

# Première épreuve CAPES Agricole 1996

François Sauvageot

20 septembre 2003

## Partie Préliminaires

### Question P.1.a

**Par convexité** La fonction racine carrée est strictement concave sur  $\mathbf{R}_+^*$  et donc la pente de la droite joignant  $(a^2, \sqrt{a^2})$  à  $(a^2 + 1, \sqrt{a^2 + 1})$  est strictement inférieure à la pente de la dérivée en  $a^2$ . Autrement dit

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{a^2}}{a^2 + 1 - a^2} = \sqrt{a^2 + 1} - a < \frac{1}{2\sqrt{a^2}} = \frac{1}{2a}.$$

**Par la Formule de Taylor** L'inégalité de concavité précédente peut être vue comme un produit dérivé de la Formule de Taylor-Lagrange. Notons  $f$  la fonction racine carrée. Puisque  $f$  est de deux fois dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$ , on a

$$\exists c \in ]a^2; a^2 + 1[ \quad f(a^2 + 1) = f(a^2) + f'(a^2) + \frac{1}{2}f''(c)$$

et donc la stricte négativité du dernier terme entraîne

$$\sqrt{a^2 + 1} < \sqrt{a^2} + \frac{1}{2\sqrt{a^2}} = a + \frac{1}{2a}.$$

En fait racine carrée est trois fois dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$ , de dérivée troisième strictement positive et il vient

$$\exists c \in ]a^2; a^2 + 1[ \quad f(a^2 + 1) = f(a^2) + f'(a^2) + \frac{1}{2}f''(a^2) + \frac{1}{6}f'''(c)$$

et donc

$$\sqrt{a^2 + 1} > \sqrt{a^2} + \frac{1}{2\sqrt{a^2}} - \frac{1}{8\sqrt{a^6}} = a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3}.$$

**Par manipulation algébrique** En multipliant par la quantité  $\sqrt{a^2 + 1} + a$ , dite quantité conjuguée, on remarque

$$\sqrt{a^2 + 1} - a = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1} + a}$$

et, comme  $\sqrt{a^2 + 1} > a$ , il vient

$$\sqrt{a^2 + 1} - a < \frac{1}{2a}.$$

De même

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + 1} - a - \frac{1}{2a} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1} + a} - \frac{1}{2a} \\ &= \frac{a - \sqrt{a^2 + 1}}{2a(a + \sqrt{a^2 + 1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+1} - a - \frac{1}{2a} &= -\frac{1}{2a(a+\sqrt{a^2+1})^2} \\ &> -\frac{1}{2a(2a)^2} \\ &> -\frac{1}{8a^3}\end{aligned}$$

**Par élimination des radicaux** On a

$$\forall a \in \mathbf{R}_+^* \quad a + \frac{1}{2a} = \frac{2a^2+1}{2a} \quad \text{et} \quad a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} = \frac{8a^4+4a^2-1}{8a^3}.$$

Comme  $\sqrt{a^2+1}$ ,  $2a^2+1$  et  $2a$  sont des quantités (strictement) positives sur  $\mathbf{R}_+^*$ , on a

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+1} < a + \frac{1}{2a} &\Leftrightarrow a^2+1 < \frac{(2a^2+1)^2}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow 4a^2(a^2+1) < (2a^2+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 4a^4+4a^2 < 4a^4+4a^2+1\end{aligned}$$

et l'inégalité de droite en découle. Pour celle de gauche, on remarque

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+1} > \left| a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} \right| &\Leftrightarrow a^2+1 > \frac{(8a^4+4a^2-1)^2}{64a^6} \\ &\Leftrightarrow 64a^8+64a^6 > 64a^6+64a^6-8a^2+1 \\ &\Leftrightarrow 8a^2 > 1.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour  $a$  entier naturel non nul

$$\sqrt{a^2+1} > \left| a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} \right| \geq a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3}.$$

Remarque : on peut obtenir ces résultats par le calcul formel en évaluant  $(a+1/2a)^2 - (a^2+1)$  et  $(a+1/2a-1/8a^3)^2 - (a^2+1)$  sous forme de fraction rationnelle.

**Par étude de fonction** C'est la méthode où on réfléchit le moins mais aussi celle où ne comprend pas pourquoi ça marche. En particulier quand on n'a pas de chance dans les calculs ou dans les choix de fonctions à étudier, ça devient très compliqué et on perd confiance. Si on étudie la fonction  $x \rightarrow \sqrt{a^2+x}$ , on retombe rapidement sur la formule de Taylor et tout va bien en faisant  $x=1$ . Si on réfléchit moins, on pose  $f(x) = x + 1/2x - \sqrt{x^2+1}$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ , qui est de classe  $C^\infty$ . On obtient (à la main ou avec une calculatrice)

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}^3 - x^3}{x^3\sqrt{x^2+1}^3} > 0$$

et donc  $f'$  est croissante. Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = 0$$

$f'$  est négative sur  $\mathbf{R}_+^*$ . Pour conclure on est donc obligé de trouver un équivalent de  $f$  en l'infini. On peut employer pour cela un développement asymptotique et le calcul utilisera le développement limité de  $y \rightarrow \sqrt{1+y}$  au voisinage de 0 :

$$f(x) = x \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) + \frac{1}{2x} = x \left( 1 - \left( 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) \right) + \frac{1}{2x} = \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Par conséquent  $f$  est strictement positive au voisinage de l'infini. Comme elle est décroissante, elle est donc strictement positive sur tout  $\mathbf{R}_+^*$ .

**Question P.1.b**

Pour tout entier naturel  $k$  distinct de  $a$ , on a

$$|\sqrt{a^2 + 1} - a| = \sqrt{a^2 + 1} - a < \frac{1}{2a} \leq \frac{1}{2}$$

et

$$|\sqrt{a^2 + 1} - k| = |a - k + \sqrt{a^2 + 1} - a| \geq |a - k| - |\sqrt{a^2 + 1} - a| \geq 1 - |\sqrt{a^2 + 1} - a| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

d'où

$$|\sqrt{a^2 + 1} - a| < |\sqrt{a^2 + 1} - k| .$$

**Question P.2**

Prenons  $a = 25$ , on a  $8a^3 = (50)^3 = 1.25 \cdot 10^5 > 10^5$  et donc

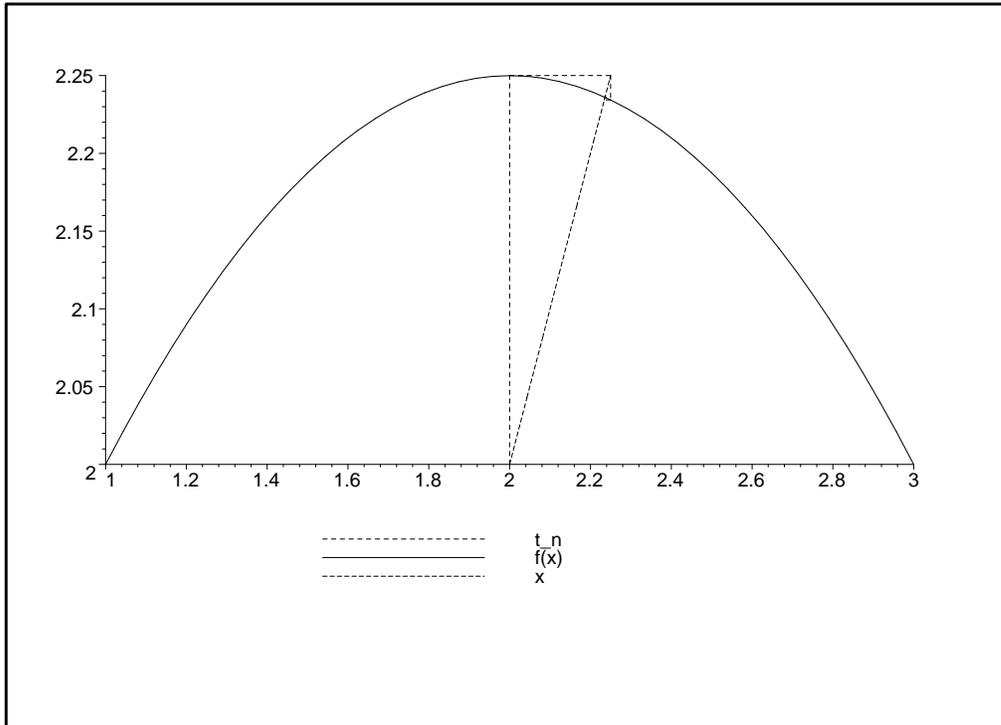
$$25.02 - 10^{-5} < a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} < \sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{626} < a + \frac{1}{2a} = 25.02 .$$

Il en résulte que 25.02 est une valeur décimale approchée de  $\sqrt{626}$  à  $10^{-5}$  par excès. On trouve sur une calculatrice  $\sqrt{626} \simeq 25.0199920$ , ce qui est cohérent.

**Partie I - Méthode de PADÉ**

**Question I.A.1**

Soit  $f$  la fonction, définie sur  $\mathbf{R}$ , par  $f(x) = x + (1 + a^2 - x^2)/2a$ . La suite  $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est donc la suite récurrente associée à  $f$  et de terme initial  $a$ .



On part de  $(a, a)$  puis on projette successivement verticalement sur le graphe de  $f$ , puis horizontalement sur la première bissectrice. Les abscisses des points sur la première bissectrice sont les valeurs successives de  $t_n$ .

**Question I.A.2.a**

La fonction  $f$  définie précédemment est une fonction polynôme à coefficients rationnels et donc  $f(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}$ . Par propriété des trinômes du second degré, le maximum de  $f$  est atteint en  $a$  et elle est donc décroissante sur  $[a; +\infty[$ . En particulier, par continuité et décroissance de  $f$ ,

$$f\left(\left[a; a + \frac{1}{2a}\right]\right) = \left[f\left(a + \frac{1}{2a}\right); f(a)\right] = \left[a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3}; a + \frac{1}{2a}\right] \subset \left[a; a + \frac{1}{2a}\right]$$

et donc  $f$  préserve l'intervalle  $[a; a + 1/2a]$ .

Il en résulte

$$f\left(\left[a; a + \frac{1}{2a}\right] \cap \mathbf{Q}\right) \subset \left[a; a + \frac{1}{2a}\right] \cap \mathbf{Q}.$$

On conclut par récurrence. Notons  $X$  l'ensemble  $[a; a + 1/2a] \cap \mathbf{Q}$ ; en particulier la propriété précédente s'écrit  $f(X) \subset X$ . Pour  $n$  entier naturel, notons  $(H_n)$  la propriété  $t_n \in X$ . Comme  $t_0 = a$  et  $a$  est un entier,  $(H_0)$  est vraie. Montrons maintenant que la propriété est héréditaire. Soit  $n$  un entier naturel tel que  $t_n \in X$ . On a alors  $t_{n+1} = f(t_n) \in f(X) \subset X$  et donc  $t_{n+1} \in X$ . D'après le principe de récurrence on conclut

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad t_n \in X$$

ou encore, pour tout entier naturel  $n$ ,  $t_n$  est un rationnel appartenant à  $[a; a + 1/2a]$ .

**Question I.A.2.b**

On note toujours  $f$  la fonction précédente. Puisque c'est une fonction polynôme, elle est continue et toute limite d'une suite récurrente associée à  $f$  est un point fixe de  $f$ . Or

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = a^2 + 1 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{a^2 + 1}.$$

De plus la suite  $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est à valeurs dans l'intervalle fermé  $[a; a + 1/2a]$  et donc sa limite, si elle existe, appartient aussi à ce fermé. En particulier cette hypothétique limite est strictement positive. Comme l'unique point fixe de  $f$  strictement positif est  $\sqrt{a^2 + 1}$ , c'est l'unique limite possible pour la suite  $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**Question I.A.3.a**

Soit  $n$  un entier naturel. On a

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= |t_{n+1} - \sqrt{a^2 + 1}| \\ &= |f(t_n) - f(\sqrt{a^2 + 1})| \\ &= \left| (t_n - \sqrt{a^2 + 1}) \left(1 - \frac{t_n + \sqrt{a^2 + 1}}{2a}\right) \right| \\ &= e_n \left( \frac{t_n + \sqrt{a^2 + 1}}{2a} - 1 \right) \end{aligned}$$

puisque  $\sqrt{a^2 + 1}$  et  $t_n$  sont supérieurs à  $a$  et donc  $(t_n + \sqrt{a^2 + 1})/2a - 1$  est positif.

**Question I.A.3.b**

Pour  $n$  un entier naturel, on note  $(H_n)$  la propriété  $ar^{n+1}/2^n \leq e_n \leq (2a^2)^{-n}/2a$ . La propriété  $(H_0)$  s'écrit

$$ar = \sqrt{a^2 + 1} - a \leq e_0 = |a - \sqrt{a^2 + 1}| \leq \frac{1}{2a}.$$

Puisque  $\sqrt{a^2 + 1} - a$  est positif,  $(H_0)$  résulte de P.1.a.

Montrons maintenant que la propriété  $(H_n)$  est héréditaire. Pour cela prenons  $n$  un entier naturel tel que  $(H_n)$  soit vraie. On a

$$\frac{t_n + \sqrt{a^2 + 1}}{2a} - 1 = \frac{(t_n - a) + (\sqrt{a^2 + 1} - a)}{2a}.$$

Or  $0 \leq t_n - a \leq 1/2a$  d'après I.A.2.a, et  $\sqrt{a^2 + 1} - a \leq 1/2a$ , d'après P.1.a. Il vient

$$\frac{r}{2} \leq \frac{t_n + \sqrt{a^2 + 1}}{2a} - 1 \leq \frac{1}{2a^2}.$$

Par conséquent  $(H_n)$  et I.A.3.a entraînent

$$a \frac{r^{n+2}}{2^{n+1}} \leq \frac{r}{2} e_n \leq e_n \left( \frac{t_n + \sqrt{a^2 + 1}}{2a} - 1 \right) = e_{n+1} \leq \frac{1}{2a^2} e_n \leq \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{2a^2} \right)^{n+1}$$

et donc  $(H_{n+1})$  est vraie. D'après le principe de récurrence on en déduit

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad a \frac{r^{n+1}}{2^n} \leq e_n \leq \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{2a^2} \right)^n.$$

### Question I.A.3.c

Il résulte de la question précédente que  $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite positive majorée par une suite géométrique de raison inférieure à  $1/2$ . Elle converge donc vers 0, ce qui exprime que la suite  $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\sqrt{a^2 + 1}$ .

### Question I.A.4.a

On a déjà remarqué que  $f$  est décroissante sur  $[a; a + 1/2a]$ . Il en résulte que les suites  $(t_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(t_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  sont monotones de monotonies contraires. Elles convergent vers  $\sqrt{a^2 + 1}$  puisque ce sont des suites extraites de la suite  $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . Comme  $t_0 = a$ , on a  $t_0 \leq \sqrt{a^2 + 1}$  et donc la suite  $(t_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  est croissante. La suite  $(t_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  est par conséquent décroissante. On a donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad t_{2n} \leq \sqrt{a^2 + 1} \leq t_{2n+1}$$

et ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad t_n - \sqrt{a^2 + 1} = (-1)^{n+1} e_n.$$

Ainsi, d'après I.A.3.a, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$e_{n+1} = e_n \frac{\sqrt{a^2 + 1} + t_n - 2a}{2a} = e_n \frac{2(\sqrt{a^2 + 1} - a) + t_n - \sqrt{a^2 + 1}}{2a} = e_n \frac{2ar + (-1)^{n+1} e_n}{2a} = r e_n \left( 1 + (-1)^{n+1} \frac{e_n}{2ar} \right).$$

### Question I.A.4.b

On en déduit

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{e_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{e_n}{r^n} \left( 1 + (-1)^{n+1} \frac{e_n}{2ar} \right)$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \frac{e_n}{r^n} = e_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left( 1 + (-1)^{k+1} \frac{e_k}{2ar} \right).$$

Posons, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\lambda_n = \prod_{k=0}^n \left( 1 + (-1)^{k+1} \frac{e_k}{2ar} \right).$$

Remarquons que, pour tout entier naturel  $n$ , par stricte positivité de  $e_{n+1}/re_n$ , la quantité  $1 + (-1)^{n+1}e_n/2ar$  est strictement positive. On peut donc écrire

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \mu_k = \log \left( 1 + (-1)^{k+1} \frac{e_k}{2ar} \right) \quad \text{et} \quad \log(\lambda_n) = \sum_{k=0}^n \mu_k .$$

Comme  $e_0 < 1/2a$ , il suffit, pour démontrer l'assertion demandé, par continuité de l'exponentielle, que la série précédente est convergente et converge vers un réel  $\ell$  inférieur à  $1/2r(2a^2 - 1)$ . En effet la suite  $(e_0\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est alors convergente de limite  $\lambda = e_0e^\ell$  et on a  $0 < \lambda \leq e_0 \exp(1/2r(2a^2 - 1)) < \exp(1/2r(2a^2 - 1))/2a$  et  $e_n \sim \lambda r^n$ .

Montrons d'abord que la série  $\sum \mu_k$  est absolument convergente. Rappelons d'abord que, par concavité du logarithme, pour  $x > -1$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ . Aussi pour tout entier naturel  $n$

$$0 \leq \mu_{2n+1} \leq \frac{e_{2n+1}}{2ar} \leq \frac{1}{4a^2r} \left( \frac{1}{2a^2} \right)^{2n+1}$$

et

$$0 \leq -\mu_{2n} = \log \left( \frac{1}{1 - \frac{e_{2n}}{2ar}} \right) = \log \left( 1 + \frac{\frac{e_{2n}}{2ar}}{1 - \frac{e_{2n}}{2ar}} \right) \leq \frac{\frac{e_{2n}}{2ar}}{1 - \frac{e_{2n}}{2ar}} \leq \frac{\frac{1}{4a^2r} \left( \frac{1}{2a^2} \right)^{2n}}{1 - \frac{1}{4a^2r} \frac{1}{2a^2}}$$

et donc, par comparaison avec une série géométrique, la série  $\sum \mu_k$  est absolument convergente. De plus

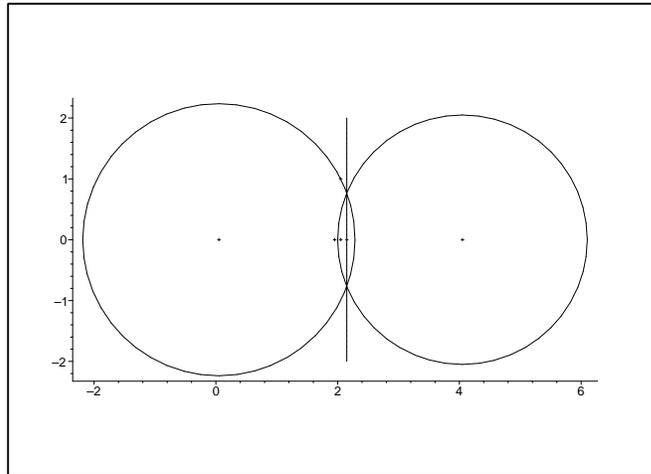
$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \mu_k \leq \log \left( 1 + \frac{e_k}{2ar} \right) \leq \frac{1}{4a^2r} \left( \frac{1}{2a^2} \right)^k$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mu_k \leq \frac{1}{4a^2r} \frac{1}{1 - \frac{1}{2a^2}} = \frac{1}{2r(2a^2 - 1)} ,$$

ce qui achève de prouver l'assertion.

**Question I.B.1**



Notons  $R_1$  et  $R_2$  les rayons respectifs des cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$ , et  $d$  la distance entre leurs centres. On a  $R_1 = O_1A = t$ ,  $R_2 = O_2L = \sqrt{a^2 + 1}$  et  $d = O_1O_2 = 2a$ . Comme  $R_1$  et  $R_2$  sont deux réels de l'intervalle  $[a; a + 1/2a]$ , leur distance est inférieure à la longueur de cet intervalle. Il vient  $|R_2 - R_1| \leq 1/2a < 1 < 2a = d$ . De plus  $R_1 + R_2 - d = \sqrt{a^2 + 1} - a + t - a > 0$  et donc

$$|R_2 - R_1| \leq d \leq R_1 + R_2 .$$

Par conséquent les cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$  sont strictement sécants, i.e. sécants en deux points distincts.

**Question I.B.2**

Puisque l'axe des abscisses est la droite des centres des cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$ , leurs deux points d'intersection sont symétriques par rapport à cet axe. Aussi le point  $P$  est-il bien défini.

Notons  $I$  un des points d'intersection. Comme le triangle  $(O_1PI)$  est rectangle en  $P$ , on a  $O_1P^2 + PI^2 = O_1I^2 = R_1^2$ . De même, dans  $(O_2PI)$ , on obtient  $O_2P^2 + PI^2 = R_2^2$ . Comme  $P$  est sur le segment  $[O_1O_2]$ , on a également  $O_2P = O_1O_2 - O_1P = d - O_1P$  et il vient  $(d - O_1P)^2 + PI^2 = R_2^2$ . En prenant la différence avec la première relation trouvée, on obtient  $2dO_1P - d^2 = R_1^2 - R_2^2$  et donc  $O_1P = (R_1^2 - R_2^2 + d^2)/2d$ . Toujours puisque  $P$  est sur le segment  $[O_1O_2]$ , l'abscisse de  $P$  est  $t + a - (t^2 - a^2 - 1 + 4a^2)/4a$  ou encore  $t - (t^2 - a^2 - 1)/4a$ . Celle de  $N$  est donc deux fois celle de  $P$  moins celle de  $M$  ou encore

$$t' = 2t - \frac{t^2 - a^2 - 1}{2a} - t = t + \frac{1 + a^2 - t^2}{2a} .$$

**Partie II - Méthode des moyennes arithmético-harmoniques**

**Question II.1.a**

Pour  $n$  entier naturel, notons  $(H_n)$  la propriété

$$\exists! ((u_k)_{0 \leq k \leq n}, (v_k)_{0 \leq k \leq n}) \in (\mathbf{Q}_+^*)^{n+1} \times (\mathbf{Q}_+^*)^{n+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = a, \quad v_0 = a + \frac{1}{a} \\ \forall k \in \mathbf{N} \quad k \leq n - 1 \Rightarrow \left( \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \right) . \end{array} \right.$$

La propriété  $(H_0)$  s'écrit

$$\exists!(u_0, v_0) \in \mathbf{Q}_+^* \times \mathbf{Q}_+^* \quad u_0 = a, \quad v_0 = a + \frac{1}{a} .$$

Ce qui est vrai puisque  $a$  et  $a + 1/a$  sont deux rationnels strictement positifs.

Soit maintenant  $n$  un entier naturel pour lequel  $(H_n)$  est vraie. Prenons  $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$  et  $(v_k)_{0 \leq k \leq n}$  vérifiant les propriétés exigées par  $(H_n)$ . En particulier  $u_n$  et  $v_n$  sont des rationnels strictement positifs. Par conséquent  $(u_n + v_n)/2$  aussi et, de plus,  $1/u_n$  et  $1/v_n$  sont bien définis et sont des rationnels strictement positifs. Il en est de même pour  $(1/u_n + 1/v_n)/2$  et donc son inverse est bien défini et est un rationnel strictement positif. Aussi si on pose

$$u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

les deux  $(n+2)$ -uplets  $(u_k)_{0 \leq k \leq n+1}$  et  $(v_k)_{0 \leq k \leq n+1}$  satisfont aux propriétés exigées par  $(H_{n+1})$ , ce qui prouve que la propriété  $(H_n)$  est héréditaire.

D'après le principe de récurrence la propriété  $(H_n)$  est vraie pour tout entier  $n$ . Ceci entraîne que les relations de l'énoncé définissent (de façon unique) deux suites de rationnels strictement positifs.

**Question II.1.b**

D'une façon générale la moyenne  $M_k$  d'ordre  $k$  de réels strictement positifs  $(x_1, \dots, x_n)$  est une fonction croissante du réel  $k$  où on pose

$$M_0(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \quad \text{et, pour } k \text{ non nul} \quad M_k(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{x_1^k + \dots + x_n^k}{n} \right)^{1/k} .$$

Pour  $k = 1$  on trouve la moyenne arithmétique et pour  $k = -1$  c'est la moyenne harmonique. Ainsi la moyenne harmonique de deux nombres réels strictement positifs est inférieure à leur moyenne arithmétique, l'égalité n'ayant lieu que si ces deux nombres sont égaux. Démontrons ce point : on a

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2 \quad M_{-1}(x, y) = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x + y} \quad \text{et} \quad M_1(x, y) = \frac{x + y}{2}$$

et donc

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2 \quad M_{-1}(x, y) \leq M_1(x, y) \Leftrightarrow 4xy \leq (x + y)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x - y)^2$$

avec égalité si et seulement si  $x = y$ .

Montrons également que l'on a affaire à des moyennes, à savoir :

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2 \quad \inf(x, y) \leq M_{-1}(x, y) \leq M_1(x, y) \leq \sup(x, y) .$$

Pour  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs, on a

$$\begin{aligned} \inf(x, y) \leq M_{-1}(x, y) &\Leftrightarrow \inf(x, y)(x + y) \leq 2xy \Leftrightarrow \inf(x, y) (\inf(x, y) + \sup(x, y)) \leq 2 \inf(x, y) \sup(x, y) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \inf(x, y) (\sup(x, y) - \inf(x, y)) \end{aligned}$$

et

$$M_1(x, y) \leq \sup(x, y) \Leftrightarrow x + y \leq 2 \sup(x, y) \Leftrightarrow \inf(x, y) + \sup(x, y) \leq 2 \sup(x, y) \Leftrightarrow \inf(x, y) \leq \sup(x, y)$$

et l'assertion en résulte. On peut noter que les infimum et supremum sont en fait les moyennes d'ordre  $k = -\infty$  et  $k = +\infty$  respectivement.

Soit maintenant, pour  $n$  entier naturel,  $(H_n)$  la propriété  $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$ . Puisque  $u_0 = a$  et  $v_0 = a + 1/a$ , la propriété précédente entraîne

$$\inf(u_0, v_0) = u_0 < M_{-1}(u_0, v_0) = u_1 < M_1(u_0, v_0) = v_1 < \sup(u_0, v_0) = v_0$$

et donc  $(H_0)$  est vraie.

Soit  $n$  un entier naturel pour lequel  $(H_n)$  est vraie. On a alors  $0 < u_n < v_n$  et donc

$$\inf(u_n, v_n) = u_n < M_{-1}(u_n, v_n) = u_{n+1} < M_1(u_n, v_n) = v_{n+1} < \sup(u_n, v_n) = v_n$$

et  $(H_{n+1})$  est vraie. La propriété  $(H_n)$  est donc héréditaire et le principe de récurrence entraîne

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$$

ce qui assure en particulier que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est strictement croissante tandis que  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est strictement décroissante. On en déduit que ces suites sont de monotopies contraires.

### Question II.1.c

Soit  $n$  un entier naturel. On a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} .$$

De plus

$$a = u_0 \leq u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \leq v_0 = a + \frac{1}{a}$$

d'après la propriété démontrée en II.1.b et donc  $v_{n+1} - u_{n+1} > 0$  et  $u_n + v_n > 2a$ . Il en résulte

$$0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{(u_n - v_n)^2}{4a} .$$

### Question II.1.d

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est strictement croissante et majorée par  $v_0$ , elle est donc convergente. Notons  $\ell$  sa limite. La suite  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est strictement décroissante et minorée par  $u_0$ , elle est donc également convergente. Notons  $\ell'$  sa limite. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, il vient

$$0 \leq \ell' - \ell \leq \frac{(\ell' - \ell)^2}{4a}$$

et donc

$$0 = \ell' - \ell \quad \text{ou} \quad 4a \leq \ell' - \ell.$$

Mais les suites  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont à valeurs dans  $[a; a + 1/a]$  et  $\ell$  et  $\ell'$  appartiennent donc aussi à cet intervalle, ce qui entraîne  $|\ell - \ell'| \leq 1/a$ . Par conséquent  $\ell = \ell'$ , i.e. les suites  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  convergent et ont même limite.

### Question II.1.e

Soit  $n$  un entier naturel. On a

$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \frac{u_n + v_n}{2} = u_nv_n$$

et donc la suite  $(u_nv_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est constante. Sa valeur est  $u_0v_0$ , i.e.  $a^2 + 1$ . En passant à la limite, il vient  $\ell^2 = a^2 + 1$ . Comme  $\ell$  est positif, on a  $\ell = \sqrt{a^2 + 1}$ . Autrement dit la limite commune des suites  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est  $\sqrt{a^2 + 1}$ .

### Question II.2.a

Soit  $n$  un entier naturel. On a

$$\frac{d_n^2}{2v_n} = \frac{v_n^2 - 2v_n\sqrt{a^2 + 1} + a^2 + 1}{2v_n} = \frac{v_n^2 - 2v_n\sqrt{a^2 + 1} + u_nv_n}{2v_n} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{a^2 + 1} = d_{n+1}.$$

### Question II.2.b

La calcul avec les quantités conjuguées donne la même relation en remplaçant  $d$  par  $\delta$ . En effet, soit  $n$  un entier naturel, on a

$$\frac{\delta_n^2}{2v_n} = \frac{v_n^2 + 2v_n\sqrt{a^2 + 1} + a^2 + 1}{2v_n} = \frac{v_n^2 + 2v_n\sqrt{a^2 + 1} + u_nv_n}{2v_n} = \frac{u_n + v_n}{2} + \sqrt{a^2 + 1} = \delta_{n+1}.$$

Par conséquent

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{d_{n+1}}{\delta_{n+1}} = \left( \frac{d_n}{\delta_n} \right)^2$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{d_n}{\delta_n} = \left( \frac{d_0}{\delta_0} \right)^{2^n}.$$

Or

$$\frac{d_0}{\delta_0} = \frac{a + \frac{1}{a} - \sqrt{a^2 + 1}}{a + \frac{1}{a} + \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{a^2 + 1 - a\sqrt{a^2 + 1}}{a^2 + 1 + \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{\sqrt{a^2 + 1}(\sqrt{a^2 + 1} - a)}{\sqrt{a^2 + 1}(\sqrt{a^2 + 1} + a)} = \rho$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad d_n = \delta_n \rho^{2^n}.$$

Comme  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\sqrt{a^2 + 1}$ ,  $(\delta_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $2\sqrt{a^2 + 1}$  et donc

$$d_n \sim 2\sqrt{a^2 + 1}\rho^{2^n}.$$

Soit  $n$  un entier naturel, on a

$$2d_{n+1} = (u_n + v_n) - 2\sqrt{a^2 + 1} = d_n - (\sqrt{a^2 + 1} - u_n)$$

et donc

$$\sqrt{a^2 + 1} - u_n = d_n - 2d_{n+1}.$$

Comme  $\rho = 1/(\sqrt{a^2 + 1} + a)^2 < 1$ , on a

$$d_n \sim 2\sqrt{a^2 + 1}\rho^{2^n} \quad \text{et} \quad 2d_{n+1} \sim 4\sqrt{a^2 + 1}\rho^{2^{n+1}} = o(\rho^{2^n})$$

et il vient

$$\sqrt{a^2 + 1} - u_n \sim 2\sqrt{a^2 + 1}\rho^{2^n} \sim d_n.$$

En particulier les suites  $(d_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(\sqrt{a^2 + 1} - u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont équivalentes.

### Question II.2.c

Comme  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite strictement croissante convergeant vers  $\sqrt{a^2 + 1}$ , on a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n < \sqrt{a^2 + 1}$ . De même  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite strictement décroissante convergeant vers  $\sqrt{a^2 + 1}$ , on a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n < \sqrt{a^2 + 1}$  et donc  $d_n > 0$ .

Soit  $n$  un entier naturel, on a vu à la question précédente  $u_n - \sqrt{a^2 + 1} - d_n = -2d_{n+1}$  et cette dernière quantité est strictement négative. On en conclut

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 < \sqrt{a^2 + 1} - u_n < d_n.$$

### Question II.3

On a

$$\frac{d_n}{e_n} \sim \frac{2\sqrt{a^2 + 1}\rho^{2^n}}{\lambda r^n} = \frac{2\sqrt{a^2 + 1}}{\lambda} e^{\log(\rho)e^{n \log(2)} - n \log(r)}.$$

L'exponentielle double l'emporte sur l'exponentielle simple. De façon plus concrète, le terme dans l'exponentielle peut s'écrire

$$\log(\rho)e^{n \log(2)} \left( 1 - ne^{-n \log(2)} \frac{\log(r)}{\log(\rho)} \right)$$

et ce terme tend donc vers  $-\infty$ , puisque  $\rho < 1$ . Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n}{e_n} = 0$$

i.e.  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  tend plus rapidement vers  $\sqrt{a^2 + 1}$  que  $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$  : la méthode des moyennes arithmético-harmoniques est plus performante que la méthode de Padé.

### Question II.4.a

On a  $e_0 = \sqrt{a^2 + 1} - a = ar$  et

$$d_0 = a + \frac{1}{a} - \sqrt{a^2 + 1} = \frac{a^2 + 1 - a\sqrt{a^2 + 1}}{a} = \sqrt{a^2 + 1} \frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{a} = \sqrt{a^2 + 1} r.$$

Comme  $a < \sqrt{a^2 + 1}$  et  $r > 0$ , on en déduit  $e_0 < d_0$ .

On a

$$e_1 = a + \frac{1}{2a} - \sqrt{a^2 + 1} = \frac{2a^2 + 1 - 2a\sqrt{a^2 + 1}}{2a} = \frac{(\sqrt{a^2 + 1} - a)^2}{2a} = \frac{(ar)^2}{2a} = \frac{ar^2}{2}$$

et

$$d_1 = \frac{d_0^2}{2v_0} = \frac{(a^2 + 1)r^2}{2(a + \frac{1}{a})} = \frac{a(a^2 + 1)r^2}{2(a^2 + 1)} = \frac{ar^2}{2}$$

et par conséquent  $e_1 = d_1$ .

**Question II.4.b** Soit  $n$  un entier naturel supérieur à 1, on a, par décroissance de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $v_n \leq v_0 = a + 1/a = (a^2 + 1)/a$  et donc

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{d_n}{2v_n} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{v_n} \right) \leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a\sqrt{a^2 + 1}}{a^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \frac{a^2 + 1 - a\sqrt{a^2 + 1}}{a^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{\sqrt{a^2 + 1}} \leq \frac{1}{2} r$$

De plus, ainsi qu'on l'a déjà remarqué en I.A.3.b,

$$\frac{r}{2} \leq \frac{t_n + \sqrt{a^2 + 1}}{2a} - 1$$

avec égalité seulement si  $t_n = a$ , ce qui n'est pas le cas. On a donc

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} > \frac{r}{2} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}$$

et

$$e_{n+1} > \left(\frac{r}{2}\right)^n e_1 = \left(\frac{r}{2}\right)^n d_1 \geq d_{n+1}.$$

Autrement dit, pour tout entier naturel  $n$  supérieur à 2,  $d_n < e_n$ .

### Partie III - Méthode des fractions continues

#### Question III.A.1.a

Soit  $n$ ,  $p$  et  $q$  trois entiers naturels non nuls tels que  $\sqrt{n} = p/q$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux. On a alors  $p^2 = nq^2$ . Si  $\ell$  est un nombre premier divisant  $q$ , il divise  $nq^2$  et donc il divise aussi  $p$ . Comme  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, c'est que  $q$  n'a aucun diviseur premier, autrement dit  $q = 1$ . Ainsi  $n = p^2$  et  $\sqrt{n} = p$ . Par conséquent si  $n$  est un entier naturel non nul tel que  $\sqrt{n}$  est un rationnel (strictement positif), alors  $\sqrt{n}$  est un entier. Pour  $n = 0$ ,  $\sqrt{n}$  est entier et donc, pour tout entier naturel  $n$ , si  $\sqrt{n}$  appartient à  $\mathbf{Q}$ , alors  $\sqrt{n}$  appartient à  $\mathbf{N}$ .

D'après P.1.b  $a$  est l'entier le plus proche de  $\sqrt{a^2 + 1}$ . En particulier  $\sqrt{a^2 + 1}$  ne saurait être entier. D'après ce qui précède, ceci entraîne que ce n'est pas non plus un rationnel.

#### Question III.A.1.b

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes dans  $\mathbf{Z}[X]$  tels que

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad A(x) + \sqrt{x^2 + 1}B(x) = 0.$$

**La méthode suggérée par l'énoncé** Supposons que  $B$  ne soit pas le polynôme nul. Alors il existe au plus un nombre fini d'entiers qui sont racines de  $B$ . Aussi il existe une infinité d'entiers naturels qui ne sont pas des racines de  $B$ . Mais de tels entiers vérifient alors  $A(n) + \sqrt{n^2 + 1}B(n) = 0$  et donc  $\sqrt{n^2 + 1} = -A(n)/B(n)$ , ce qui entraîne que  $\sqrt{n^2 + 1}$  est rationnel. Ceci est impossible d'après la question précédente, et donc  $B$  est le polynôme nul. Mais alors  $A$  aussi et donc

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad A(x) = B(x) = 0.$$

**Par élimination des radicaux** On a donc

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad A^2(x) = (x^2 + 1)B^2(x).$$

Notons  $I$  le polynôme de  $\mathbf{Z}[X]$  donné par  $I(X) = X^2 + 1$ . L'égalité des fonctions polynômes sur  $\mathbf{R}$  entraîne l'égalité des polynômes eux-mêmes et donc  $A^2 = I \cdot B^2$ . Si  $B$  n'est pas le polynôme nul, alors  $A$  non plus et on peut définir la multiplicité (éventuellement nulle) de la racine  $i$  dans  $A$  et  $B$ . Notons-les respectivement  $m$  et  $n$ . La multiplicité de  $i$  dans  $A^2$  est  $2m$ , mais dans  $I B^2$  elle est de  $1 + 2n$ . Comme ceci est impossible  $B$  est le polynôme nul et donc  $A$  aussi, par intégrité de  $\mathbf{Z}[X]$ , d'où

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad A(x) = B(x) = 0.$$

#### Question III.A.2.a

Notons tout d'abord que, d'après III.A.1.b, pour tout élément de  $E$ ,

$$\exists!(A, B) \in (\mathbf{Z}[X])^2 \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = A(x) + \sqrt{x^2 + 1}B(x).$$

Ceci montre l'unicité des suites  $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . Montrons maintenant leur existence.

**Formellement** Notons que  $E$  est un sous-anneau de  $C(\mathbf{R})$  puisqu'il contient  $0, 1, f - g$  et  $fg$  si  $f$  et  $g$  sont des éléments de  $E$ . En effet si  $(A, B)$  et  $(C, D)$  sont associés à  $f$  et  $g$  selon la définition de  $E$ , alors  $(A - C, B - D)$  est associé à  $f - g$  et  $(AC + (X^2 + 1)BD, AD + BC)$  est associé à  $fg$ . Or  $\phi_1$  appartient à  $E$  de par son écriture et comme, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\phi_n = \phi_1^n$ ,  $\phi_n$  appartient à  $E$ . De plus si  $\phi_n$  est associé à  $(P_n, Q_n)$ , comme  $\phi_1$  est associé à  $(X, 1)$ , on a  $P_{n+1} = XP_n + (X^2 + 1)Q_n$  et  $Q_{n+1} = P_n + XQ_n$ .

**Directement** Soit  $n$  un entier naturel. Posons, en notant  $[t]$  la partie entière du réel  $t$ ,

$$P_n[X] = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} X^{n-2k} (X^2 + 1)^k \quad \text{et} \quad Q_n[X] = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2k+1} X^{n-2k-1} (X^2 + 1)^k.$$

Ce sont des polynômes à coefficients entiers puisque les coefficients binomiaux sont entiers et que  $\mathbf{Z}[X]$  est un anneau. La formule du binôme donne

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \phi_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} \sqrt{x^2 + 1}^k = P_n(x) + \sqrt{x^2 + 1} Q_n(x)$$

et donc  $\phi_n$  appartient à  $E$ . On peut obtenir la relation entre  $(P_{n+1}, Q_{n+1})$  et  $(P_n, Q_n)$  en utilisant la relation  $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ .

**Par récurrence** C'est certainement la méthode envisagée par l'énoncé. Pour  $n$  entier naturel soit  $(H_n)$  la propriété  $\phi_n \in E$  et, si  $n > 0$ ,  $P_n = XP_{n-1} + (X^2 + 1)Q_{n-1}$  et  $Q_n = P_{n-1} + XQ_{n-1}$ . La propriété  $(H_0)$  est vraie puisque  $\phi_0$  s'obtient avec  $A = 1$  et  $B = 0$ . Montrons que  $(H_n)$  est héréditaire. Soit  $n$  un entier naturel tel que  $(H_n)$  soit vraie. On a, pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(x) &= \phi_n(x)(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= (P_n(x) + \sqrt{x^2 + 1}Q_n(x))(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= xP_n(x) + (x^2 + 1)Q_n(x) + \sqrt{x^2 + 1}(P_n(x) + xQ_n(x)) \end{aligned}$$

et donc  $\phi_{n+1} \in E$  et  $P_{n+1} = XP_n + (X^2 + 1)Q_n$  et  $Q_{n+1} = P_n + XQ_n$ . Le principe de récurrence permet donc d'affirmer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\phi_n \in E$  et qu'il existe, de façon unique, deux suites  $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de polynômes de  $\mathbf{Z}[X]$  telles que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \phi_n(x) = P_n(x) + \sqrt{x^2 + 1}Q_n(x) \quad \text{et} \quad (P_{n+1}, Q_{n+1}) = (XP_n + (X^2 + 1)Q_n, P_n + XQ_n).$$

### Question III.A.2.b

**Matriciellement** On peut récrire les relations précédentes de façon synthétique

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & X^2 + 1 \\ 1 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, par un calcul direct ou par le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\begin{pmatrix} X & X^2 + 1 \\ 1 & X \end{pmatrix}^2 = 2X \begin{pmatrix} X & X^2 + 1 \\ 1 & X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc, en appliquant cette identité au vecteur  $(P_n, Q_n)$ ,

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \begin{pmatrix} P_{n+2} \\ Q_{n+2} \end{pmatrix} = 2X \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix}.$$

D'où les relations cherchées.

**Par unicité de l'écriture dans  $E$**  Soit  $n$  un entier naturel. Par unicité de l'écriture des éléments de  $E$ , les relations cherchées sont équivalentes à

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \phi_{n+2}(x) = 2x\phi_{n+1}(x) + \phi_n(x) .$$

Remarquons

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \phi_2(x) = (x + \sqrt{x^2 + 1})^2 = 2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2 + 1} = 2x(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 1 = 2x\phi_1(x) + \phi_0(x)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \phi_{n+2}(x) = \phi_n(x)\phi_2(x) = \phi_n(x)(2x\phi_1(x) + \phi_0(x)) = 2x\phi_{n+1}(x) + \phi_n(x) .$$

**Directement** Soit  $n$  un entier naturel. On a

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= XP_{n+1} + (X^2 + 1)Q_{n+1} \\ &= XP_{n+1} + (X^2 + 1)(P_n + XQ_n) \\ &= XP_{n+1} + (X^2 + 1)P_n + X(X^2 + 1)Q_n \\ &= XP_{n+1} + (X^2 + 1)P_n + X(P_{n+1} - XP_n) \\ &= 2XP_{n+1} + P_n \end{aligned}$$

et

$$Q_{n+2} = P_{n+1} + XQ_{n+1} = XP_n + (X^2 + 1)Q_n + XQ_{n+1} = X(Q_{n+1} - XQ_n) + (X^2 + 1)Q_n + XQ_{n+1} = 2XQ_{n+1} + Q_n .$$

**Question III.A.2.c** Pour  $n$  entier naturel soit  $(H_n)$  la propriété :  $P_n$  et  $Q_n$  ont des coefficients entiers naturels (ou positifs, ce qui revient au même puisqu'on sait déjà qu'ils sont entiers relatifs), le degré de  $P_n$  est  $n$ , celui de  $Q_n$  est  $n - 1$  sauf pour  $n = 0$ , les coefficients dominants de  $P_n$  et  $Q_n$  sont égaux et valent  $2^{n-1}$  sauf pour  $n = 0$ . Dans le cas  $n = 0$ ,  $Q_0$  est nul et  $P_0$  est constant égal à 1.

**Directement** Les expressions trouvées dans la démonstration directe de III.A.2.a montrent que  $(H_n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ , sauf peut-être en ce qui concerne les coefficients dominants. Mais le développement du binôme pour  $(1 - 1)^n$ , pour  $n$  entier naturel supérieur à 1, montre que la somme des coefficients binomiaux d'indice pair est égale à celle des coefficients binomiaux d'indice impair. Comme la somme de ces deux quantités est  $(1 + 1)^n = 2^n$ , c'est que chacun vaut  $2^{n-1}$ , ce qui est l'assertion cherchée.

**À partir de III.A.2.b** On a  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$ ,  $Q_0 = 0$  et  $Q_1 = 1$ . Par conséquent  $(H_0)$  et  $(H_1)$  sont vraies. Si maintenant  $n$  est un entier naturel tel que  $(H_{n+1})$  et  $(H_n)$  soient vraies, alors  $(H_{n+2})$  l'est aussi d'après III.A.2.b. D'après le principe de récurrence (faible), on en conclut que tous les polynômes  $P_n$  et  $Q_n$ , pour  $n$  entier naturel, sont à coefficients entiers naturels.

**À partir de III.A.2.a** On a  $P_0 = 1$  et  $Q_0 = 0$ , donc  $(H_0)$  est vraie. Si maintenant  $n$  est un entier naturel tel que  $(H_n)$  est vraie, alors  $P_{n+1} = XP_n + (X^2 + 1)Q_n$  et  $Q_{n+1} = P_n + XQ_n$  entraînent que  $(H_{n+1})$  aussi est vraie.

Remarque : il est utile de noter que seul  $Q_0$  est le polynôme nul car la relation III.A.2.b entraîne la non nullité de  $P_{n+2}$  et  $Q_{n+2}$  dès qu'un des deux précédents ne l'est pas. L'étude des  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $Q_0$  et  $Q_1$  permet donc de conclure que  $P_n$  n'est nul pour aucun  $n$  et que  $Q_n$  ne l'est que pour  $n$  nul.

**Question III.A.2.d**

**Directement** Les expressions trouvées dans la démonstration directe de III.A.2.a montrent que  $P_n$  est de la parité de  $n$  tandis que  $Q_n$  est de la parité opposée.

**Par récurrence** Pour  $n$  entier naturel, on note  $(H_n)$  la propriété  $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$  et  $Q_n(-X) = (-1)^{n+1} Q_n(X)$ . Le polynôme  $P_0 = Q_1 = 1$  étant pair et les polynômes  $P_1 = X$  et  $Q_0 = 0$  étant impairs,  $(H_0)$  et  $(H_1)$  sont vraies. On conclut soit grâce à la relation trouvée en III.A.2.b, soit grâce à celle trouvée en III.A.2.a, que la propriété  $(H_n)$  est héréditaire et d'après le principe de récurrence (faible dans le premier cas),  $P_n$  est de la parité de  $n$  et  $Q_n$  de la parité opposée.

**ATTENTION!** L'énoncé ne précise pas que l'on cherche les racines réelles. C'est une erreur de sa part.

Un polynôme non nul pair à coefficients positifs prend des valeurs positives sur  $\mathbf{R}$  et même strictement positives sur  $\mathbf{R}^*$ . Il peut ou non s'annuler en 0. Un polynôme non nul impair à coefficients positifs s'écrit  $X$  fois un polynôme de la forme précédente. Il a donc une unique racine réelle, à savoir 0. De plus, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $\phi_n(0) = 1 = P_n(0) + Q_n(0)$  et donc 0 ne peut être racine à la fois de  $P_n$  et de  $Q_n$ . Il en résulte :  $P_0$  ne s'annule pas sur  $\mathbf{R}$  et  $Q_0$  s'annule sur tout  $\mathbf{R}$ , si  $n$  est pair et non nul,  $P_n$  n'a pas de racine réelle et  $Q_n$  admet 0 comme unique racine réelle, tandis que si  $n$  est impair la situation est inversée,  $Q_n$  n'a pas de racine réelle et  $P_n$  admet 0 comme unique racine réelle.

**Question III.A.3.a** Soit  $n$  un entier naturel et  $x$  un réel, on a

$$(x - \sqrt{x^2 + 1})^n = (-1)^n \phi_n(-x) = (-1)^n P_n(-x) + (-1)^n \sqrt{x^2 + 1} Q_n(-x) = P_n(x) - \sqrt{x^2 + 1} Q_n(x) .$$

D'où la relation (1).

Comme la fonction racine carrée est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ , la fonction  $\phi_1$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ . On peut donc la dériver et il vient

$$\phi'_n(x) = n\phi_{n-1}(x) \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

et donc

$$\sqrt{x^2 + 1} \phi'_n(x) = n\phi_{n-1}(x) \phi_1(x) = n\phi_n(x) .$$

Par ailleurs

$$\phi'_n(x) = P'_n(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} Q_n(x) + \sqrt{x^2 + 1} Q'_n(x)$$

et donc

$$\sqrt{x^2 + 1} \phi'_n(x) = xQ_n(x) + (x^2 + 1)Q'_n(x) + \sqrt{x^2 + 1} P'_n(x) .$$

Il en résulte que  $\sqrt{x^2 + 1} \phi'_n$  appartient à  $E$  et l'unicité de l'écriture dans  $E$  entraîne les relations (2) et (3).

**Question III.A.3.b** Soit  $n$  un entier naturel et  $x$  un réel, on a

$$(x^2 + 1)P''_n(x) + xP'_n(x) - n^2 P_n(x) = n(x^2 + 1)Q'_n(x) + nxQ_n(x) - n^2 P_n(x) = n((x^2 + 1)Q'_n(x) + xQ_n(x) - nP_n(x)) = 0$$

et donc  $P_n$  est solution, sur  $\mathbf{R}$ , de l'équation différentielle  $(x^2 + 1)y'' + xy' - n^2 y = 0$ .

**ATTENTION!** L'énoncé devrait préciser sur quel domaine  $P_n$  est solution de l'équation différentielle précédente.

**Question III.B.1.a** D'après l'étude menée en III.A.2.d,  $a$  n'est racine de  $Q_n$  pour aucun entier naturel non nul  $n$ . La quantité  $P_n(a)/Q_n(a)$  est donc bien définie. Comme  $P_n$  et  $Q_n$  sont à coefficients entiers et que  $a$  l'est aussi, il en va de même pour  $P_n(a)$  et  $Q_n(a)$  et l'existence de la suite  $(c_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  en découle.

**Question III.B.1.b** Soit  $n$  un entier naturel non nul. On a

$$1 = (\sqrt{a^2 + 1} + a)^n (\sqrt{a^2 + 1} - a)^n = (-1)^n (P_n(a) + \sqrt{a^2 + 1} Q_n(a)) (P_n(a) - \sqrt{a^2 + 1} Q_n(a)) = (-1)^n (P_n^2(a) - (a^2 + 1) Q_n^2(a))$$

et ceci est en particulier une relation de Bézout entre  $P_n(a)$  et  $Q_n(a)$ . Par conséquent la fraction définissant  $c_n$  est irréductible.

**Question III.B.1.c** D'après les relations obtenues en III.A.2.a, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a

$$c_{n+1} = \frac{aP_n(a) + (a^2 + 1)Q_n(a)}{P_n(a) + aQ_n(a)} = \frac{ac_n + a^2 + 1}{c_n + a} .$$

**Question III.B.2.a** Soit  $n$  un entier naturel. Remarquons que  $Q_n(a)$  est un entier naturel non nul et est donc supérieur à 1. Grâce à III.A.3.a (1), il vient

$$|c_n - \sqrt{a^2 + 1}| = \frac{|P_n(a) - \sqrt{a^2 + 1} Q_n(a)|}{Q_n(a)} = \frac{|a - \sqrt{a^2 + 1}|^n}{Q_n(a)} \leq |a - \sqrt{a^2 + 1}|^n$$

et, puisque  $|a - \sqrt{a^2 + 1}| \leq 1/2$  d'après P.1.a, la suite  $(c_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge vers  $\sqrt{a^2 + 1}$ .

**Question III.B.2.b** Soit  $n$  un entier naturel non nul. On a

$$\frac{c_n - \sqrt{a^2 + 1}}{c_n + \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{P_n(a) - \sqrt{a^2 + 1}Q_n(a)}{P_n(a) + \sqrt{a^2 + 1}Q_n(a)} = \frac{(a - \sqrt{a^2 + 1})^n}{(a + \sqrt{a^2 + 1})^n} = (-\rho)^n$$

et donc

$$\varepsilon_n = (c_n + \sqrt{a^2 + 1})\rho^n$$

et il vient, par convergence de  $(c_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  vers  $\sqrt{a^2 + 1}$ ,

$$\varepsilon_n \sim 2\sqrt{a^2 + 1}\rho^n.$$

**Question III.B.2.c** Il vient

$$\frac{\varepsilon_n}{e_n} \sim \frac{2\sqrt{a^2 + 1}}{\lambda} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

Or  $\rho/r = a/(\sqrt{a^2 + 1} + a)$  est un réel strictement compris entre 0 et 1/2 et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_n}{e_n} = 0.$$

Autrement dit la méthode des fractions continues est plus performante que la méthode de Padé.

**Question III.B.2.d** Soit  $n$  un entier naturel non nul. On a, d'après III.B.1.c,

$$\begin{aligned} c_{n+1} - \sqrt{a^2 + 1} &= \frac{ac_n + a^2 + 1}{a + c_n} - \sqrt{a^2 + 1} \\ &= \frac{(a - \sqrt{a^2 + 1})c_n + a^2 + 1 - a\sqrt{a^2 + 1}}{a + c_n} \\ &= \frac{(a - \sqrt{a^2 + 1})c_n + (\sqrt{a^2 + 1} - a)\sqrt{a^2 + 1}}{a + c_n} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{a + c_n} (\sqrt{a^2 + 1} - c_n) \end{aligned}$$

et donc

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{a + c_n} \varepsilon_n.$$

On a  $c_1 = P_1(a)/Q_1(a) = a/1 = a$  et, pour  $n$  entier naturel strictement supérieur à 1, on a  $c_{n+1} - a = (ac_n + a^2 + 1)/(a + c_n) - a = 1/(a + c_n) > 0$  puisque  $c_n$  est positif. Par conséquent, pour tout entier naturel  $n$  non nul  $c_n$  est un rationnel supérieur à  $a$  et  $\varepsilon_n$  est non nul. Il en résulte

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{a + c_n} \leq \frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{2a} = \frac{r}{2}.$$

On a  $\varepsilon_1 = \sqrt{a^2 + 1} - a = e_0$  et donc

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \varepsilon_{n+1} \leq \left(\frac{r}{2}\right)^n \varepsilon_1 = \left(\frac{r}{2}\right)^n e_0 \leq e_n$$

d'après ce qui précède et la remarque faite en II.4.b.

**Question III.B.3.a** Soit  $k$  un entier naturel. Par unicité de l'écriture des éléments de  $E$  et puisque  $\phi_{2k} = \phi_k^2$ , on a  $P_{2k} = P_k^2 + (X^2 + 1)Q_k^2$  et  $Q_{2k} = 2P_kQ_k$ .

Il vient, pour  $k$  non nul,

$$c_{2k} = \frac{P_k^2(a) + (a^2 + 1)Q_k^2(a)}{2P_k(a)Q_k(a)} = \frac{c_k^2 + (a^2 + 1)}{2c_k} = \frac{1}{2} \left( c_k + \frac{a^2 + 1}{c_k} \right).$$

**Question III.B.3.b** Pour  $n$  entier naturel non nul soit  $(H_n)$  la propriété  $c_{2^n} = v_n$ . Puisque  $P_1 = X$  et  $Q_1 = 1$ , on a  $P_2 = 2X^2 + 1$  et  $Q_2 = 2X$ . Par conséquent  $c_2 = (2a^2 + 1)/2a = a + 1/2a = v_1$  et la propriété  $(H_1)$  est vraie. Montrons le côté héréditaire. Soit  $n$  un entier naturel non nul tel que  $(H_n)$  soit vraie. On a

$$c_{2^{n+1}} = c_{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \left( c_{2^n} + \frac{a^2 + 1}{c_{2^n}} \right) = \frac{1}{2} \left( v_n + \frac{a^2 + 1}{v_n} \right) = \frac{1}{2} \left( v_n + \frac{u_n v_n}{v_n} \right) = \frac{v_n + u_n}{2} = v_{n+1}.$$

Le principe de récurrence permet de conclure

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad c_{2^n} = v_n.$$

En particulier l'équivalent trouvé en III.B.2.b redonne l'équivalent trouvé en II.2.b :

$$d_n = \varepsilon_{2^n} \sim 2\sqrt{a^2 + 1}\rho^{2^n}.$$

**Question III.B.4.a** Soit  $k$  un entier naturel. Par unicité de l'écriture des éléments de  $E$  et puisque  $\phi_{3k} = \phi_k^3$ , on a  $P_{3k} = P_k^3 + 3(X^2 + 1)P_kQ_k^2$  et  $Q_{3k} = 3P_k^2Q_k + (X^2 + 1)Q_k^3$ .

Il vient, pour  $k$  non nul,

$$c_{3k} = \frac{c_k^3 + 3(a^2 + 1)c_k}{3c_k^2 + a^2 + 1}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad w_{n+1} = \frac{w_n^3 + 3(a^2 + 1)w_n}{3w_n^2 + a^2 + 1}.$$

**Question III.B.4.b** Il vient

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad w_{n+1} - \sqrt{a^2 + 1} = \frac{(w_n - \sqrt{a^2 + 1})^3}{3w_n^2 + a^2 + 1} \quad \text{et} \quad w_{n+1} + \sqrt{a^2 + 1} = \frac{(w_n + \sqrt{a^2 + 1})^3}{3w_n^2 + a^2 + 1}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \frac{w_{n+1} - \sqrt{a^2 + 1}}{w_{n+1} + \sqrt{a^2 + 1}} = \left( \frac{w_n - \sqrt{a^2 + 1}}{w_n + \sqrt{a^2 + 1}} \right)^3$$

et

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad |w_n - \sqrt{a^2 + 1}| = (w_n + \sqrt{a^2 + 1})\rho^{3^n}.$$

De plus, d'après I.A.3.b,

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad 0 \leq w_n + \sqrt{a^2 + 1} \leq 2\sqrt{a^2 + 1} + \varepsilon_{3^n} \leq 2\sqrt{a^2 + 1} + e_{3^n - 1} \leq 2\sqrt{a^2 + 1} + \frac{1}{2a} \leq 2a + \frac{3}{2a}$$

et finalement

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad |w_n - \sqrt{a^2 + 1}| \leq \left( 2a + \frac{3}{2a} \right) \rho^{3^n}.$$

**Question III.B.4.c** On prend  $a = 3$ . On a  $2a + \frac{3}{2a} = 6.5 \leq 10$  et

$$\rho = \frac{\sqrt{a^2+1} - a}{\sqrt{a^2+1} + a} = \frac{1}{(\sqrt{a^2+1} + a)^2} \leq \frac{1}{a^2+1} = 10^{-1}.$$

Il vient, pour  $n = 2$ ,

$$|w_2 - \sqrt{10}| \leq 10 (10^{-1})^9 \leq 10^{-8}$$

et donc  $n = 2$  convient. On trouve

$$w_0 = 3 \quad w_1 = \frac{117}{37} \quad w_2 = \frac{6406803}{2026009}$$

et

$$w_2 \simeq 3.16227766016834 \quad \sqrt{10} \simeq 3.16227766016837$$

soit  $|w_2 - \sqrt{10}| \leq 4 \cdot 10^{-14}$  !