

# Première épreuve CAPES Agricole 1997

François Sauvageot

11 janvier 2002

## Partie I

**Question I.1.1** La fonction  $\varphi$  étant continue, en tant que produit d'une exponentielle et d'une fonction puissance généralisée (définie sur  $\mathbf{R}_+^*$ ), elle est localement intégrable sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

Par ailleurs elle est équivalente à  $t \mapsto t^{x-1}$  en 0 à droite et est donc localement intégrable en 0 par le critère de Riemann, puisque  $x$  est strictement positif.

Enfin elle se comporte en  $+\infty$  comme un  $o(1/t^2)$  et y est donc également localement intégrable. Il en résulte que  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbf{R}_+^*$  ou, autrement dit,  $E$  contient la fonction constante égale à 1 (et en fait toutes les fonctions constantes).

**Question I.1.2** Soit  $C$  l'espace vectoriel réel des fonctions numériques continues sur  $\mathbf{R}_+^*$  et  $L^2$  le sous-espace de  $C$  formé des fonctions de carré intégrable sur  $\mathbf{R}_+^*$ . La fonction  $\varphi$  est strictement positive, sa racine carrée existe donc et est également strictement positive. De plus, comme  $\sqrt{\varphi}$  ne s'annule nulle part, la multiplication par  $\sqrt{\varphi}$  est un isomorphisme linéaire de  $C$  sur lui-même. Or  $E$  est l'image réciproque de  $L^2$  par cette application linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de  $C$  et donc, a fortiori, un espace vectoriel réel.

**Question I.1.3** L'application, définie sur  $E \times E$ ,  $(f_1, f_2) \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi f_1 f_2$  est l'image par l'isomorphisme défini en I.1.2 du produit scalaire standard sur  $L^2$ . C'est donc un produit scalaire sur l'image de  $L^2$  par cette application, i.e. sur  $E$ .

*Remarque* : plus prosaïquement, on peut démontrer que l'application précédente est bilinéaire et symétrique (ce qui est direct), puis qu'elle est définie positive. Ceci résulte du fait que, si  $f$  appartient à  $E$ ,  $\varphi f^2$  est continue et positive et ne peut donc être d'intégrale nulle sur  $\mathbf{R}_+^*$  que si elle est nulle, i.e. si et seulement si  $f$  est nulle, par non annulation de  $\varphi$ .

**Question I.1.4** Tout produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui est l'inégalité demandée.

*Remarque* : donnons une démonstration directe. Pour tout réel  $t$ , la quantité  $(f_1 + t f_2, f_1 + t f_2)$  est positive. Par linéarité et symétrie, cette quantité s'identifie au trinôme du second degré  $(f_2, f_2)t^2 + 2(f_1, f_2)t + (f_1, f_1)$  qui, par non annulation sur  $\mathbf{R}$ , possède un discriminant réduit négatif. On a donc  $(f_1, f_2)^2 - (f_1, f_1)(f_2, f_2) \leq 0$ , ce qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Question I.1.5** Une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $y$  est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive (au sens large) sur cet intervalle. Comme  $f$  est une fonction numérique strictement positive sur  $\mathbf{R}_+^*$ , son logarithme  $y$  est défini. Comme elle y est de plus deux fois dérivable, par composition,  $\ln(f)$  l'est aussi et on a  $(\ln \circ f)'' = (f'/f)' = (f''f - f'^2)/f^2$ .

Il en résulte, par positivité de  $f^2$ , que  $\ln \circ f$  est convexe sur  $\mathbf{R}_+^*$  si et seulement si  $f''f - f'^2$  est positive, ce qui est l'assertion cherchée.

**Question I.2.1** Soit  $x$  un réel strictement positif, on a

$$h(x+1) = f(x+1) - g(x+1) = f(x) + a(x) - g(x) - a(x) = f(x) - g(x) = h(x)$$

et donc  $h$  est 1-périodique.

**Question I.2.2** Soit  $x$  un réel supérieur ou égal à 1 et  $n$  sa partie entière. En particulier  $n$  est un entier naturel non nul et donc  $a$  et  $h$  sont définies en  $n$ .

Par décroissance de  $f$  et  $g$ , on a

$$f(n+1) - a(n) = f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) \quad \text{et} \quad g(n+1) - a(n) = g(n) \geq g(x) \geq g(n+1).$$

Il vient

$$h(n+1) - a(n) \geq h(x) \geq h(n+1) + a(n) \quad \text{et} \quad |h(x) - h(n+1)| \leq -a(n).$$

Si maintenant  $p$  est entier naturel quelconque, la partie entière de  $x + p$  est  $n + p$  et l'inégalité précédente, écrite en  $x + p$ , donne

$$|h(x+p) - h(n+p+1)| \leq -a(n+p) \quad \text{et donc, par 1-périodicité de } h, \quad |h(x) - h(n+1)| \leq -a(n+p).$$

**Question I.2.3** Par 1-périodicité de  $h$ , le résultat précédent s'écrit

$$\forall x \in [1; +\infty[ \quad \exists n \in \mathbf{N}^* \quad \forall p \in \mathbf{N} \quad |h(x) - h(1)| \leq -a(n+p).$$

Lorsque  $p$  tend vers l'infini le terme de droite tend vers 0 par hypothèse sur  $a$  et donc, par le théorème d'encadrement des limites, le terme de gauche est nul. Il en résulte que  $h$  est constante sur  $[1; +\infty[$  et donc, par 1-périodicité, sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

## Partie II

**Question II.1.1** Remarquons que la formule générale donnée pour  $u_n$  est encore valide lorsque  $n$  vaut 1. De plus, pour  $n$  entier naturel non nul,  $u_n$  est somme d'une fonction affine et du logarithme d'une fonction affine à valeurs dans  $[-1/n; +\infty[$  et est donc bien définie sur  $\mathbf{R}_+^*$  et y est indéfiniment dérivable.

Soit  $x$  un réel strictement positif, pour  $n$  tendant vers l'infini, on a

$$u_n(x) = \frac{x-1}{n} - \frac{(x-1)^2}{2n^2} - \frac{x-1}{n} - \frac{x-1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{x(x-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc, par le théorème de comparaison des séries et le critère de Riemann, la série  $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n$  est simplement (et même absolument) convergente sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

**Question II.1.2** Soit  $n$  un entier naturel strictement supérieur à 1. On a déjà justifié l'existence de  $u_n''$  à la question précédente. De plus on a

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad u_n''(x) = -\frac{1}{(x+n-1)^2} \quad \text{et donc} \quad \forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad |u_n''(x)| \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

D'après le critère de Riemann, il en résulte que la série  $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n''$  est normalement, donc uniformément, convergente sur  $\mathbf{R}_+^*$ . A fortiori elle l'est sur tout compact de  $\mathbf{R}_+^*$ .

**Question II.1.3** Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $u_n'(1) = \frac{1}{n} + \ln(1 - 1/n)$  et donc  $u_n'(1) \sim -1/n^2$  pour  $n$  tendant vers l'infini. Le critère de Riemann assure que la série  $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n'(1)$  est convergente et donc la série  $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n'$  est convergente en au moins un point.

**Question II.1.4** D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, il résulte de II.1.2 et II.1.3 que la série  $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n'$  est uniformément convergente sur tout compact de  $\mathbf{R}_+^*$ , y est de classe  $C^1$  et de dérivée égale à  $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n''$ .

Il en résulte que  $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n'$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}_+^*$  et admet  $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n''$  comme dérivée.

*Remarque* : il est important de se rappeler que  $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n'$  n'est pas uniformément convergente sur  $\mathbf{R}_+^*$  bien qu'elle le soit sur tout compact de cet ensemble. La continuité et la dérivabilité sont des notions locales mais pas la notion de convergence uniforme. Et même, malgré le caractère uniforme de la convergence de  $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n''$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ , la série  $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n'$  ne converge pas uniformément sur un intervalle non borné.

**Question II.1.5** D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, il résulte de II.1.1 et de la convergence uniforme de  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u'_n$  sur tout compact de  $\mathbf{R}_+^*$  (résultat cité en II.1.4) que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  est uniformément convergente sur tout compact de  $\mathbf{R}_+^*$ ,  $y$  est de classe  $C^1$  et de dérivée égale à  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u'_n$ .

En particulier  $U$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}_+^*$  et admet  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u'_n$  comme dérivée. Il résulte de II.1.4 que  $U$  est en fait de classe  $C^2$  sur ce même intervalle et  $y$  admet des dérivées première et seconde obtenues par dérivation sous le signe somme.

*Remarque* : il est ici aisé de se convaincre que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  ne converge pas sur un intervalle non majoré. En effet, si  $k$  et  $n$  sont deux entiers naturels non nuls, on a  $u_{kn}(n+1) = \ln(1 + 1/k) + n \ln(1 - 1/kn)$ , ce qui est équivalent, pour  $n$  tendant vers l'infini, à  $\ln(1 + 1/k) - 1/k$ . En particulier la suite  $(u_{2n}(n+1) - u_n(n+1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne tend pas vers 0 et ceci est incompatible avec le critère de Cauchy uniforme.

**Question II.1.6** Soit  $x$  un réel strictement positif et  $n$  un entier naturel non nul, on a

$$\sum_{k=1}^n u_k(x) = \ln \left( \frac{x(x+1) \dots (x+n-1)}{n!} \right) + (x-1) \ln \frac{1}{n} = \ln \left( \frac{x(x+1) \dots (x+n-1)}{n! n^{x-1}} \right)$$

et donc

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x(x+1) \dots (x+n-1)}{n! n^{x-1}} \right) .$$

**Question II.2.1** Par linéarité du passage à la limite et continuité du logarithme, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad U(x+1) - U(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \ln \left( \frac{(x+1) \dots (x+n)}{n! n^x} \right) - \ln \left( \frac{x(x+1) \dots (x+n-1)}{n! n^{x-1}} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+n}{nx} = \ln \frac{1}{x} = -\ln(x) \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $u_n(1)$  est nul et  $u_n$  est concave (par concavité du logarithme et des fonctions affines). Il en résulte que  $U$  vérifie les mêmes propriétés et donc qu'elle est solution du problème fonctionnel P1.

*Remarque* : il est probable que l'auteur attendait une démonstration de la concavité de  $U$  par négativité de sa dérivée seconde puisque c'est le seul endroit où on pourrait se servir de  $U''$ . Un calcul direct montre la négativité de  $u''_n$  pour tout entier naturel non nul  $n$ . Néanmoins il n'est nullement obligatoire de rentrer dans ce schéma . . . bien au contraire !

**Question II.2.2** Soit  $g$  la fonction  $U'$ . Elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad g(x+1) - g(x) = -\frac{1}{x}$$

par dérivation de la relation vérifiée par  $U$ . De plus, par concavité de  $U$ ,  $g$  est décroissante. D'après I.2.3 les seules fonctions décroissantes vérifiant la même équation fonctionnelle que  $g$  sont ses translatées.

Par ailleurs une fonction croissante ne peut vérifier cette équation fonctionnelle car, pour tout réel strictement positif  $x$ , le signe de  $f(x+1) - f(x)$  est positif pour une fonction croissante.

Il en résulte que les fonctions monotones vérifiant, pour tout réel strictement positif,  $f(x+1) - f(x) = -1/x$  sont les fonctions de la forme  $U' + a$ , avec  $a$  réel quelconque.

**Question II.2.3** Soit  $V$  une solution dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$  du problème P1. Par dérivation de P1 et concavité de  $V$ , la fonction  $V'$  est alors une solution monotone de l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad f(x+1) - f(x) = -\frac{1}{x} .$$

Il en résulte que  $V'$  ne diffère de  $U'$  que d'une constante et donc  $V$  ne diffère de  $U$  que d'une fonction affine. Par ailleurs  $U - V$  est une fonction 1-périodique (puisque  $U$  et  $V$  vérifient la même équation fonctionnelle), nulle en 1 (puisque  $U$  et  $V$  le sont). Comme elle est affine, c'est la fonction nulle. Autrement dit  $V = U$  et  $U$  est donc l'unique solution dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$  du problème fonctionnel P1.

**Partie III**

**Question III.1.1** *Remarque* : rappelons que  $F$  est plus connue sous le nom de fonction  $\Gamma$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Puisque la fonction  $(t, x) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$  est continue sur  $\mathbf{R}_+^* \times [1/n; n]$ , le théorème de continuité des intégrales (propres) à paramètres assure que  $F_n$  est continue sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

**Question III.1.2** La suite de fonctions  $(F_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge simplement vers  $F$  d'après I.1.1.

Soit  $[a; b]$  un intervalle compact non vide de  $\mathbf{R}_+^*$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Les suites  $(F_n(a))_{n \in \mathbf{N}^*}$  et  $(F_n(b))_{n \in \mathbf{N}^*}$  étant convergentes, elles sont de Cauchy et on peut donc trouver un entier naturel non nul  $N$  vérifiant

$$\forall (n, m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \quad (n \geq N \text{ et } m \geq N) \Rightarrow (|F_n(a) - F_m(a)| \leq \varepsilon \text{ et } |F_n(b) - F_m(b)| \leq \varepsilon) .$$

Soit maintenant  $n$  et  $m$  deux entiers supérieurs à  $N$ , avec  $n$  supérieur à  $m$ , et  $t$  un réel strictement positif. Sur l'intervalle  $[a; b]$ , la fonction  $x \mapsto t^{x-1}$  est monotone. Elle est décroissante ou croissante selon que  $t$  est inférieur ou supérieur à 1. Il en résulte

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F_m(x)| &\leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} e^{-t}t^{x-1}dt + \int_m^n e^{-t}t^{x-1}dt \\ &\leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} e^{-t}t^{a-1}dt + \int_m^n e^{-t}t^{b-1}dt \\ &\leq |F_n(a) - F_m(a)| + |F_n(b) - F_m(b)| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

et on en déduit que la suite  $(F_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  satisfait au critère de Cauchy uniforme sur  $[a; b]$  et donc y converge uniformément. Par suite elle converge uniformément sur tout compact de  $\mathbf{R}_+^*$ .

**Question III.1.3** Comme  $F$  est limite uniforme, sur tout compact de  $\mathbf{R}_+^*$ , de fonctions continues, elle est continue sur tout tel compact et, par conséquent, continue sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

**Question III.1.4** *Remarque* : il est à noter que  $\partial/\partial x$  n'est pas une fonction mais évidemment un opérateur.

Soit  $x$  un réel strictement positif et  $\psi$  l'intégrand de  $\Phi(x)$ . On a, pour tout  $t$  réel strictement positif,  $\psi(t) = e^{-t} \ln(t)t^{x-1}$ . C'est donc une fonction continue, en tant que produit d'une exponentielle, d'un logarithme et d'une fonction puissance généralisée (définie sur  $\mathbf{R}_+^*$ ); elle est donc localement intégrable sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

Par ailleurs elle est équivalente à  $t \mapsto t^{x-1} \ln(t)$  en 0 à droite et est donc localement intégrable en 0 par le critère de Bertrand, puisque  $x$  est strictement positif.

Enfin elle se comporte en  $+\infty$  comme un  $o(1/t^2)$  et y est donc également localement intégrable. Il en résulte que  $\psi$  est intégrable sur  $\mathbf{R}_+^*$  ou, autrement dit,  $\Phi$  est définie en  $x$ . Par suite  $\Phi$  est définie sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

**Question III.1.5** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Puisque la fonction  $(t, x) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}_+^* \times [1/n; n]$ , le théorème de dérivabilité des intégrales (propres) à paramètres assure que  $F_n$  est dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

*Remarque* : on n'a bien sûr besoin que de la différentiabilité en  $x$  et du caractère continu, par rapport aux deux variables, de cette différentielle partielle. Mais écrire cela est assurément plus long et délicat que de donner un argument moins fin.

**Question III.1.6** Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $F_n'$  est donnée par dérivation sous le signe somme. La suite  $(F_n')_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge donc simplement vers  $\Phi$ .

Soit  $x$  un réel strictement positif et  $n$  un entier naturel non nul. On note  $I_n(x)$  et  $J_n(x)$  les intégrales suivantes :

$$I_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^1 e^{-t} \ln(t)t^{x-1}dt \quad \text{et} \quad J_n(x) = \int_1^n e^{-t} \ln(t)t^{x-1}dt .$$

Les considérations précédentes assurent que ces quantités sont bien définies et que les suites  $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  et  $(J_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  convergent simplement sur  $\mathbf{R}_+^*$  respectivement vers les fonctions

$$x \mapsto \int_0^1 e^{-t} \ln(t) t^{x-1} dt \quad \text{et} \quad x \mapsto \int_1^{+\infty} e^{-t} \ln(t) t^{x-1} dt .$$

Soit  $[a; b]$  un intervalle compact non vide de  $\mathbf{R}_+^*$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Les suites  $(I_n(a))_{n \in \mathbf{N}^*}$  et  $(J_n(b))_{n \in \mathbf{N}^*}$  étant convergentes, elles sont de Cauchy et on peut donc trouver un entier naturel non nul  $N$  vérifiant

$$\forall (n, m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \quad (n \geq N \quad \text{et} \quad m \geq N) \Rightarrow (|I_n(a) - I_m(a)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |J_n(b) - J_m(b)| \leq \varepsilon) .$$

Soit maintenant  $n$  et  $m$  deux entiers supérieurs à  $N$ , avec  $n$  supérieur à  $m$ , et  $t$  un réel strictement positif. De l'argument de monotonie cité en III.1.2 il résulte

$$\begin{aligned} |\Phi_n(x) - \Phi_m(x)| &\leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} e^{-t} |\ln(t)| t^{x-1} dt + \int_m^n e^{-t} \ln(t) t^{x-1} dt \\ &\leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} e^{-t} |\ln(t)| t^{a-1} dt + \int_m^n e^{-t} \ln(t) t^{b-1} dt \\ &\leq |I_n(a) - I_m(a)| + |J_n(b) - J_m(b)| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

et on en déduit que la suite  $(\Phi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  satisfait au critère de Cauchy uniforme sur  $[a; b]$  et donc y converge uniformément. Par suite elle converge uniformément sur tout compact de  $\mathbf{R}_+^*$ .

*Remarque :* cet argument de monotonie, qui montre que la convergence simple entraîne la convergence uniforme quand la suite de fonctions est monotone, est connu sous le nom de théorème de Dini.

**Question III.1.7** Puisque la suite  $(F_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge simplement vers  $F$  et que la suite de ses dérivées converge uniformément sur tout compact de  $\mathbf{R}_+^*$  vers  $\Phi$ , le théorème de dérivation des suites de fonctions assure que  $F$  est dérivable sur tout compact de  $\mathbf{R}_+^*$  et de dérivée  $\Phi$ . Il en résulte que  $F$  est dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$  et y admet  $\Phi$  comme dérivée.

**Question III.2.1** Soit  $x$  un réel strictement positif et  $n$  un entier naturel non nul. Par intégration par parties, il vient

$$F_n(x+1) = \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t} t^x dt = [-e^{-t} t^x]_{\frac{1}{n}}^n + x \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t} t^{x-1} dt = \frac{1}{e^{1/n} n^x} - \frac{n^x}{e^n} + x F_n(x)$$

et donc, par passage à la limite,  $F(x+1) = xF(x)$ .

De plus

$$F(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 .$$

**Question III.2.2** Soit  $x$  un réel strictement positif. On se place dans l'espace vectoriel  $E$ , défini en I. On note  $f_1$  la fonction constante égale à 1 sur  $\mathbf{R}_+^*$  et  $f_2$  la fonction logarithme. Ce sont deux éléments de  $E$  d'après I.1.1 et III.1.4. On a de plus, puisque  $\Phi = F'$  et d'après III.1.7,  $F(x) = (f_1, f_1)$ ,  $F'(x) = (f_1, f_2)$  et  $F''(x) = (f_2, f_2)$ . Il résulte donc de I.1.4  $F'^2(x) \leq F(x)F''(x)$ . Aussi, par I.1.5, puisque  $F$  est deux fois dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$  et strictement positive en tant qu'intégrale d'une fonction strictement positive,  $\ln(F)$  est convexe.

*Remarque :* en fait le critère I.1.5 est équivalent au fait que la forme quadratique  $(u, v) \mapsto F(x)u^2 + 2F'(x)uv + F''(x)v^2$  est définie positive, pour tout réel strictement positif  $x$ . Ceci montre que la somme de fonctions logarithmiquement convexes l'est aussi, puisqu'on vient d'exhiber un critère additif. Il en est donc de même pour une intégrale, par passage à la limite. Or, pour tout réel  $t$  strictement positif, la fonction, définie sur  $\mathbf{R}_+^*$ ,  $x \mapsto \ln(e^{-t} t^{x-1})$  est convexe puisqu'elle est affine ; il en résulte que  $F$  est logarithmiquement convexe.

**Question III.3.1** Comme  $F$  est logarithmiquement convexe, elle est convexe. Sa dérivée, puisqu'elle existe, est donc croissante.

*Remarque* : je présume que l'auteur du sujet attendait un autre argument. Par exemple le fait que l'intégrand de  $\Phi$ , à savoir  $e^{-t} \ln(t)t^{x-1}$  est une fonction croissante de  $x$  pour tout réel strictement positif  $t$ . Ou encore que l'intégrand de  $F''(x)$  est une fonction strictement positive, sauf pour  $t$  égal à 1, et donc  $F''$  est une fonction strictement positive.

**Question III.3.2** Par concavité du logarithme, cette fonction est en dessous de sa tangente en 1. Par conséquent, pour tout réel strictement positif  $t$ , on a  $\ln(t) \leq t - 1$ . Par stricte concavité, l'inégalité est en fait stricte pour  $t$  distinct de 1. Il en résulte

$$F'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt < \int_0^{+\infty} e^{-t} (t - 1) dt = [-te^{-t}]_0^{+\infty} = 0.$$

De plus, par intégration par parties et positivité du logarithme sur  $]1; +\infty[$ , on a

$$\begin{aligned} F'(2) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)t dt = [-e^{-t}t \ln(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln(t) + 1) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt + F(1) \\ &> \int_0^1 e^{-t} \ln(t) dt + 1 = \int_0^1 \ln(t) dt + 1 = [t(\ln(t) - 1)]_0^1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Par continuité de  $F'$ , le théorème des valeurs intermédiaires entraîne l'existence d'un réel  $\alpha$  dans  $]1; 2[$  où  $F'$  s'annule.

**Question III.3.3** On a remarqué en III.3.1 que  $F''$  est une fonction strictement positive. Il en résulte que  $F'$  est strictement croissante et donc qu'elle ne s'annule qu'en au plus un point. D'après III.3.2  $F'$  est donc strictement négative sur  $]0; \alpha[$  et strictement positive sur  $]\alpha; +\infty[$ . Autrement dit  $F$  est strictement décroissante sur  $]0; \alpha[$  et strictement croissante sur  $]\alpha; +\infty[$ .

**Question III.3.4** Par continuité de  $F$  en 1 et par III.2.1, on a  $1 = F(1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xF(x)$  c'est-à-dire  $F(x) \sim 1/x$  en 0 à droite.

**Question III.3.5** Il résulte de l'équivalent précédent que  $F(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0 à droite.

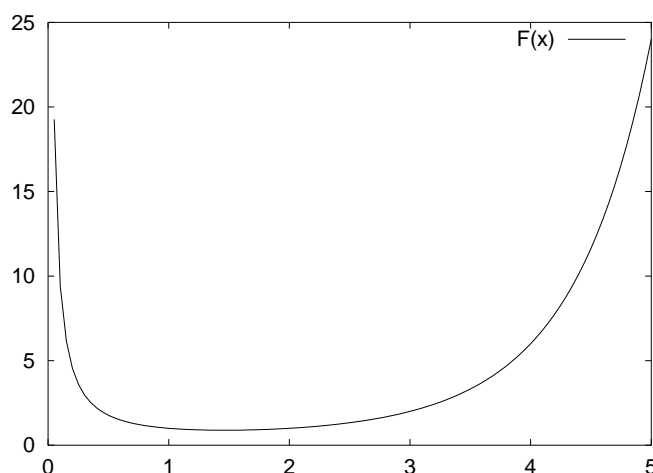
**Question III.3.6** Comme  $F$  est convexe (puisque logarithmiquement convexe), son graphe est au-dessus de sa tangente en 2. Comme c'est une droite de pente strictement positive, d'après III.3.2,  $F(x)$  tend  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

*Remarque* : si on veut juste utiliser la convexité de  $\ln(F)$ , on peut écrire, par croissance de l'exponentielle et puisque  $F(2) = 1.F(1) = 1$ ,

$$F(x) = \exp(\ln(F(x))) \geq \exp\left(\frac{F'(2)}{F(2)}(x - 2)\right) = \frac{\exp(F'(2)x)}{\exp(2F'(2))}$$

et on en déduit que  $F$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  au moins aussi vite qu'une exponentielle.

**Question III.3.7**



**Partie IV**

**Question IV.1** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques définies sur  $\mathbf{R}_+^*$  avec  $g$  strictement positive et telles que  $f = -\ln(g)$ . On a

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad (g(x+1) = xg(x) \Leftrightarrow f(x+1) = -\ln(x) + f(x))$$

et, de plus,  $f$  est concave si et seulement si  $\ln(g)$  est convexe, et  $g(1)$  vaut 1 si et seulement si  $f(1)$  vaut 0.

De plus l'application  $u : g \mapsto -\ln(g)$  est une bijection de l'ensemble des fonctions numériques strictement positives sur  $\mathbf{R}_+^*$  dans l'ensemble des fonctions numériques sur  $\mathbf{R}_+^*$ , de bijection réciproque  $f \mapsto \exp(-f)$ .

On a donc équivalence entre les problèmes  $P1$  et  $P2$ ,  $g$  étant solution de  $P2$  si et seulement si  $u(g)$  est solution de  $P1$ .

**Question IV.2** Puisque  $F$  est solution de  $P2$ ,  $-\ln(F)$  est solution de  $P1$ . C'est de plus une fonction dérivable, par composition. D'après II.2.3 on a donc  $U = -\ln(F)$  ou encore  $F = \exp(-U)$ . Par continuité de l'exponentielle et par II.1.6, il vient

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad F(x) = \exp\left(-\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!n^{x-1}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

**Partie V**

**Question V.1.1** Soit  $n$  un entier naturel non nul. La fonction  $v_n$  est indéfiniment différentiable sur  $[0; n]$  en tant que somme d'une exponentielle et d'une fonction puissance. De plus, pour  $t$  dans  $[0; n]$ , on a

$$v_n'(t) = -\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} + e^{-t} = e^{-t} \left(1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}\right)$$

et donc, si  $n$  est strictement supérieur à 1 et  $t$  distinct de  $n$ ,

$$v_n'(t) = e^{-t} \left(1 - e^{(n-1)h_n(t)}\right).$$

Si  $n$  est égal à 1, on a  $v_1'(t) = e^{-t} - 1$  et donc  $v_1'$  est strictement négative sur  $]0; 1[$  et  $v_1$  est strictement décroissante sur  $[0; 1]$ .

On se place dans le cas où  $n$  est strictement supérieur à 1 et  $t$  est distinct de  $n$ . En tant que somme d'une fonction strictement concave et d'une fonction affine sur  $[0; n]$ ,  $h_n$  est strictement concave sur  $[0; n]$ .

Au voisinage de 0,  $h_n$  est équivalente à  $t/(n-1) - t/n$ , i.e. à  $t/n(n-1)$ . Elle est donc strictement positive dans un voisinage épointé de 0 (à droite). Comme elle tend vers  $-\infty$  en  $n$ , à gauche, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe  $\beta$  dans  $]0, n[$  où  $h_n$  s'annule.

Par stricte concavité,  $h_n$  ne peut s'annuler plus deux fois sur  $[0; n]$ . Comme elle est continue, il en résulte que  $h_n$  est strictement positive sur  $]0, \beta[$  et strictement négative sur  $]\beta; n[$ . Par conséquent  $v_n'$  est strictement négative sur  $]0; \beta[$  et strictement positive sur  $]\beta; n[$  et donc  $v_n$  est strictement décroissante sur  $[0; \beta]$  et strictement croissante sur  $[\beta; n]$ .

**Question V.1.2** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Comme  $v_n(0)$  est nul et  $v_n(n)$  est strictement négatif, l'étude de V.1.1 montre que  $v_n$  est strictement négative sur  $]0; n]$ . L'inégalité recherchée en résulte.

**Question V.1.3** Comme  $v_1$  est strictement décroissante et négative, le maximum de  $|v_1|$  est atteint en 1 et vaut donc  $1/e$ . Si on pose  $\alpha_1 = 1$ , on a donc

$$\alpha_1 \in [1; 1] \quad \text{et} \quad \sup_{t \in [0; 1]} |v_1(t)| = \frac{\alpha_1 e^{-\alpha_1}}{1}.$$

Soit maintenant  $n$  un entier naturel strictement supérieur à 1. Le maximum de  $|v_n|$  est atteint, d'après l'étude faite en V.1.1, au point où  $h_n$  s'annule. Notons-le  $\alpha_n$ . Comme on a (toujours par concavité du logarithme)

$$h_n(1) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n-1} \leq -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \leq 0$$

il vient  $\alpha_n \geq 1$  puisque  $h_n$  est strictement positive sur  $] \alpha_n; n[$ . Par ailleurs, puisque  $h_n(\alpha_n)$  est nul, on a

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-1} &= e^{-\alpha_n} \quad \text{et donc} \quad \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right) e^{-\alpha_n} \\ \text{d'où} \quad v_n(\alpha_n) &= -\frac{\alpha_n}{n} e^{-\alpha_n} \quad \text{et} \quad \sup_{t \in [0; n]} |v_n(t)| = \frac{\alpha_n}{n} e^{-\alpha_n} \end{aligned}$$

**Question V.1.4 Remarque :** c'est évidemment la suite  $(v_n)_{n \geq A}$  qui converge uniformément vers 0 sur  $[0; A]$ .

Soit donc  $n$  un entier naturel supérieur à  $A$ . Puisque l'exponentielle est convexe, elle est au-dessus de sa tangente en 0. Par conséquent, pour tout réel  $t$ ,  $e^{t-1} \geq 1 + (t-1)$  ou encore  $te^{-t} \leq e^{-1}$ . En particulier  $\sup_{t \in \mathbf{R}} te^{-t} = e^{-1}$ . Il vient

$$\sup_{t \in [0; A]} |v_n(t)| \leq \sup_{t \in [0; n]} |v_n(t)| = \frac{1}{n} \alpha_n e^{-\alpha_n} \leq \frac{1}{n} \sup_{t \in [1; +\infty[} te^{-t} = \frac{1}{en}$$

Il en résulte, par le théorème d'encadrement des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0; A]} |v_n(t)| = 0$$

i.e. la suite  $(v_n)_{n \geq A}$  converge uniformément vers 0 sur  $[0; A]$ .

**Question V.2.1** Puisque l'intégrale définissant  $F(x)$  est convergente, il existe un réel  $A$  tel que

$$\left| \int_A^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right| \leq \varepsilon$$

et donc, a fortiori vérifiant l'inégalité recherchée.

**Question V.2.2** Soit  $n$  un entier naturel supérieur à  $n_0$ , par positivité de l'intégrale et de l'intégrand et d'après V.1.2, on a

$$0 \leq \int_A^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \leq \int_A^n t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_A^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \leq \varepsilon.$$

**Question V.2.3** Soit  $n$  un entier naturel supérieur à  $n_0$ . Posons  $K = 1/e$ . Il vient alors, d'après V.1.4, V.2.1 et V.2.2,

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = - \int_0^A v_n(t) t^{x-1} dt + \int_A^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt - \int_A^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

et donc

$$\left| \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \right| \leq \sup_{0 \leq u \leq A} |v_n(u)| \int_0^A t^{x-1} dt + 2\varepsilon \leq 2\varepsilon + \frac{K}{n} \int_0^A t^{x-1} dt.$$

**Question V.2.4** Il résulte de la question précédente

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \quad \exists n_1 \in \mathbf{N}^* \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \left( n \geq n_1 \Rightarrow \left| \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \right| \leq 3\varepsilon \right)$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

ce qui est la relation (R).



**Question V.3.1** Par changement de variable linéaire  $t/n \mapsto t$ , on a

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt$$

et donc la question précédente assure

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt.$$

**Question V.3.2** Je ne vois pas ce que l'auteur attend comme réponse. En voici une !

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $x$  un réel strictement positif. On a

$$\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \int_0^1 t^{x+k-1} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{C_n^k}{x+k}.$$

**Question V.3.3** Il résulte de la question précédente

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{C_n^k n^x}{x+k}.$$

## Partie VI

**Question VI.1.1** Soit  $n$  un entier naturel ; la fonction  $S_n$  est une fonction positive sur  $\mathbf{R}$ , localement intégrable sur  $\mathbf{R}^*$  car elle y est continue. Son intégrabilité locale en 0 et  $+\infty$  résulte de l'étude menée en I.1.1. C'est donc une densité de probabilité si et seulement si son intégrale sur  $\mathbf{R}$  vaut 1. Or, par changement de variable linéaire  $t/2 \mapsto t$ , on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-t/2} dt = 2 \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt = 2F\left(\frac{n}{2}\right)$$

et donc  $S_n$  est une densité de probabilité si et seulement si  $A(n)$  est égal à  $1/2F(n/2)$ .

**Question VI.1.2** On a, grâce à la relation III.2.1,

$$E(X) = A(n) \int_0^{+\infty} t \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-t/2} dt = 4A(n)F\left(\frac{n}{2} + 1\right) = 2 \frac{F(n/2 + 1)}{F(n/2)} = 2 \frac{n}{2} = n$$

et

$$E(X^2) = A(n) \int_0^{+\infty} t^2 \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-t/2} dt = 8A(n)F\left(\frac{n}{2} + 2\right) = 4 \frac{F(n/2 + 3)}{F(n/2)} = 4 \frac{F(n/2 + 3)}{F(n/2 + 1)} \frac{F(n/2 + 1)}{F(n/2)} = n(n + 2).$$

Par conséquent  $X$  admet  $n$  comme espérance et  $2n$  comme variance.

**Question VI.1.3** Puisque  $U$  est une variable aléatoire,  $U^2$  l'est aussi ; elle est de plus à valeurs strictement positives. On va calculer sa fonction de répartition. Soit  $x$  un réel strictement positif, on a

$$\begin{aligned}
 P(U^2 \leq x) &= P(-\sqrt{x} \leq U \leq \sqrt{x}) \\
 &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \\
 &= 2 \int_0^x e^{-t/2} \frac{dt}{2\sqrt{2\pi t}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(\frac{t}{2}\right)^{-1/2} e^{-t/2} dt \\
 &= \frac{1}{2A(1)\sqrt{\pi}} \int_0^x S_1(t) dt
 \end{aligned}$$

et donc  $U^2$  suit une loi de densité proportionnelle à  $S_1$ . C'est donc exactement  $S_1$ , d'après VI.1.1.

**Question VI.1.4** Il résulte du calcul précédent que  $2A(1)\sqrt{\pi}$  est égal à 1 ou, autrement dit,

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

**Question VI.1.5** Puisque les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, il en est de même de leurs carrés et donc l'espérance et la variance de la somme de leurs carrés n'est rien d'autre que la somme des espérances et des variances de ces carrés. Par conséquent, en notant  $Z$  une variable aléatoire continue de densité  $S_1$ ,

$$E(Z) = nE(X^2) = n \quad \text{et} \quad \text{Var}(Z) = n\text{Var}(X^2) = 2n.$$