Deuxième épreuve CAPESA 1996

François Sauvageot

28 novembre 2000

Partie I

On a

$$t_2 = f(t_1) = 7(-11,3) - 2(-37,10) = (-3,1) \qquad \text{et} \qquad t_3 = f(t_2) = -3(-11,3) + (-37,10) = (-4,1)\ .$$

La famille (t_1, t_2) admet

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

comme déterminant par rapport à la base canonique, c'est-à-dire 1. C'est donc une base de E. Par conséquent la famille (t_1, t_2, t_3) contient une base de E et est, de ce fait, une partie génératrice de E.

Par définition même de t_2 et t_3, on a $t_2 = f(t_1)$ et $t_3 = f(t_2)$ et le calcul précédent montre que les deux vecteurs t_2 et t_3 sont distincts de t_1. Ainsi pour vérifier que (t_1, t_2, t_3) est un cycle pour f, il suffit de vérifier $f(t_3) = t_1$. Or

$$f(t_3) = -4(-11,3) + (-37,10) = (7,-2) = t_1$$

et donc f est un endomorphisme cyclique de E et admet (t_1, t_2, t_3) comme cycle.

On a $f^3(t_1) = f(t_3) = t_1$ et $f^3(t_2) = f^4(t_1) = f(f^3(t_1)) = f(t_1) = t_2$. Par conséquent f^3 est l'identité sur une base de E. Il en résulte que c'est l'identité. Comme de plus $f(t_1)$ et $f^2(t_1)$ sont distincts de t_1, puisque ce sont respectivement t_2 et t_3, f et f^2 sont distincts de l'identité. Aussi f vérifie-t-il la propriété $\mathcal{P}_3$.

Partie II

Question II.1

Toute partie génératrice de E contenant une base de E, elle est de cardinal supérieur à la dimension de E. Ici il est donc nécessaire que n soit supérieur à 2.

D'après la propriété (2) des cycles, la famille $(t_2, \ldots, t_n, t_1)$ appartient à l'image de f et donc $Im(f)$ contient une partie génératrice de E. Il en résulte que f est surjectif. Étant un endomorphisme de E, f est donc bijectif.

Soit k et l sont deux entiers compris entre 1 et n, on a, par bijectivité de f,

$$\begin{aligned} t_k = t_l \quad &\Leftrightarrow \quad f^{k-1}(t_1) = f^{l-1}(t_1) \\ &\Leftrightarrow \quad f^{k-l}(t_1) = t_1 \\ &\Leftrightarrow \quad f^{|k-l|}(t_1) = t_1 \\ &\Leftrightarrow \quad t_{|k-l|+1} = t_1 \\ &\Leftrightarrow \quad |k-l| + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad |k-l| = 0 \end{aligned}$$

et donc les vecteurs de la famille $(t_1, \ldots, t_n)$ sont deux à deux distincts.

Question II.2

Le vecteur t_1 ne peut être nul car sinon il en est de même de t_2 et cela contredit la propriété (2). Par conséquent il engendre une droite D. Si t_2 appartient à cette droite, alors $f(D)$ est inclus dans D puisque t_2 est l'image d'un vecteur directeur de D. Il en résulte que D est stable par f et donc par toute itérée de f. Par conséquent tous les vecteurs de la famille $(t_1,\ldots,t_n)$ appartiennent à D et ne peuvent former une famille génératrice de E.

Le vecteur t_2 ne peut donc appartenir à D, i.e. (t_1, t_2) est une famille libre de E.

Soit λ et μ deux scalaires tels que $\lambda I_E + \mu f = 0$. En spécialisant en t_1, on en déduit $\lambda t_1 + \mu t_2$ et donc, puisque (t_1, t_2) est une famille libre, λ et μ sont nuls. Par conséquent (I_E, f) est une famille libre de $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$.

Question II.3

D'après la propriété (2) des cycles, on a $f^k(t_1) = t_{k+1}$ pour k entier entre 1 et $n-1$ et donc, d'après la propriété (3) des cycles, pour un tel k f^k n'est pas l'identité.

De plus $f^n(t_1) = f(t_n) = t_1$ et, pour tout entier k entre 2 et n,

$$f^n(t_k) = f^{n+k-1}(t_1) = f^{k-1}(t_1) = t_k$$

et donc f^n est l'identité sur la famille génératrice $(t_1,\ldots,t_n)$. Il en résulte que f^n est l'identité sur E et, en conclusion, vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$.

Soit $(u_1,\ldots,u_m)$ un second cycle pour f. En appliquant les résultats précédents à ce cycle, il vient que f vérifie la propriété $\mathcal{P}_m$. Si m et n sont distincts alors $min(m,n)$ est strictement inférieur à $max(m,n)$, tout en étant strictement positif (en fait supérieur ou égal à 2 d'après II.1). Or $f^{min(m,n)}$ est égal à I_E d'après $\mathcal{P}_{min(m,n)}$ mais en est distinct d'après $\mathcal{P}_{max(m,n)}$. Cette contradiction assure que m et n sont égaux, i.e. deux cycles pour f ont même cardinal.

Question II.4.a

La famille (t_1, t_2) constitue bien une base de E puisque c'est une famille libre, d'après II.2, et que E est de dimension 2. La matrice de f relativement à cette base est donnée en colonnes par les coordonnées des vecteurs de base relativement à cette même base. On a $f(t_1) = t_2$ et $f(t_2)$ appartient à E, donc il existe deux scalaires a et b tels que $f(t_2) = at_1 + bt_2$, d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} .$$

Question II.4.b

Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Cayley-Hamilton. En effet le polynôme caractéristique de f est $X^2 - bX - a$ et donc

$$f^2 - bf - aI_E = 0 .$$

Question II.4.c

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$ engendré par I_E et f. H est de dimension 2, par indépendance linéaire de I_E et f, et stable par f (f peut-être vue comme un endomorphisme de $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$ par composition : $f(u) = f \circ u$, pour tout u dans $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$).

En effet il suffit de vérifier que f envoie la base (I_E, f) de H dans H. Comme $f \circ I_E$ est f et $f \circ f$ est $aI_E + bf$, H est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$ stable par f. Pour tout entier naturel k, H est donc également stable par f^k. En particulier $f^k \circ I_E$ appartient à H et s'écrit de façon unique sous la forme $x_k I_E + y_k f$ pour des scalaires x_k et y_k, puisque (I_E, f) est une base de H.

De plus, pour tout entier naturel k, on a

$$f^{k+1} = f \circ f^k = f \circ (x_k I_E + y_k f) = x_k f + y_k f^2 = a y_k I_E + (x_k + b y_k) f$$

et donc

$$x_{k+1} = a y_k \qquad \text{et} \qquad y_{k+1} = x_k + b y_k$$

par unicité de l'écriture de f^{k+1} dans la base (I_E, f).

Néanmoins, vu la difficulté de rédiger une démonstration par récurrence, faisons également cet exercice !

Démontrons par récurrence sur l'entier naturel k, la propriété H_k suivante

$$(H_k) \qquad \exists (x_k, y_k) \in \mathbf{R}^2 \quad f^k = x_k I_E + y_k f \ .$$

Pour $k = 0$, la propriété H_0 est vraie puisque f^0 est l'identité et peut s'écrire sous la forme $1.I_E + 0.f$.

Soit maintenant k un entier naturel pour lequel H_k est vraie. Si (x_k, y_k) est un couple de réels pour lequel $f^k = x_k I_E + y_k f$, on a

$$f^{k+1} = f \circ f^k = f \circ (x_k I_E + y_k f) = x_k f + y_k f^2 = a y_k I_E + (x_k + b y_k) f$$

et donc H_{k+1} est également vraie, i.e. la propriété (H_k) est héréditaire. Le principe de récurrence permet donc d'affirmer qu'elle est vraie pour tout entier naturel k.

De plus, par indépendance linéaire de I_E et f, l'écriture précédente est unique et, d'après le calcul effectué, on a une relation de récurrence entre les coefficients :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \exists !\, (x_k, y_k) \in \mathbf{R}^2 \qquad f^k = x_k I_E + y_k f$$

et

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad x_{k+1} = a y_k \qquad \text{et} \qquad y_{k+1} = x_k + b y_k \ .$$

Question II.4.d

Puisque f vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$, f^n est l'identité. Par unicité de (x_n, y_n) et puisque $f^n = 1.I_E + 0.f$, on a $x_n = 1$ et $y_n = 0$.

Question II.4.e

Soit k un entier naturel, on a

$$y_{k+2} = x_{k+1} + b y_{k+1} = a y_k + b y_{k+1} \ .$$

Comme $y_0 = 0$ et $y_1 = x_0 + b y_0 = 1$, on en déduit, par unicité de la suite $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$, que cette suite est la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = 1 \\ \forall k \in \mathbf{N} \qquad y_{k+2} - b y_{k+1} - a y_k = 0 \ . \end{cases}$$

Question II.5.a

D'après les formules de Newton reliant coefficients et racines, on a, que les racines soient réelles ou non,

$$\alpha + \beta = b \qquad \text{et} \qquad \alpha\beta = -a \ .$$

L'équation $X^2 - bX - a = 0$ est l'équation caractéristique des suites récurrentes linéaires vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad u_{k+2} - b u_{k+1} - a u_k = 0$$

et donc l'ensemble de ces suites est l'espace vectoriel engendré par les suites géométriques $(\alpha^k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(\beta^k)_{k \in \mathbf{N}}$. Ce résultat étant d'ailleurs encore valable si les racines α et β sont simplement supposée distinctes. Dans le cas où α est racine double de P, ce sont $(\alpha^k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(k\alpha^k)_{k \in \mathbf{N}}$ qui engendrent l'espace des solutions.

Remarquons enfin que $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifient cette relation de récurrence linéaire d'une part du fait de II.4.e pour la seconde et d'autre part du fait que la première est un multiple d'une translatée de la seconde.

Par conséquent, dans le cas où α et β sont distinctes, on a

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad x_k = \frac{\beta\alpha^k - \alpha\beta^k}{\beta - \alpha} \quad \text{et} \quad y_k = \frac{\beta^k - \alpha^k}{\beta - \alpha}$$

puisque les suites étudiées coïncident sur leurs deux premières valeurs et vérifient la même relation de récurrence linéaire.

Du fait que y_n vaut 0, on déduit $\alpha^n = \beta^n$ et donc $x_n = \alpha^n$. Par conséquent, comme $x_n = 1$, on a $\alpha^n = \beta^n = 1$.

Comme α et β sont réels et distincts, on en déduit $\{\alpha, \beta\} = \{-1, 1\}$ et donc $a = -1$ et $b = 0$. C'est donc que $f(t_2)$ vaut t_1 et donc f est cyclique d'ordre 2, i.e. $n = 2$.

Question II.5.b

Dans le cas où P admet des racines doubles, on a, d'après les remarques faites précédemment et le fait que les deux suites étudiées coïncident en leurs deux premières valeurs

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad y_k = k\alpha^{k-1}$$

et α ne saurait être nul.

Mais alors $y_n = n\alpha^{n-1}$ ne peut être nul que si α est nul, ce qui est contradictoire. Ainsi P ne peut avoir de racine double.

Question II.5.c1

Comme, pour tout complexe z, $P(\bar{z})$ est le conjugué de $P(z)$, les racines α et β sont complexes conjuguées. Notons α une racine de partie imaginaire positive, elle s'écrit donc sous forme polaire $\alpha = \rho e^{i\theta}$ avec ρ un réel positif et θ un réel dans $[0; \pi]$. Dans ce cas β s'écrit $\rho e^{-i\theta}$. De plus, comme α n'est pas réel, ρ n'est pas nul et θ est distinct de 0 et π.

Les formules liant racines et coefficients étant encore valable, on obtient $a = -|\alpha|^2$ et $b = 2Re(\alpha)$ et donc

$$a = -\rho^2 \qquad \text{et} \qquad b = 2\rho\cos(\theta)$$

avec ρ dans $\mathbf{R}_+^*$ et θ dans $]0; \pi[$.

Question II.5.c2

La formule établie au II.5.a est encore valide en prenant α et β les racines distinctes de P. Comme on a $\alpha = \rho e^{i\theta}$ et $\beta = \rho e^{-i\theta}$, il vient, pour k dans $\mathbf{N}$,

$$x_k = \rho^k \frac{e^{i(k-1)\theta} - e^{-i(k-1)\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = -\rho^k \frac{2i\sin((k-1)\theta)}{2i\sin(\theta)} = -\rho^k \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

et

$$y_k = \rho^{k-1} \frac{e^{-ik\theta} - e^{ik\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = \rho^{k-1} \frac{-2i\sin(k\theta)}{-2i\sin(\theta)} = \rho^{k-1} \frac{\sin(k\theta)}{\sin(\theta)} .$$

Question II.5.c3

Puisque y_n est nul et pas ρ, on a $\sin(n\theta) = 0$ et donc $n\theta$ est un multiple entier de π. Comme θ est strictement compris entre 0 et π, ce multiple est de la forme $r\pi$ avec r dans $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ et donc $\theta = r\pi/n$.

Comme x_n vaut 1 et ρ est positif, $\sin((n-1)\theta)/\sin(\theta)$ est négatif. Or

$$\frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(r\pi - \theta)}{\sin(\theta)} = -\cos(r\pi) = (-1)^{r+1}$$

et donc r est pair. De plus on obtient $x_n = \rho^n$ et donc, puisque ρ est un réel positif, ρ vaut 1.

On a donc $a = -1$ et $b = 2\cos(\theta) = 2\cos(2s\pi/n)$.

Question II.5.c4

Le déterminant de la famille (e_1, e_2) par rapport à la base (t_1, t_2) est $\sin(\theta)$ et est donc non nul puisque θ est dans $]0; \pi[$. Il en résulte que (e_1, e_2) est une base de E.

De plus

$$f(e_1) = \sin(\theta)f(t_2) = \sin(\theta).(-t_1 + 2\cos(\theta)t_2) = \sin(\theta)e_2 + \cos(\theta)e_1$$

et

$$f(e_2) = -t_2 + \cos(\theta).(-t_1 + 2\cos(\theta)t_2) = \cos(\theta)e_2 - (1 - \cos^2(\theta))t_2 = \cos(\theta)e_2 - \sin(\theta)e_1$$

et donc

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} .$$

Autrement dit B est la matrice d'une rotation d'angle θ, par conséquent pour tout entier naturel k, B^k est la matrice de la rotation d'angle $k\theta$, i.e.

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad B^k = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} .$$

Soit maintenant d un diviseur (positif) commun à s et n, pour $k = n/d$, $k\theta$ vaut $2s\pi/d$ et est donc un multiple entier de 2π. Il en résulte $B^{n/d} = I_2$ et donc $f^{n/d} = I_E$. Puisque f vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$, c'est donc que n/d vaut n et donc $d = 1$. Autrement dit s et n sont premiers entre eux.

Question II.6

Soit f la rotation du plan d'angle $\pi/6$ et pour k entre 1 et 12,

$$t_k = (\cos(k\pi/6), \sin(k\pi/6)) .$$

Par construction la famille vérifie la propriété (2) des cycles. La propriété (3) résulte de l'injectivité de l'application de $]0; 2\pi]$ dans $\mathbf{R}^2$ qui à t associe $(\cos(t), \sin(t))$. Enfin (t_{12}, t_3) est la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et la propriété (1) en résulte.

En conclusion f est un endomorphisme cyclique d'ordre 12.

Partie III

Question III.1

Soit u un élément de $c(E)$ et (x, y) dans E^2 tels que $u = x + iy$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, x et y sont combinaisons linéaires à coefficients réels de $(e_1, \ldots, e_p)$ et donc u est combinaison linéaire à coefficients complexes de cette même famille.

Soit maintenant $(\lambda_k)_{1 \le k \le p}$ des scalaires tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = 0 .$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{p} Re(\lambda_k) e_k + i \sum_{k=1}^{p} Im(\lambda_k) e_k = 0$$

et il vient, par unicité de la décomposition dans $c(E)$,

$$\sum_{k=1}^{p} Re(\lambda_k) e_k = \sum_{k=1}^{p} Im(\lambda_k) e_k = 0$$

soit, par indépendance linéaire,

$$\forall k \in [1; p] \qquad Re(\lambda_k) = Im(\lambda_k) = 0$$

et donc la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre et, en conclusion, une base de $c(E)$.

Question III.2

Soit u et v deux vecteurs de $c(E)$, λ un scalaire. Par définition on peut trouver des vecteurs de E, x, y, z et t, tels que $u = x + iy$ et $v = z + it$. Par conséquent

$$\tilde{f}(u) = f(x) + if(y) \in c(E)$$

et donc $\tilde{f}$ est à valeurs dans $c(E)$.

De plus

$$\tilde{f}(u+v)=\tilde{f}(x+z+i(y+t))=f(x+z)+if(y+t)=f(x)+f(z)+if(y)+if(t)=\tilde{f}(x+iy)+\tilde{f}(z+it)=\tilde{f}(u)+\tilde{f}(v)$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\lambda u) &= \tilde{f}(Re(\lambda)x-Im(\lambda)y+i(Re(\lambda)y+Im(\lambda)x))\\ &= f(Re(\lambda)x-Im(\lambda)y)+if(Re(\lambda)y+Im(\lambda)x))\\ &= Re(\lambda)f(x)-Im(\lambda)f(y)+iRe(\lambda)f(y)+iIm(\lambda)f(x)\\ &= \lambda(f(x)+if(y))=\lambda\tilde{f}(u)\ .\end{aligned}$$

Par conséquent $\tilde{f}$ est un endomorphisme de $c(E)$.

Soit $(a_{kl})_{1\leq k,l\leq p}$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$\forall l\in[1;p]\qquad \tilde{f}(e_l)=f(e_l)=\sum_{l=1}^{p}a_{kl}e_k$$

et donc $(a_{kl})_{1\leq k,l\leq p}$ est également la matrice de $\tilde{f}$ dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit les matrices de f et $\tilde{f}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont identiques.

Question III.3.a

Les valeurs propres de f sont les racines réelles de son polynôme caractéristique. D'après la question précédente f et $\tilde{f}$ ont même polynôme caractéristique. Aussi si λ est valeur propre réelle de $\tilde{f}$, elle est racine réelle du polynôme caractéristique de $\tilde{f}$ donc aussi de celui de f et est, finalement, valeur propre de f.

Question III.3.b

Comme le polynôme caractéristique de $\tilde{f}$ est à coefficients réels, si λ est une de ses racines, $\bar{\lambda}$ aussi en est une, i.e. l'ensemble des valeurs propres de $\tilde{f}$ est stable par conjugaison complexe.

Soit maintenant λ une valeur propre non réelle de $\tilde{f}$ et u un vecteur propre non nul associé à cette valeur propre. Écrivons u sous la forme $x+iy$ avec x et y dans E. On a

$$\tilde{f}(u)=f(x)+if(y)=\lambda(x+iy)=Re(\lambda)x-Im(\lambda)y+i(Re(\lambda)y+Im(\lambda)x)$$

et donc, par unicité de la décomposition dans $c(E)$

$$\begin{cases} f(x)=Re(\lambda)x-Im(\lambda)y\\ f(y)=Re(\lambda)y+Im(\lambda)x\ .\end{cases}$$

Il en résulte

$$\tilde{f}(x-iy)=f(x)-if(y)=\bar{\lambda}(x-iy)\ .$$

Or l'application de $c(E)$ dans $c(E)$ qui à tout u de la forme $x+iy$ avec x et y dans E associe $x-iy$ est un isomorphisme linéaire par unicité de la décomposition dans $c(E)$. Le calcul précédent montre que l'image de F_λ par cette application est inclus dans $F_{\bar{\lambda}}$ et donc, puisqu'on a affaire à un isomorphisme,

$$\dim(F_\lambda)\leq\dim(F_{\bar{\lambda}})\ .$$

En appliquant ce qui précède à $\bar{\lambda}$ (ce qui est licite puisque c'est également une valeur propre non réelle de $\tilde{f}$), on obtient l'inégalité inverse et donc, finalement,

$$\dim(F_\lambda)=\dim(F_{\bar{\lambda}})\ .$$

Question III.3.c

Puisque u et v sont des combinaisons linéaires de x et y, le sous-espace engendré par u et v est inclus dans celui engendré par x et y.

Mais on a également $x = (u+v)/2$ et $y = (u-v)/2i$ et donc la réciproque est également vraie ; ces deux sous-espaces vectoriels sont donc égaux. Notons-les F.

D'après le calcul de la question précédente, on a

$$\begin{cases} f(x) = Re(\lambda)x - Im(\lambda)y \\ f(y) = Re(\lambda)y + Im(\lambda)x \end{cases}$$

et donc H est stable par f puisque l'image d'une partie génératrice de H par f est incluse dans H.

Comme u et v sont des vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes, ils ne sont pas liés et donc F est de dimension 2. Or $c(H)$ contient H et donc aussi x et y ; il contient donc F. Par conséquent $c(H)$ est de dimension supérieure ou égale à 2, et donc aussi H puisqu'il a même dimension que $c(H)$. Pour finir H est donc de dimension 2, puisqu'engendré par deux vecteurs, et (x, y) est un système générateur de H de cardinal égal à la dimension de H, c'en est donc une base.

Les calculs précédents montre que la matrice de h dans la base (x, y) est

$$\begin{pmatrix} Re(\lambda) & Im(\lambda) \\ -Im(\lambda) & Re(\lambda) \end{pmatrix} .$$

Partie IV

Question IV.1

Le cardinal d'une famille génératrice étant supérieur à la dimension de l'espace n doit être supérieur à p.

Soit I l'ensemble des entiers naturels k compris entre 1 et n tels que la famille $(t_1, \ldots, t_k)$ soit libre. t_1 ne saurait être nul sinon toutes ses images par f le seraient et donc la famille $(t_1, \ldots, t_n)$ serait formée de vecteurs nuls, d'après la propriété (2), et ne pourrait donc être génératrice. Cette contradiction assure que I contient au moins 1 et n'est par conséquent pas vide. Soit donc k son plus grand élément et F le sous-espace engendré par la famille $(t_1, \ldots, t_k)$. Si k est supérieur ou égal à p, la famille $(t_1, \ldots, t_p)$ est libre et est donc une base de E.

Sinon k est strictement inférieur à p et donc aussi à n. Comme la famille $(t_1, \ldots, t_{k+1})$ est liée, on peut trouver des scalaires non tous nuls $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ tels que

$$\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_{k+1} t_{k+1} = 0 .$$

Par indépendance linéaire de $(t_1, \ldots, t_k)$, la nullité de λ_{k+1} impose celle de tous les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ et donc λ_{k+1} n'est pas nul et on peut écrire

$$t_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}} t_i$$

et t_{k+1} appartient à F. La propriété (2) des cycles entraîne alors que F est stable par f, puisque f envoie la famille génératrice de F $(t_1, \ldots, t_k)$ sur une famille d'éléments de F.

Par conséquent F est stable par toutes les itérées de f et, au final, F contient tous les vecteurs de la famille $(t_1, \ldots, t_n)$. Par conséquent F est égal à E, d'après la propriété (1) et ceci est contradictoire avec le fait que k est strictement inférieur à la dimension p de E.

En conclusion la famille $(t_1, \ldots, t_p)$ est une base de E.

Question IV.2

D'après la propriété (2), pour tout entier k entre 1 et $n-1$, on a $f^k(t_1) = t_{k+1}$ et donc f^k n'est pas l'identité. De plus $f^n(t_1) = t_1$ et, pour tout entier k entre 2 et n, on a

$$f^n(t_k) = f^{n+k-1}(t_1) = f^{k-1}(t_1) = t_k$$

et donc f^n est l'identité sur une partie génératrice de E. C'est donc l'identité sur E et f vérifie donc la propriété $\mathcal{P}_n$.

Question IV.3.a

Puisque $(t_1, \ldots, t_p)$ est une base de E, c'est également une base de $c(E)$ d'après III.1 et donc la famille $(t_1, \ldots, t_n)$ engendre $c(E)$.

Pour tout entier k compris entre 1 et n, on a

$$\tilde{f}(t_k) = f(t_k)$$

et donc les propriétés (2) et (3) des cycles sont vérifiées par $(t_1, \ldots, t_n)$ pour $\tilde{f}$. En conclusion cette famille est bien un cycle pour $\tilde{f}$ et cette dernière application est cyclique.

Question IV.3.b

La démonstration de IV.2 n'utilisant pas le corps de base, elle est encore valide dans $c(E)$: d'après la propriété (2), pour tout entier k entre 1 et $n-1$, on a $\tilde{f}^k(t_1) = t_{k+1}$ et donc $\tilde{f}^k$ n'est pas l'identité. De plus $\tilde{f}^n(t_1) = t_1$ et, pour tout entier k entre 2 et n, on a

$$\tilde{f}^n(t_k) = \tilde{f}^{n+k-1}(t_1) = \tilde{f}^{k-1}(t_1) = t_k$$

et donc $\tilde{f}^n$ est l'identité sur une partie génératrice de $c(E)$. C'est donc l'identité sur $c(E)$ et $\tilde{f}$ vérifie donc la propriété $\mathcal{P}_n$.

Question IV.3.c

Soit P le polynôme $X^n - 1$. On a

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n})$$

et les polynômes $(X - e^{2ik\pi/n})_{0\leq k\leq n}$ sont premiers entre eux dans $\mathbf{C}[X]$.

Puisque $\tilde{f}^n = I_{c(E)}$, $P(\tilde{f})$ est nul et donc le lemme de décomposition des noyaux assure

$$c(E) = Ker(P(\tilde{f})) = \oplus_{k=0}^{n-1} Ker(f - e^{2ik\pi/n} I_{c(E)}) \ ,$$

i.e. $\tilde{f}$ est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont des racines n-ièmes de l'unité.

Question IV.4

On a $t_1 = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p$. Soit maintenant k un entier compris entre 2 et p, on a

$$t_k = f^{k-1}(t_1) = \alpha_1 f^{k-1}(u_1) + \ldots + \alpha_p f^{k-1}(u_p)$$

et donc

$$t_k = \alpha_1 \lambda_1^{k-1} u_1 + \ldots + \alpha_p \lambda_p^{k-1} u_p \ .$$

Par conséquent les coordonnées de t_k dans la base $(u_1, \ldots, u_p)$ sont $(\alpha_1\lambda_1^{k-1}, \ldots, \alpha_p\lambda_p^{k-1})$.

Le déterminant de la famille $(t_1, \ldots, t_p)$ par rapport à la base $(u_1, \ldots, u_p)$ est donc

$$\det((\alpha_i\lambda_i^{j-1})_{1\leq i,j\leq p}) = \left(\prod_{i=1}^{p}\alpha_i\right)\det((\lambda_i^{j-1})_{1\leq i,j\leq p}) = \left(\prod_{i=1}^{p}\alpha_i\right)\prod_{1\leq i<j\leq p}(\lambda_j - \lambda_i)$$

d'après la propriété des déterminants de Vandermonde.

Comme $(t_1, \ldots, t_p)$ est une base de E, ce déterminant est non nul et en particulier toutes les valeurs propres de $\tilde{f}$ sont distinctes deux à deux. Autrement dit chaque sous-espace propre de $\tilde{f}$ est de dimension 1.

Question IV.5

D'après ce qui précède on a, en notant F_λ le noyau (éventuellement nul) de $\tilde{f} - \lambda I_{c(E)}$,

$$c(E) = F_1 \oplus F_{-1} \oplus (\oplus_{\lambda^n=1\neq\lambda^2} F_\lambda) \ .$$

Or d'après III.3 le dernier terme de cette somme directe est de dimension paire. Il en résulte que $dim(F_1) + dim(F_{-1})$ est impair. Comme c'est la somme de deux termes chacun soit nul soit égal à 1, c'est que l'un d'eux est de dimension 1 et l'autre est nul. En d'autres termes $\tilde{f}$ admet une seule valeur propre réelle et celle-ci est soit 1 soit -1.

Notons maintenant $(\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_q, \bar{\lambda}_q)$ les valeurs propres non réelles de $\tilde{f}$. Pour tout entier k entre 1 et q, notons u_k un vecteur propre non nul associé à λ_k et v_k le vecteur obtenu à partir de u_k par le procédé de III.3.c. Notons enfin x_k et y_k les vecteurs obtenus à partir de u_k et v_k dans cette même question et H_k le sous-espace de E engendré par x_k et y_k.

Notons x un vecteur propre non nul de f pour la valeur propre réelle de $\tilde{f}$. Un tel x existe d'après III.3.a.

Montrons que la famille $(x, x_1, y_1, \ldots, x_q, y_q)$ est libre. Soit en effet des scalaires $(\alpha, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_q, \beta_q)$ tels que

$$\alpha x + \sum_{k=1}^{q} (\alpha_k x_k + \beta_k y_k) = 0 \,.$$

On a alors

$$\alpha x + \sum_{k=1}^{q} \left(\frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} u_k + \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} v_k\right) = 0$$

et donc, par indépendance de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes,

$$\forall k \in [1; q] \qquad \alpha_k - i\beta_k = \alpha_k + i\beta_k = \alpha = 0 \,.$$

Ce qui prouve bien le résultat annoncé.

Il en résulte que $(x, x_1, y_1, \ldots, x_q, y_q)$ est une base de E et, d'après III.3.c, pour tout entier k compris entre 1 et q, H_k est stable par f et la restriction de f à H_k admet

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & \sin(\theta_k) \\ -\sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$$

comme matrice dans la base (x_k, y_k) si $\lambda_k = e^{i\theta_k}$.

Comme tous les λ_k sont des racines n-ièmes de l'unité on obtient bien la forme désirée pour la matrice de f dans la base que l'on vient de construire.

Question IV.6

L'argument du début de IV.5 montre cette fois-ci que $dim(F_1) + dim(F_{-1})$ est paire, ce qui prouve que 1 et -1 sont simultanément valeurs propres ou simultanément non valeurs propres. Dans le premier cas -1 est alors une racine n-ième de l'unité et donc n est pair.

Si F_1 et F_{-1} sont de dimension 1, on note x et y des vecteurs propres non nuls de f associés à 1 et -1 respectivement. On note $(x_1, y_1, \ldots, x_q, y_q)$ des vecteurs comme précédemment. La famille $(x, y, x_1, y_1, \ldots, x_q, y_q)$ (si 1 et -1 sont valeurs propres de f) ou la famille $(x_1, y_1, \ldots, x_q, y_q)$ (dans le cas contraire) est une base de E dans laquelle f admet pour matrice une matrice de la forme désirée.