Première épreuve (secours) CAPESA 1997

François Sauvageot

3 février 2001

Partie I

Question I.1 En tant que quotient partout défini de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$, φ est indéfiniment continûment dérivable. De plus sa dérivée est donnée par la formule

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \qquad \varphi'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

et par conséquent φ est strictement croissante sur $]0;e]$ et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$. Elle admet donc un maximum global en e, égal à $1/e$. Par croissance comparée, φ tend vers 0 en $+\infty$ et vers $-\infty$ en 0.

Il en résulte le tableau de variation suivant :

	0		e		$+\infty$
φ'		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Question I.2 En dérivant la formule trouvée pour φ', on obtient

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \qquad \varphi''(x) = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$$

et donc φ admet un point d'inflection en $e^{3/2}$, où elle prend la valeur $3/(2e^{3/2})$, et est convexe sur l'intervalle $]0;e^{3/2}]$ et concave sur $[e^{3/2};+\infty[$.

Question I.3

Question I.4.a Par monotonie et continuité, φ est un C^∞-difféomorphisme de $]0;e]$ sur $]-\infty;1/e]$ et de $[e;+\infty[$ sur $]0;1/e]$. En particulier $-1/e$ admet un unique antécédent α.

Comme φ est continue et croissante sur $[3/4;1]$, α appartient à ce dernier intervalle si et seulement si $\varphi(3/4) \leq -1/e \leq \varphi(1)$ ou encore

$$\frac{4}{3}(\ln 3 - \ln 4) \leq -\frac{1}{e} \leq 0 \qquad \text{i.e.} \qquad 0 \leq 3 \leq 4e(\ln 4 - \ln 3) \ .$$

On peut vérifier cette dernière inégalité à la machine et on obtient $4e(\ln(4) - \ln(3)) \simeq 3.128$ et donc α est bien compris entre $3/4$ et 1.

Question I.4.b Puisque $\varphi(\alpha) = -1/e$, on a $-\alpha/e = \ln(\alpha)$ et donc $\psi(\alpha) = \alpha$.

Question I.4.c La fonction ψ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ en tant que composée de telles fonctions. Sa dérivée est $-\psi/e$ et est croissante et négative. L'inégalité des accroissement finis permet donc d'écrire

$$\forall (x,y) \in (\mathbf{R}_+)^2 \qquad |\psi(x) - \psi(y)| \leq |x-y| \sup_{0 \leq t} |\psi'(t)| = |x-y||\psi'(0)| = \frac{|x-y|}{e} \ .$$

Montrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété H_n suivante :

$$(H_n) \qquad u_n > 0 \qquad \text{et} \qquad |u_n - \alpha| \leq e^{-n}|u_0 - \alpha| \ .$$

Pour n nul on a $u_n = u_0 = 1$ et $e^{-n} = 1$ et donc H_0 est vraie.

Soit maintenant n un entier naturel quelconque. On a $u_{n+1} = \psi(u_n)$ et donc u_{n+1} est strictement positif. De plus, si u_n est strictement positif, on a

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\psi(u_n) - \psi(\alpha)| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$$

et la propriété est donc héréditaire.

Le principe de récurrence permet donc de conclure que, pour $\lambda = 1/e$, on a

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |u_n - \alpha| \leq \lambda^n |u_0 - \alpha| \ .$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge donc vers α.

Question I.4.d La fonction $\psi \circ \psi$ est croissante puisque ψ est décroissante. Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite récurrente associée à ψ, ses termes pairs et impairs sont des suites récurrentes associées à $\psi \circ \psi$ et sont donc monotones. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, il en est de même des suites de ses termes pairs et impairs. On a $u_0 = 1 \geq \alpha$ et donc la suite des termes pairs est décroissante. Par décroissance de ψ on en déduit aussi $u_1 = \psi(u_0) \leq \psi(\alpha) = \alpha$ et donc la suite des termes impairs est croissante. Il en résulte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans $[u_1; u_0]$.

Une erreur dans l'énoncé est à suspecter. En effet, l'inégalité des accroissement finis permet d'écrire

$$\forall (x,y) \in [u_1;u_0]^2 \qquad |\psi(x) - \psi(y)| \leq |x-y| \sup_{u_1 \leq t \leq u_0} |\psi'(t)| = |x-y||\psi'(u_1)|$$

et donc, comme dans la question précédente,

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |u_n - \alpha| \leq |\psi'(u_1)|^n |u_0 - \alpha| \ .$$

Malheureusement on a

$$|\psi'(u_1)| = \frac{\psi(e^{-1/e})}{e} = e^{-\left(1+\frac{e^{-1/e}}{e}\right)} = e^{-\left(1+e^{-(1+1/e)}\right)} \simeq 0.285$$

et cela ne fournit donc pas l'inégalité espérée.

Malheureusement l'inégalité donnée par l'énoncé est tout de même correcte !

En effet $\psi \circ \psi$ est croissante et de classe C^∞. Sa dérivée est $\psi'.\psi' \circ \psi$ soit

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad (\psi \circ \psi)'(x) = \frac{e^{-x/e}}{e} \frac{e^{-e^{-x/e}}}{e} = e^{-\left(2+\frac{x}{e}+e^{-x/e}\right)} \ .$$

La fonction, définie sur $\mathbf{R}$, $x \mapsto 2 + x/e + e^{-x/e}$ est de classe C^∞ et de dérivée $x \mapsto (1 - e^{-x/e})/e$ et est donc une fonction croissante sur $\mathbf{R}_+$. Par conséquent $(\psi \circ \psi)'$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+$. En particulier on a

$$\forall x \in [\alpha, u_0] \qquad 0 \leq (\psi \circ \psi)'(x) \leq (\psi \circ \psi)'(\alpha) = [\psi'(\alpha)]^2 \leq \left[\psi'\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2$$

puisque $|\psi'|$ est décroissante et $\alpha \geq 3/4$.

Or par un calcul sur machine on obtient

$$\psi'\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{e^{-3/4e}}{e} = -e^{-\left(1+\frac{3}{4e}\right)} \simeq -0.279 \quad \text{et donc} \quad \left[\psi'\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2 \leq 0.28^2 \ .$$

Comme la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et converge vers α, elle est à valeurs dans $[\alpha; u_0]$, il en résulte

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |u_{2n} - \alpha| = |(\psi \circ \psi)^{\circ n}(u_0) - (\psi \circ \psi)^{\circ n}(\alpha)| \leq 0.28^{2n}|u_0 - \alpha|$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |u_{2n+1} - \alpha| = |\psi(u_{2n}) - \psi(\alpha)| \leq |\psi'(\alpha)|.|u_{2n} - \alpha| \leq 0.28^{2n+1}|u_0 - \alpha| \ ,$$

puisque $\sup_{\alpha \leq t \leq u_{2n}} |\psi'(t)| = |\psi'(\alpha)| \leq 0.28$.

Il en résulte

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |u_n - \alpha| \leq 0.28^n|u_0 - \alpha| \ .$$

Partie II

Question II.1 Pour tout entier naturel non nul n et tout réel u, on a

$$P_{n+1}(u) = \frac{u(u+n+1)^n}{(n+1)!}$$

et donc

$$P'_{n+1}(u) = \frac{(u+n+1)^n + nu(u+n+1)^{n-1}}{(n+1)!} = \frac{(u+n+1)^{n-1}}{(n+1)!}(u+n+1+nu) = \frac{(u+1+n)^{n-1}}{n!}(u+1) = P_n(u+1) \ .$$

De plus P_1 est l'identité et donc $P'_1 = P_0$ et la relation précédente est donc valable même si n est nul.

Question II.2.a Remarquons que 0 annule tous les P_k pour k entier naturel non nul. On a donc

$$H_n(0) = P_n(a) \qquad \text{et} \qquad K_n(0) = \sum_{k=0}^{n} P_k(a)P_{n-k}(0) = P_n(a) \ .$$

Question II.2.b Pour tout entier naturel non nul n et tous réels a et u, on a

$$H'_n(u) = P'_n(u+a) = P_{n-1}(u+a+1) = H_{n-1}(u+1)$$

et

$$K'_n(u) = \sum_{k=0}^{n} P_k(a)P'_{n-k}(u) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(a)P'_{n-k}(u) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(a)P_{n-1-k}(u+1) = K_{n-1}(u+1) \ .$$

Question II.3 Montrons tout d'abord par récurrence sur l'entier naturel n la propriété R_n suivante :

$$(R_n) \qquad P_n = K_n \ .$$

En effet pour n nul, on a $P_0 = 1$ et $K_0 = P_0(a)P_0 = 1$ et donc R_0 est vraie.

Soit maintenant n un entier naturel non nul quelconque. Les fonctions P_n et K_n sont des fonctions polynomiales et sont donc en particulier continûment dérivables. On a, pour tout réel x,

$$H_n(x) - K_n(x) = H_n(0) - K_n(0) + \int_0^x (H_n - K_n)'(u)du = \int_0^x (H_{n-1} - K_{n-1})(u+1)du$$

et la propriété est donc héréditaire.

Le principe de récurrence permet donc de conclure que R_n est vraie pour tout n. Comme a a été choisi arbitrairement on en déduit

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall (u,\nu) \in \mathbf{R}^2 \qquad P_n(u+\nu) = \sum_{k=0}^{n} P_k(\nu)P_{n-k}(u) \ .$$

Partie III

Question III.1 Si u est nul, il en est de même de $P_n(u)$ pour n non nul et donc la série entière $\sum_{n\geq 0} P_n(u)x^n$ a un rayon de convergence infini et vaut identiquement 1. On a ainsi $R(0) = +\infty$.

Sinon on a, lorsque n tend vers l'infini,

$$P_n(u) = \frac{un^{n-1}}{n!}e^{(n-1)\ln(1+u/n)} \sim \frac{ue^u n^{n-1}}{n!}$$

puisque $(n-1)\ln(1+u/n) \sim u(n-1)/n$ tend vers u lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent

$$\frac{P_{n+1}(u)}{P_n(u)} \sim \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\frac{1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

et donc $P_{n+1}(u)/P_n(u)$ admet e comme limite. Il en résulte que la série $\sum_{n\geq 0} P_n(u)x^n$ admet $1/e$ comme rayon de convergence, i.e. $R(u) = 1/e$.

Il est probable que le sujet suppose en fait u non nul et donc on trouve $R = 1/e$.

Question III.2.a Soit u et v deux réels. Les séries entières définissant $f(u,.)$ et $g(u,.)$ sont normalement convergentes sur tout compact de leur disque de convergence et donc en particulier sur tout compact de $]-R;R[$ (même si u ou v est nul). Par conséquent leur produit est la série entière donnée par le produit de Cauchy de ces deux séries et ce produit a un rayon de convergence au moins égal à R. Il en résulte, pour tout réel x dans $]-R;R[$,

$$f(u,x)f(v,x) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} P_k(u)P_{n-k}(v)\right)x^n$$

et donc, d'après la question II.3 ;

$$f(u,x)f(v,x) = f(u+v,x) \ .$$

Question III.2.b Soit u un réel et x dans $]-R;R[$. On a

$$f(u,x) = f(u/2,x)^2$$

et donc $f(u,x)$ est positif. De plus

$$1 = f(0,x) = f(u,x)f(-u,x)$$

et donc $f(u,x)$ est non nul. Il en résulte que $f(u,x)$ est strictement positif.

Question III.3.a Pour tout entier naturel p, notons H_p la propriété suivante :

$$(H_p) \qquad \forall (u,x) \in \mathbf{R}\times]-R;R[\quad f(pu,x) = f(u,x)^p \ .$$

Notons que l'élévation à la puissance a bien un sens d'après la question précédente.

Pour p nul, on a

$$\forall (u,x) \in \mathbf{R}\times]-R;R[\quad f(pu,x) = f(0,x) = 1 = f(u,x)^0 \ .$$

Soit maintenant p un entier naturel quelconque. On a

$$\forall (u,x) \in \mathbf{R}\times]-R;R[\quad f((p+1)u,x) = f(pu,x)f(u,x)$$

et donc la propriété est héréditaire.

Le principe de récurrence permet d'en conclure que H_p est vraie pour tout entier naturel p, ce qui est l'assertion que l'on demandait de démontrer.

Question III.3.b Soit p dans $\mathbf{Z}$, u dans $\mathbf{R}$ et x dans $]-R;R[$. Si p est positif on a $f(pu,x) = f(u,x)^p$ d'après ce qui précède. Sinon on a

$$f(pu,x)f(u,x)^{-p} = f(pu,x)f(-pu,x) = f(0,x) = 1$$

et donc

$$\forall p \in \mathbf{Z} \quad \forall (u,x) \in \mathbf{R}\times]-R;R[\qquad f(pu,x) = f(u,x)^p \ .$$

Question III.3.c Soit enfin r un rationnel. Choisissons p et q des entiers tels que r soit égal à p/q. Pour tout réel u et tout x dans $]-R;R[$, on a

$$f(ru,x)^q = f(qru,x) = f(pu,x) = f(u,x)^p \qquad \text{et donc} \qquad f(ru,x) = f(u,x)^r \ ,$$

ce qui est l'assertion recherchée.

Question III.4 Pour tout entier naturel non nul n et tout réel u dans $[-1;1]$, on a

$$|P_n(u)| = |u|\frac{|u+n|^{n-1}}{n!} \leq |u|\frac{(n+1)^{n-1}}{n!} = |u|P_n(1)$$

et donc, pour tout x dans $]-R;R[$ et tout entier naturel non nul N,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} P_n(u)x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |P_n(u)|.|x|^n \leq |u|\sum_{n=1}^{N} P_n(1)|x|^n \ .$$

Les séries entières $f(u,x)$ et $f(1,|x|)$ étant convergentes, on en déduit

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} P_n(u)x^n\right| \leq |u|\sum_{n=1}^{+\infty} P_n(1)|x|^n \ .$$

Question III.5.a L'inégalité précédente peut s'écrire

$$\forall (u,x) \in [-1;1]\times]-R;R[\qquad |f(u,x)-1| \leq |u|(f(1,|x|)-1)$$

et donc

$$\forall x \in]-R;R[\qquad \lim_{u\to 0} f(u,x) = 1 = f(0,x)$$

i.e. $u \mapsto f(u,x)$ est continue en 0 pour tout x dans $]-R;R[$.

Question III.5.b Il vient, pour tout réel u et tout x dans $]-R;R[$,

$$\lim_{v\to 0} f(u+v,x) = f(u,x)\lim_{v\to 0} f(v,x) = f(u,x)$$

et donc $u \mapsto f(u,x)$ est continue sur $\mathbf{R}$ pour tout x dans $]-R;R[$.

Question III.6 Soit t un réel quelconque. Par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ il peut s'écrire comme limite d'une suite de rationnels. Notons $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une telle suite. Par continuité et grâce à III.3.c, on obtient

$$\forall (u,x)\in \mathbf{R}\times]-R;R[\qquad f(tu,x) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n u,x) = \lim_{n\to+\infty} f(u,x)^{r_n} = f(u,x)^t\ ,$$

ce qui est l'assertion requise.

Question III.7.a Pour tout réel u et tout x dans $]-R;R[$, on a

$$f(u,x) = f(1,x)^u = g(x)^u\ .$$

Question III.7.b Au voisinage de $u=0$, on a, si $g(x)$ est distinct de 1,

$$f(x,u)-1 = g(x)^u - 1 = (1+u\ln(g(x))+o(u))-1 \sim u\ln(g(x))\ .$$

Le résultat est encore vrai si $g(x)=1$ puisque les deux termes de l'égalité sont nuls.

Partie IV-A

Question IV-A.1 Pour tout entier naturel non nul n, notons $h_n = n^{n-1}/n!$. D'après le calcul effectué en III.1, pour tout réel non nul u, on a, au voisinage de n infini, $P_{n+1}(u)/P_n(u) \sim h_{n+1}/h_n$, de sorte que ces deux suites de rapports ont même limite (e) lorsque n tend vers l'infini. Il en résulte que les séries entières $\sum_{n\geq 1} h_n x^n$ et $f(u,x)$, pour u non nul, ont même rayon de convergence, i.e. $R=1/e$, ce qui est le résultat escompté.

Question IV-A.2 Le terme général de la série entière définissant g est $P_n(1)$, soit $(n+1)^{n-1}/n!$ ou encore $(n+1)^n/(n+1)!$, c'est-à-dire h_{n+1}. On a donc, pour tout réel x dans $]-R;R[$,

$$xg(x) = x\sum_{n\geq 0} h_{n+1}x^n = \sum_{n\geq 0} h_{n+1}x^{n+1} = h(x)\ .$$

Question IV-A.3 Notons que la fonction proposée est bien développable en série entière sur $]-R;R[$ en tant que combinaison linéaire de telles fonctions.

Le terme constant de cette fonction est nul et pour n entier naturel non nul le coefficient de x^n dans le développement en série entière de $x\mapsto p(f(u/p,x)-1)-uh(x)$ est

$$pP_n(u/p) - uh_n = \frac{u}{n!}\left(\left(n+\frac{u}{p}\right)^{n-1} - n^{n-1}\right)\ .$$

Question IV-A.4.a Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2} \leq e \Leftrightarrow (n-2)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1\ .$$

Or, par concavité de la fonction logarithme, elle est dominée par sa tangente en 1, i.e. pour tout réel x supérieur à -1, on a $\ln(1+x) \leq x$. Il en résulte

$$(n-2)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{n-2}{n} \leq 1$$

et donc

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2} \leq e\ .$$

Question IV-A.4.b D'après l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$\left|\left(1+\frac{u}{np}\right)^{n-1} - 1\right| \leq |u| \sup_{|t|\leq p} \frac{n-1}{np}\left(1+\frac{t}{np}\right)^{n-2} \leq \frac{|u|}{p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2} \leq |u|\frac{e}{p}$$

d'après ce qui précède. Pour $n=1$ le terme de gauche est nul et donc l'inégalité est encore vraie, i.e.

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \left|\left(1+\frac{u}{np}\right)^{n-1} - 1\right| \leq |u|\frac{e}{p}\ .$$

Question IV-A.4.c Soit x dans $]-R;R[$, p un entier naturel non nul et u dans $[-p;p]$. Notons a_n le terme général du développement en série entière de $x \mapsto p(f(u/p,x)-1) - uh(x)$. D'après IV-A.3, on a, pour n dans $\mathbf{N}^*$,

$$a_n = \frac{u}{n!}\left(\left(n+\frac{u}{p}\right)^{n-1} - n^{n-1}\right)$$

et donc, d'après ce qui précède,

$$|a_n| \leq \frac{|u|n^{n-1}}{n!}|u|\frac{e}{p} = \frac{eu^2}{p}h_n\ .$$

Il en résulte, pour tout entier naturel non nul N

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n|.|x|^n \leq \frac{eu^2}{p}\sum_{n=1}^{N} h_n|x|^n$$

et donc

$$\left|p\left(f\left(\frac{u}{p},x\right)-1\right) - uh(x)\right| \leq \frac{eu^2}{p}h(|x|)\ .$$

Question IV-A.5.a Pour p supérieur à $|u|$ l'inégalité précédente est valide et donc

$$\lim_{p\to+\infty} p\left(f\left(\frac{u}{p},x\right)-1\right) = uh(x)\ .$$

Question IV-A.5.b Pour u un réel non nul, la question III.7.b entraîne

$$\lim_{p\to+\infty} p\left(f\left(\frac{u}{p},x\right)-1\right) = u\ln(g(x)) = \ln(g(x)^u) = \ln(f(u,x))$$

et donc, d'après la question précédente

$$uh(x) = \ln(f(u,x))\ .$$

Pour u nul, $f(u,.)$ est identiquement égale à 1 et donc l'égalité précédente est valide pour tout réel u.

Question IV-A.6 En particulier, en faisant $u=1$, on obtient

$$\forall x \in]-R;R[\qquad x = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{\ln(g(x))}{g(x)} = \varphi(g(x))$$

et donc g est la fonction réciproque de la restriction de φ à l'image de $]-R;R[$ par g.

Or $R = 1/e$ et φ prend la valeur $-1/e$ en un unique point α d'après I.4.a et la valeur $1/e$ seulement en e d'après I.1. Par continuité de g et de φ, ce sont des homéomorphismes réciproques entre les intervalles $[-1/e;1/e]$ et $[\alpha;e]$, i.e. g est la fonction réciproque de la restriction de φ à $]\alpha;e[$.

Partie IV-B

Question IV-B.1.a Puisque $P_0' = 0$ et, pour tout entier naturel n et tout réel u, on a $P_{n+1}'(u) = P_n(u+1)$, la série entière étudiée s'écrit

$$\sum_{n\geq 0} P_n(u+1)x^{n+1}$$

et donc son rayon de convergence est $R(u+1)$. Si u est distinct de -1 c'est donc R et sinon c'est $+\infty$.

Question IV-B.1.b En particulier, pour tout réel u, la série précédente converge pour x dans $]-R;R[$ et l'écriture que l'on vient de donner fournit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n'(u)x^n = xf(u+1,x) = xf(1,x)f(u,x) = xg(x)f(u,x)\ .$$

Question IV-B.2.a Soit donc a dans $\mathbf{R}_+^*$ et u un réel dans $[-a;a]$. Pour tout entier naturel non nul n, on a

$$|P_n(u)| = \frac{|u|}{n!}|u+n|^{n-1} \leq \frac{a}{n!}(n+a)^{n-1} = P_n(a)$$

et donc la série de fonctions sur $[-a;a]$, $u \mapsto f(u,x)$ est normalement convergente, car dominée par la série convergente $f(a,x)$. En particulier elle est uniformément convergente sur ce même intervalle.

Question IV-B.2.b D'après les deux questions précédentes la série $\sum_{n\geq 0} P_n'(u)x^n$ est normalement convergente sur tout invervalle compact de $\mathbf{R}$ de la forme $[-a;a]$ avec a dans $\mathbf{R}_+^*$, puisqu'elle y est dominée par $xg(x)f(a,x)$.

Question IV-B.2.c Soit a un réel strictement positif ; puisque la série de fonctions $u \mapsto \sum_{n\geq 0} P_n(u)x^n$ est convergente en tout point de a (et donc en particulier en un de ces points) et que la série obtenue par dérivation terme à terme est uniformément convergente sur cet intervalle, le théorème de dérivation des séries permet d'affirmer que cette série converge en tout point de $[-a;a]$ (ce que l'on savait déjà) et surtout que sa somme est une fonction dérivable, de dérivée obtenue par dérivation sous le signe somme.

Comme a est arbitraire cette dernière assertion est valide sur tout $\mathbf{R}$.

Par conséquent

$$\forall (u,x) \in \mathbf{R}]-R;R[\qquad \frac{\partial f}{\partial u}(u,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n'(u)x^n\ .$$

Question IV-B.3 On a donc, pour tout x dans $]-R;R[$,

$$\forall (u,x) \in \mathbf{R}]-R;R[\qquad \frac{\partial f}{\partial u}(u,x) = xg(x)f(u,x)$$

et donc, par intégration de cette équation différentielle en u, il existe une constante c_x, dépendant a priori de x, telle que

$$\forall (u,x) \in \mathbf{R}]-R;R[\qquad \ln(f(u,x)) = xg(x)u + c_x$$

et comme, pour tout x dans $]-R;R[$, on a $f(0,x) = P_0 = 1$, il vient $\ln(f(0,x)) = 0$ et donc $c_x = 0$.

Par conséquent

$$\forall x \in]-R;R[\qquad \ln(g(x)) = \ln(f(1,x)) = xg(x)\ .$$

Question IV-B.4 On a donc

$$\forall x \in]-R;R[\qquad \varphi(g(x)) = x$$

et donc le raisonnement de IV-A.6 s'applique : g est la fonction réciproque de la restriction de φ à $]\alpha;e[$.