Question III.2.b

Soit x dans $]x_0; b]$ et n un entier naturel supérieur à b. Puisque la suite $(|\lambda_n(x)|)_{n\geq b}$ est décroissante, on a $|H_n(x)| \leq |\lambda_b(x)|.|H_n(x_0)|$. Cette inégalité est encore vraie en x_0 puisque $\lambda_b(x_0) = 1$.

Comme la fonction λ_b est continue sur $[x_0; b]$, elle y est bornée. Notons Λ une telle borne. Il vient

$$\forall x \in [x_0; b] \quad \forall n \in \mathbf{N} \qquad n \geq b \Rightarrow |H_n(x)| \leq \Lambda |H_n(x_0)| .$$

Question III.2.c

D'après ce qui précède, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n H_n(x_0)$ converge absolument, la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n H_n(x)$ converge normalement sur $[x_0; b]$ pour tout entier b strictement supérieur à $|x_0|$. Il en résulte que cette série de fonctions converge normalement sur tout compact de $[x_0, +\infty[$.

Partie IV

Question IV.1.a

D'après III.1.b et le critère de Riemann, pour x non entier naturel, φ est définie par une série absolument convergente si et seulement si $x+1$ est strictement supérieur à 1. Si x est entier naturel, $H_n(x)$ est identiquement nul à partir d'un certain rang. Il en résulte que φ est définie par une série absolument convergente si et seulement si x est un réel positif ou nul.

Question IV.1.b

D'après III.1.b la série définissant φ est grossièrement divergente si $x \leq -1$.

Soit maintenant x un réel compris strictement entre -1 et 0. La suite $(H_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est alors alternée, décroissante en valeur absolue et de limite nulle. La règle d'Abel permet alors de conclure que $\varphi(x)$ est semi-convergente. Par conséquent φ est définie sur $]-1;+\infty[$.

Question IV.1.c

Remarque : il y a une bavure sur le sujet. Il faut lire $\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)$ et non l'opposé.

D'après II.3 appliqué à $b=2$, si x est entier naturel, on a

$$2^x = \sum_{n=0}^{x} H_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)$$

puisque $H_n(x) = 0$ pour $n > x$.

Soit maintenant x un réel strictement supérieur à -1 et non entier. D'après II.4 appliqué à la fonction, définie sur $]-1;+\infty[$, $x \mapsto 2^x$ et en se servant du résultat de II.3 appliqué à $b=2$,

$$\forall x \in]-1;+\infty[\quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \exists \theta \in]-1;+\infty[\qquad 2^x - \sum_{k=0}^{n} H_k(x) = H_{n+1}(x)\,(\log 2)^{n+1}\, 2^\theta$$

et cette dernière quantité est du signe de $H_{n+1}(x)$. Il en résulte que, lorsque n est supérieur à x, la quantité $\sum_{k=0}^{n} H_k(x)$ oscille de part et d'autre de 2^x selon la parité de n. Soit donc k l'entier naturel tel que $k-1 < x < k$. Pour n supérieur à k, $H_n(x)$ est du signe de $(-1)^{n-k}$ et il vient

$$\forall x \in]-1;+\infty[\quad \forall p \in \mathbf{N} \qquad \sum_{n=0}^{k+2p+1} H_n(x) \leq 2^x \leq \sum_{n=0}^{k+2p} H_n(x)\ .$$

Puisque les sommes partielles de la série donnant φ convergent vers φ, le théorème d'encadrement des limites assure

$$\forall x \in]-1;+\infty[\qquad \varphi(x) = 2^x\ .$$

Question IV.2

Soit x dans $[0,1/2]$ et n un entier naturel non nul. Les termes intervenant dans le rapport définissant $\lambda_n(x)$ sont tous négatifs sauf x. Il en résulte que $\lambda_n(x)$ est strictement négatif si x est non nul et nul si x l'est.

Pour n entier naturel et x dans $[0;1/2]$, on pose $r_n = -H_n(1/2)$ et $V_n(x) = -\lambda_n(x)$ et on va vérifier que ces deux suites satisfont aux hypothèses du théorème (T) au moins à partir du rang 1, pour l'intervalle I donné par $I = [0;1/2]$.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$ est convergente d'après IV.1.a. Les applications $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont définies sur l'intervalle I et pour x dans I la suite $(V_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est positive (d'après ce qui précède), monotone et tend vers 0 (d'après III.2.a), c'est donc qu'elle décroît vers 0. Enfin par positivité et décroissance, on a

$$\forall x \in I \quad \forall n \in \mathbf{N} \qquad 0 \leq V_n(x) \leq V_1(x) = 2x \leq 1$$

et donc toutes les hypothèses du théorème (T) sont satisfaites. Il en résulte que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n V_n$ est uniformément convergente sur I, ce qui revient à écrire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} H_n$ est uniformément convergente sur $[0;1/2]$.

D'après III.2, on déduit de la convergence absolue de $\varphi(1/2)$, la convergence absolue sur tout compact de $[1/2;+\infty[$. Les deux résultats entraînent que φ est absolument convergente sur la réunion des deux intervalles considérés, i.e. sur $\mathbf{R}_+$.

Question IV.3.a

Soit x un réel fixé. Comme $\psi(x)$ est une série à termes de signe constant à partir d'un certain rang, elle converge si et seulement si elle est absolument convergente, i.e. si et seulement si φ l'est et donc, d'après IV.1.a, ψ est absolument convergente si et seulement si x est un réel positif ou nul.

Question IV.3.b

Soit x un réel et n un entier naturel non nul. D'après I.2.b, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k H_k(x) &= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\Delta(H_k)(x-1)+H_k(x-1)\right)=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(H_{k-1}(x-1)+H_k(x-1)\right)\\ &= 1+(-1)^1H_0(x-1)+(-1)^nH_n(x-1)=(-1)^nH_n(x-1)\end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché.

Question IV.3.c

D'après III.1.b, pour x réel strictement positif, la suite $(H_n(x-1))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 et donc $\psi(x)$ est nul.

Par ailleurs $\psi(0)=1$ puisque $H_n(0)$ est nul pour tout entier naturel non nul n.

Question IV.3.d

Si la convergence de ψ était uniforme sur un compact de $\mathbf{R}_+$ contenant 0, ψ y serait continue en tant que limite uniforme de fonctions continues. Comme ce n'est pas le cas, c'est que la convergence n'est pas uniforme sur les compacts contenant 0, a fortiori sur tout compact de $\mathbf{R}_+$.

Partie V

Question V.1.a

Le logarithme est défini sur $\mathbf{R}_+^*$ et ne s'annule qu'en 1. Il en résulte que Dp est égal à $]-1;+\infty[$ privé de 0. Sur ce domaine p est de classe C^∞.

En 0, p est prolongeable par continuité par la valeur 1, puisque $\ln(1+x)\simeq x$ au voisinage de 0. Par ailleurs en -1 à droite, p tend 0 et donc on peut l'y prolonger par continuité.

Question V.1.b

Comme $1/p$ est développable en série entière en 0, avec un rayon égal à 1, et ne s'annule pas, p est de classe C^∞ sur $]-1;1[$ et donc sur $]-1;+\infty[$.

Par contre, pour h réel strictement positif, on a

$$\frac{p(-1+h)-p(-1)}{h}=\frac{-1+h}{h\ln(h)}$$

et donc, par croissance comparée du logarithme et des polynômes, p n'est pas dérivable en -1 : son graphe y admet une demi-tangente verticale.

Question V.1.c

Comme, pour x dans $]-1;+\infty[$, $1/p(x)$ représente le taux d'accroissement du logarithme entre 1 et x, par concavité du logarithme, $1/p$ est décroissante et, par croissance du logarithme, $1/p$ est positive. Il en résulte que p est positive et croissante.

Question V.2.a

Puisque p n'est pas dérivable en -1, elle n'y est pas développable en série entière. Par conséquent le rayon de convergence du développement en série entière de p en 0 ne saurait être supérieur à 1, i.e. $R \leq 1$.

Question V.2.b

Pour tout réel x dans $]-R;R[$, on a $\ln(1+x)p(x) = x$. Comme toutes les fonctions considérées sont développables en série entière sur $]-R;R[$, on peut identifier le produit de Cauchy des développements de $x \mapsto \ln(1+x)$ et p avec celui de l'identité. Il vient $\alpha_0 = 1$ et, en considérant le coefficient de x^{k+1},

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \qquad \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{k+1-i} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = 0$$

ou encore

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \qquad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \frac{(-1)^{k-i}}{k+1-i} = 0 \ .$$

En particulier $-\alpha_0/2 + \alpha_1 = 0$ et $\alpha_0/3 - \alpha_1/2 + \alpha_2 = 0$ et donc $\alpha_1 = 1/2$ et $\alpha_2 = -1/12$.

Remarque : on obtient le résultat sur une Ti-89 avec la commande `taylor(x/ln(1+x),x,2,0)`. On notera qu'il y a un rapport avec les nombres de Bernoulli puisque $p(x).f(\ln(1+x)) = 1$ où f est la fonction $y \mapsto y/(e^y - 1)$.

Question V.2.c

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On applique la relation précédente pour k et $k-1$ et il vient

$$0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \frac{(-1)^{k-i}}{k+1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \frac{(-1)^{k-1-i}}{k-i} = \alpha_k + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} \alpha_i \left(\frac{1}{k+1-i} - \frac{1}{k-i} \right)$$

et la relation cherchée en découle.

Pour n entier naturel, soit (A_n) la propriété : pour tout entier naturel i inférieur à n, $|\alpha_i| \leq 1$.

Puisque $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 1/2$, (H_0) et (H_1) sont vraies. Soit maintenant n un entier naturel non nul pour lequel (A_n) est vraie. On a alors

$$|\alpha_{n+1}| \leq \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{n+1-i} - \frac{1}{n+2-i} \right) = 1 - \frac{1}{n+2} \leq 1$$

et donc (H_{n+1}) est vraie. Le principe de récurrence permet de conclure que, pour tout entier naturel n, $|\alpha_n|$ est inférieur à 1 et donc la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Comme la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, la série donnant p converge pour tout réel x tel que $|x| < 1$. Le rayon de convergence R est donc exactement égal à 1.

Question V.3.a

Soit k un entier naturel, d'après I.2.d et V.2.b, on a

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{k+1-i} H_i' = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^{i-j-1}}{i-j} \alpha_{k+1-i} H_j = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=j+1}^{k+1} \frac{(-1)^{i-j-1}}{i-j} \alpha_{k+1-i} H_j = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(-1)^{k-i-j}}{k+1-i-j} \alpha_i H_j = \alpha_0 H_k = H_k$$

ce qui est la relation cherchée.

Question V.3.b

Soit x un réel positif ou nul. Puisque φ est donnée par une série uniformément convergente sur $[0; x]$, on a

$$\frac{2^x - 1}{\ln(2)} = \int_0^x 2^t dt = \int_0^x \varphi(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x H_n(t) dt \; .$$

Par ailleurs, la formule précédente donne, par intégration

$$\int_0^x H_n(t) dt = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{k+1-i} (H_i(x) - H_i(0)) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{k+1-i} H_i(x)$$

et la formule en découle :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \qquad \frac{2^x - 1}{\ln(2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{k+1-i} H_i(x) \right) \; .$$

Question V.3.c

Je ne vois pas comment justifier a priori l'échange des signes somme. Il suffirait d'avoir une convergence absolue, car dans ce cas la série serait commutativement convergente. Voici une solution ad hoc.

En appliquant la formule du V.3.b en $x = 1$, on obtient, puisque $H_1(1) = 1$ et $H_i(1)$ est nul pour les entiers i strictement supérieurs à 1,

$$p(1) = \frac{1}{\ln(2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k$$

En particulier la série considérée est convergente !

Considérons maintenant la série avec les signes somme inversés. Autrement dit

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=i-1}^{+\infty} \alpha_{k+1-i} H_i(x) \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k H_i(x) \; .$$

Comme la série intérieure est convergente de somme $H_i(x)/\ln(2)$, la série double est convergente, d'après IV.1.a, et sa somme est $(\varphi(x) - 1)/\ln(2)$ c'est-à-dire la même somme que celle trouvée en V.3.b.

Remarque : il me semble que la convergence absolue de la série double nécessite celle de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k$. Or celle-ci ne peut converger absolument, sinon la série entière définissant p aurait un rayon de convergence supérieur à 1.

Question V.3.d

Pour tout entier naturel k non nul, on a, d'après V.3.a et I.1.b,

$$(-1)^{k+1} \int_0^{-1} H_k(t)dt = \int_0^{-1} \sum_{i=1}^{k+1-i} (-1)^{k+1} \alpha_{k+1-i} H_i'(t)dt = \sum_{i=1}^{k+1-i} (-1)^{k+1} \alpha_{k+1-i}(-1)^i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \alpha_j$$

et donc, par changement variable $u = -t$, il vient

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \alpha_j = (-1)^{k+1} \int_0^{-1} H_k(t)dt = \int_0^1 (-1)^k H_k(-u)du = \frac{1}{k!} \int_0^1 u(u+1)\dots(u+k-1)du$$

ce qui est la formule demandée. Notons en particulier que les membres de ces égalités sont des quantités positives.

Soit k un entier naturel non nul et u un réel compris entre 0 et 1. On note h_k la somme partielle d'ordre k de la série harmonique, i.e. $h_k = 1 + 1/2 + \dots + 1/k$. D'après l'inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique, il vient

$$\frac{u}{1} \frac{u+1}{2} \dots \frac{u+k-1}{k} \leq \left(\frac{1}{k} \left(u + \frac{u+1}{2} + \dots + \frac{u+k-1}{k} \right) \right)^k = \left(1 + \frac{h_k}{k}(u-1) \right)^k$$

et donc

$$0 \leq \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \alpha_j = \frac{1}{k+1} \frac{k}{h_k} \left[\left(1 + \frac{h_k}{k}(u-1) \right)^{k+1} \right]_0^1 \leq \frac{k}{(k+1)h_k}$$

et donc, puisque la série harmonique diverge, le théorème d'encadrement des limites assure

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \alpha_j = 0 \ .$$