Deuxième épreuve CAPESA externe 1999

François Sauvageot

3 novembre 2003

Remarques :

1. Ce sujet est un très bel exemple de rédaction vraiment catastrophique. Le style télégraphique y est omniprésent, le mélange entre phrases mathématiques et français également. Néanmoins ceci ne vous autorise aucunement à adopter le même style et cela doit plutôt vous inciter à montrer que vous êtes choqué par l'énoncé en y répondant de façon bien plus claire !
2. Cet énoncé est très proche d'un cours. Ceci le rend difficile à traiter car il faut savoir ce qui peut être admis et ce qui ne peut l'être. D'une façon générale, mieux démontrer tout, au moins en début d'épreuve (trois premières heures).
3. Premier exemple : l'énoncé devrait distinguer entre les notations et les questions prémiminaires. Les notations ne sont évidemment pas des questions !
4. Quelques commentaires sur les notations : les nombres réels et complexes sont présentés comme des ensembles. Ce n'est pas faux, mais bien entendu l'énoncé se sert de la structure de corps de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Il devrait donc en parler, sinon il ne peut être question d'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.
5. La locution «$\mathbf{C}$-espace vectoriel» est un anglicisme et on est en droit de lui préférer «espace vectoriel complexe».
6. La résolution du problème est parfois rendue plus difficile parce que le sujet n'évoque jamais l'application linéaire représentée par une matrice. Ce qui est plus grave, on est en droit de se poser la question de savoir si l'auteur lui-même voit une différence !
7. L'identification $(z) = z$ ne sert que dans la définition du produit scalaire. Il aurait nettement plus commode d'écrire $(U|V)_n = tr(U^*V)$.

Partie 0 : Préliminaires et notations

Question 0.1
Remarque : Cette question est une abomination. La référence (1) est floue. Si la propriété (1) englobe le quantificateur $\forall n \in \mathbf{N}^*$, alors il est évidemment qu'aucun produit scalaire ne peut être défini : il n'y a même pas d'espace vectoriel ambiant. Une nouvelle preuve qu'il ne faut en aucun cas mélanger français et mathématiques. Il faudrait lire «Pour n entier naturel non nul, on définit $(\ |\ )\ : M_{n,1} \times M_{n,1} \to \mathbf{C}$ par $(1)(U|V)_n = U^*V$.» et ensuite poser la question «Montrer que (1) définit un produit scalaire hermitien sur $M_{n,1}$».

Soit (U, V_1, V_2) trois vecteurs colonnes dans $M_{n,1}$ et (λ_1, λ_2) deux scalaires. On note $(u_i)_{1\le i\le n}$, $(v_{1,i})_{1\le i\le n}$ et $(v_{2,i})_{1\le i\le n}$ les coordonées respectives de U, V_1 et V_2. On a alors

$$(U|\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2)_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i}(\lambda_1 v_{1,i} + \lambda_2 v_{2,i}) = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_{1,i} + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_{2,i} = \lambda_1 (U|V_1)_n + \lambda_2 (U|V_2)_n$$

et

$$(V|U)_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} u_i = \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i} = \overline{(U|V)_n}\ .$$

Ceci prouve que $(\ |\ )_n$ définit une forme sesqui-linéaire. Comme, de plus,

$$U^*U = \sum_i |u_i|^2$$

est un réel strictement positif dès que U est non nul, cette forme est définie positive et définit un produit hermitien sur $M_{n,1} \simeq \mathbf{C}^n$.

Remarque : La notation entre 0.1 et 0.2 est une catastrophe. Le quantificateur n'a pas lieu d'être utilisé et l'auteur confond l'application norme avec la norme d'un vecteur. Paradoxalement, alors qu'il faudrait un quantificateur pour préciser la notion d'orthogonalité, l'auteur s'en dispense ...

Question 0.2

Si U est le vecteur colonne (x_i) et V le vecteur colonne $(\bar{y_i})$, l'inégalité demandée est juste l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le produit scalaire $(\ |\ )_n$.

Rappelons-en la démonstration : pour t réel, l'expression

$$||U||_n^2 + 2t(U|V)_n + t^2||V||_n^2$$

définit un trinôme du second degré en t et est égale à $||U+tV||_n^2$. Par conséquent cette expression est positive pour toute valeur de t et le discriminant réduit de ce trinôme du second degré est positif, i.e.

$$(U|V)_n^2 - ||U||_n^2||V||_n^2 \geq 0$$

et donc

$$\left\|(U|V)_n^2\right| \leq ||U||_n||V||_n \ .$$

Question 0.3

Remarque : Ici les questions devraient être posées purement mathématiquement en employant le signe $\Rightarrow$. À croire que l'auteur fait exprès d'utiliser les quantificateurs à l'opposé de leur signification.

Soit V et W dans $M_{n,1}$. Supposons que, pour tout U dans $M_{n,1}$, on ait $(U|V)_n = (U|W)_n$, alors en particulier, en utilisant cette propriété pour U égal à $V-W$,

$$||V-W||_n^2 = (V-W|V)_n - (V-W|W)_n = 0$$

et donc $V=W$.

La seconde assertion résulte de la première puisque les deux quantités étudiées sont les complexes conjuguées de celles de la première assertion :

$$\forall U \in \mathrm{M}_{n,1} \qquad (U|V)_n = (U|W)_n \Leftrightarrow (V|U)_n = (W|U)_n$$

d'où

$$\forall U \in \mathrm{M}_{n,1} \qquad (V|U)_n = (W|U)_n \Leftrightarrow \forall U \in \mathrm{M}_{n,1} \qquad (U|V)_n = (U|W)_n \Leftrightarrow V = W \ .$$

Question 0.4

Soit U et V dans $M_{p,1}$ et $M_{n,1}$ respectivement et A dans $M_{n,p}$. On a, par définition du produit scalaire,

$$(AU|V)_n = (AU)^*V = (U^*A^*)V = U^*(A^*V) = (U|A^*V)_n \ .$$

Question 0.5

Soit A dans $M_{n,p}$. Si U appartient au noyau de A et V à l'image de A^*, alors il existe W dans $M_{n,1}$ tel que $V = A^*W$ et on a

$$(U|V)_n = (U|A^*W)_n = (AU|W)_n = (0|W)_n = 0 \ .$$

Par conséquent la somme entre $Ker(A)$ et $Im(A^*)$ est orthogonale. *A fortiori*, elle est directe. La dimension de cette somme est donc la somme des dimensions des deux sous-epaces. Or le rang d'une application linéaire et de son adjoint sont identiques. Il en résulte, grâce au théorème du rang,

$$\dim(Ker(A)) + \dim(Im(A^*)) = \dim(Ker(A)) + rang(A) = \dim(M_{p,1}) \ .$$

La somme considérée est donc tout $M_{p,1}$:

$$Ker(A) \oplus Im(A^*) = M_{p,1} \qquad \text{et} \qquad Ker(A) \perp_p Im(A^*) \ .$$

La seconde assertion résulte de la première appliquée à A^*.

Remarque : L'auteur aurait pu définir la trace dans le préambule.

Question 0.6.1

Soit A et B dans $M_{n,p}$ et $M_{p,n}$ respectivement, avec $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$. On a

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = tr(BA) \ .$$

A fortiori, si A et B sont dans M_n, alors $tr(AB) = tr(BA)$.

Aussi, si A et B sont deux matrices semblables dans M_n, il existe une matrice inversible P telle que $B == P^{-1}AP$ et on a :

$$tr(B) = tr(P^{-1}(AP)) = tr((AP)P^{-1}) = tr(A) \ .$$

Autrement dit la trace est un invariant de similitude.

Remarque : Pourquoi l'énoncé suppose-t-il A et B carrées ? La seconde question repose encore sur une mauvaise utilisation des quantificateurs. Il faudrait préciser que A et B sont dans M_n.

Question 0.6.2

Soit A dans M_n. Comme $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbf{C}$ et, par conséquent, A est triangularisable. Il existe donc une matrice P dans M_n, inversible, telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire. Or le polynôme caractéristique et ses racines, les valeurs propres, sont des invariants de similitude. En effet

$$\det(P^{-1}AP - XId) = \det(P^{-1})\det(A - XId)\det(P) = \det(A - XId) \ .$$

Comme les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux, les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$ sont les valeurs propres de $P^{-1}AP$ et donc aussi celles de A. En particulier la trace de $P^{-1}AP$ est la somme des valeurs propres de A. Puisque la trace est un invariant de similitude, la trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres.

Remarque : L'énoncé est trop informel. Se satisfait-on de la réponse, sans démonstration, puisqu'après tout c'est du cours ?

Partie I

Question I.1.1

Soit A une matrice dans $M_{n,p}$. Puisque le passage à l'adjoint est une involution anti-linéaire, on a

$$(AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^* \qquad \text{et} \qquad (A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$$

et donc les matrices AA^* et A^*A sont hermitiennes. En particulier elles sont diagonalisables.

Remarque : Il est assez perturbant de voir qu'on admet implicitement que toute matrice hermitienne est diagonalisable alors que l'on n'admet pas l'inégalité de Cauchy-Schwartz ou l'expression de la trace en fonction des valeurs propres. L'auteur est sans doute un «utilisateur» de l'algèbre linéaire qui trouve plus d'intérêt à savoir calculer qu'à savoir démontrer les théorèmes fondamentaux. Si le calcul est sans conteste une chose qu'il faut maîtriser et qui rend tout savoir théorique sans objet, il ne faudrait pas non plus croire que les théorèmes fondamentaux sont sans intérêt ou plus faciles que certains calculs.

Question I.1.2

Soit A dans $M_{n,p}$, B dans $M_{p,n}$ et ρ un complexe non nul. Soit X un vecteur propre non nul pour AB pour la valeur propre ρ. Comme ABX est égal à ρX, il n'est pas nul et donc BX ne l'est pas non plus. Or

$$BA(BX) = B(ABX) = \rho BX$$

et donc BX est vecteur propre pour BA, associé à la valeur propre ρ. Il en résulte que toute valeur propre non nulle de AB est également une valeur propre de BA.

On obtient la réciproque en échangeant les rôles de A et B, et donc AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.

Question I.1.3

Soit A dans $M_{n,p}$. Les matrices A^*A et AA^* sont hermitiennes positives. Leurs valeurs propres sont donc des réels positifs. Démontrons ce fait.

Soit X un vecteur non nul et λ un complexe. Si $A^*AX = \lambda X$, alors

$$||AX||_n^2 = (AX|AX)_n = (X|A^*AX)_n = \lambda(X|X)_n = \lambda||X||_n^2$$

et donc λ est un réel positif (puisque $||X||_n^2$ est non nul). Il en résulte que les valeurs propres de A^*A sont des réels positifs.

En appliquant ce résultat à A^*, on obtient que les valeurs propres de AA^* sont des réels positifs.

Question I.1.4

Puisque A^*A est une matrice hermitienne, elle représente un endomorphisme hermitien (i.e. c'est la matrice dans la base canonique de $\mathbf{C}^p$ d'un endomorphisme hermitien). Un tel endomorphisme est diagonalisable dans une base orthonormée, i.e. il existe une matrice P unitaire telle que $P^{-1}A^*AP$ soit une matrice diagonale. Notons $D = P^{-1}A^*AP$. Les coefficients diagonaux de D sont ses valeurs propres et ce sont donc également celles de A^*A. En particulier ce sont des réels positifs. Soit D' la matrice diagonale dont les coefficients sont les racines carrées de ceux de D, la matrice $B = PD'P^{-1}$ répond à la question. En effet

$$B^2 = PD'P^{-1}PD'P^{-1} = P(D')^2P^{-1} = PDP^{-1} = A^*A$$

et, puisque P est unitaire, on a $P^{-1} = P^*$ et donc

$$B^* = (PD'P^*)^* = (P^*)^*(D')^*P^* = PD'P^* = B\ ,$$

i.e. B est une matrice hermitienne de carré égal à A^*A.

En appliquant ce qui précède à A^*, on obtient l'existence d'une matrice C hermitienne de carré égal à AA^*.

Question I.2

On a

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & i-1 & 0 \\ -1-i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AA^* = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}\ .$$

Notons P_{A^*A} et P_{AA^*} les polynômes caractéristiques respectifs de ces deux matrices. Il vient

$$P_{A^*A}(X) = \det(A^*A - X.Id) = -X(X^2 - 4X + 2) \qquad \text{et} \qquad P_{AA^*}(X) = \det(AA^* - X.Id) = X^2 - 4X + 2\ .$$

Les nombres singuliers de A sont donc $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$.

Pour A^*A les espaces propres pour 0, $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$ sont respectivement

$$\mathbf{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{C}\begin{pmatrix} i-1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}\begin{pmatrix} i-1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Une base orthonormée de vecteurs propres de A^*A est donc

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{i-1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{i-1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Pour AA^* les espaces propres pour $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$ sont respectivement

$$\mathbf{C}\begin{pmatrix} i+1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}\begin{pmatrix} i+1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Une base orthonormée de vecteurs propres AA^* est donc

$$\begin{pmatrix} \frac{i+1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{i+1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

Question I.3

Soit A une matrice inversible dans M_n. La matrice A^* est alors inversible et donc AA^* et A^*A aussi. Les nombres singuliers de A sont donc non nuls. De plus, on a

$$(A^{-1})^*A^{-1} = (AA^*)^{-1} \qquad \text{et} \qquad A^{-1}(A^{-1})^* = (A^*A)^{-1}$$

et donc les valeurs propres communes à $(A^{-1})^*A^{-1}$ et $A^{-1}(A^{-1})^*$ sont les valeurs propres communes aux inverses de A^*A et AA^* et sont donc les inverses des valeurs propres communes à ces deux dernières matrices. Il en résulte que les nombres singuliers de A^{-1} sont les inverses de ceux de A.

Question I.4.1

Soit A dans M_n. D'après I.1.2, A^*A et AA^* ont mêmes valeurs propres non nulles. Comme

$$\det(A^*A) = \det(A^*)\det(A) = \det(A)\det(A^*) = \det(AA^*) ,$$

ces deux matrices sont singulières simultanément, i.e. elles ont les mêmes valeurs propres nulles. Par conséquent A^*A et AA^* ont mêmes valeurs propres.

Question I.4.2

Remarque : il est implicite quoique non précisé que les valeurs propres sont données avec multiplicité.

Comme les valeurs propres de A^*A sont $(\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2)$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 = tr(A^*A) \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} \mu_k^2 = \det(A^*A) = \det(A)\det(A^*) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 .$$

Comme le produit des valeurs propres de A est égal à son déterminant et que les nombres singuliers sont des réels positifs

$$\prod_{k=1}^{n} |\lambda_k| = |\det(A)| = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} \mu_k^2} = \prod_{k=1}^{n} \mu_k .$$

Comme on l'a déjà expliqué en réponse à 0.6.2, A est triangularisable. Soit P une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice triangulaire supérieure T_0.

La matrice P admet pour colonnes des vecteurs formant une base de $\mathbf{C}^n$. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt, il existe une base orthonormale de $\mathbf{C}^n$ telle que la matrice de passage de l'une à l'autre soit une matrice triangulaire supérieure (et à coefficients diagonaux strictement positifs). En termes matriciels, il existe une matrice unitaire U et une matrice triangulaire supérieure T telles que $P = UT$ ou encore $U = PT^{-1}$.

Il en résulte

$$U^*AU = U^{-1}AU = TP^{-1}APT^{-1} = TT_0T^{-1} .$$

Notons $T_1 = TT_0T^{-1} = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Les valeurs propres de A sont donc celles de T_1. Puisque T_1 est produit de matrices triangulaires supérieures, elle l'est aussi. Ses valeurs propres sont donc ses éléments diagonaux et il vient

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^n |t_{ii}|^2 .$$

De plus

$$T_1^*T_1 = (U^*AU)^*U^*AU = U^*A^*UU^*AU = U^{-1}A^*AU$$

et donc

$$tr(A^*A) = tr(T_1^*T_1) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n t_{ij}\overline{t_{ij}} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |t_{ij}|^2 .$$

Par conséquent

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^n |t_{ii}|^2 \leq \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |t_{ij}|^2 = tr(A^*A) = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 .$$

Et l'assertion est démontrée.
Remarque : l'écriture $P = UT$ s'appelle décomposition polaire de P.

Question I.5

Soit A dans $M_{n,p}$ et X dans $M_{p,1}$. On a

$$AX = 0 \Rightarrow A^*AX = 0$$

et

$$A^*AX = 0 \Rightarrow X^*A^*AX = 0 \Rightarrow ||AX||_n^2 = 0 \Rightarrow AX = 0$$

et donc $Ker(A) = Ker(A^*A)$. Comme $rang(A) = p - \dim(Ker(A))$ et $rang(A^*A) = p - \dim(Ker(A^*A))$, il en résulte $rang(A) = rang(A^*A)$.

En appliquant ce résultat à A^*, il vient $Ker(A^*) = Ker(AA^*)$ et $rang(A^*) = rang(AA^*)$.

Puisque A^*A est diagonalisable, on peut trouver une base de vecteurs propres de A^*A. En l'ordonnant convenablement, on peut donc trouver $(X_k)_{1\leq k\leq p}$ une base orthonormée de $M_{p,1}$, formée de vecteurs propres de A^*A, telle que $A^*AX_k = \mu_k^2 X_k$ pour k inférieur à q et $A^*AX_k = 0$ sinon.

Puisque $(X_k)_{q<k\leq p}$ est une base de $Ker(A^*A)$, c'est également une base de $Ker(A)$. Comme l'image de A est engendré par les images des vecteurs d'une base de $\mathbf{C}^p$, en particulier l'image de A est engendrée par $(AX_k)_{1\leq k\leq p}$ et donc par $(AX_k)_{1\leq k\leq q}$. Or le rang de A^*A est q, par définition des nombres singuliers, et c'est donc aussi celui de A. Il en résulte que $(AX_k)_{1\leq k\leq q}$ est une base de l'image de A.

Puisque les nombres singuliers sont non nuls, on peut définir $Y_k = AX_k/\mu_k$ pour k entier tel que $1 \leq k \leq q$. D'après ce qui précède $(Y_k)_{1\leq k\leq q}$ est une base de l'image de A. De plus, pour tout entier k compris entre 1 et q, on a

$$||Y_k||_n^2 = \frac{1}{\mu_k^2}(AX_k|AX_k)_n = \frac{1}{\mu_k^2}(X_k|A^*AX_k)_n = \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2}||X_k||_n^2 = 1$$

et, pour tout couple d'entiers distincts k et l compris entre 1 et q

$$(Y_k, Y_l)_n = \frac{1}{\mu_k\mu_l}(AX_k|AX_l)_n = \frac{1}{\mu_k\mu_l}(X_k|A^*AX_l)_n = \frac{\mu_l}{\mu_k}(X_k|X_l)_n = 0$$

et donc $(Y_k)_{1\leq k\leq q}$ est une base orthonormée de $Im(A)$.

Soit maintenant $(Y_k)_{q<k\leq n}$ une base orthonormée de $Ker(A^*)$ (en convenant que l'ensemble vide est une base de l'espace nul). D'après 0.5 le supplémentaire orthogonal de $Im(A)$ est $Ker(A^*)$ et donc $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base orthonormée de $M_{n,1}$.

Par construction $(X_k)_{1\leq k\leq p}$ et $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$ sont des bases orthonormées respectivement de $M_{p,1}$ et $M_{n,1}$ avec pour tout entier k

$$q < k \leq p \Rightarrow AX_k = 0 \ , \qquad q < k \leq n \Rightarrow A^*Y_k = 0 \qquad \text{et} \qquad 1 \leq k \leq q \Rightarrow AX_k = \mu_k Y_k \ .$$

Comme, par ailleurs, pour k entier entre 1 et q, on a

$$A^*Y_k = \frac{1}{\mu_k}A^*AX_k = \frac{\mu_k^2}{\mu_k}X_k = \mu_k X_k \ ,$$

on a construit deux bases vérifiant toutes les propriétés requises.

Question I.6

On reprend les notations de la question précédente. Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $M_{p,1}$ vers $(X_k)_{1\leq k\leq p}$ et P la matrice de passage de $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$ vers la base canonique de $M_{n,1}$. Puisqu'on a affaire à des bases orthonormées, les matrices de passage P et Q sont unitaires.

Si A représente une application linéaire relativement aux bases canoniques de $M_{p,1}$ et $M_{n,1}$, PAQ représente la même application mais relativement aux bases $(X_k)_{1\leq k\leq p}$ et $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$. L'assertion cherchée résulte donc des propriétés précédentes et, plus précisément, des propriétés, pour k entier,

$$1 \leq k \leq q \Rightarrow AX_k = \mu_k Y_k \qquad \text{et} \qquad q < k \leq p \Rightarrow AX_k = 0 \ .$$

On a donc

$$PAQ = \left(\begin{array}{ccc|c} \mu_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \mu_n & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) .$$

Remarque : Il est intéressant de remarquer l'écriture de droite est unique, à l'ordre des nombres singuliers près. En particulier si on ordonne les nombres singuliers, l'écriture est unique. Autrement dit la classe de congruence d'une matrice par des matrices unitaires contient un unique élément «diagonal» à «diagonale positive et décroissante». Par contre les matrices P et Q ne sont pas uniques puisqu'on a toute latitude pour les définir sur $Ker(A)$ et $Ker(A^*)$.

Partie II

Remarque : Encore une fois la rédaction laisse à désirer. Dans (2) il faudrait fixer Y à l'extérieur de la propriété désirée, et citer les inconnues en vis-à-vis des équations. Ainsi il faudrait écrire : soit Y dans $M_{n,1}$, on note (2) l'équation d'inconnue X dans $M_{p,1}$ donnée par $AX = Y$.

Question II.1

C'est une reformulation de $Im(A) \oplus^{\perp_n} Ker(A^*) = M_{n,1}$. En effet, soit Y_0 dans $M_{n,1}$. On a

$$\exists X \in M_{p,1} \quad AX = Y_0 \Leftrightarrow Y_0 \in Im(A) \Leftrightarrow Y_0 \in (Ker(A^*))^{\perp_n}$$

et les solutions de (3) sont exactement les éléments de $Ker(A^*)$. Par conséquent l'équation, d'inconnue X dans $M_{p,1}$, $AX = Y_0$ a des solutions si et seulement si Y_0 est orthogonal à toute solution de (3).

Question II.2.1

D'après ce qui a été écrit en réponse à I.5, on a $rang(A) = rang(A^*A)$. Comme le rang d'une matrice et de son adjoint sont les mêmes, on a aussi $rang(A^*) = rang(A^*A)$. Comme on a $Im(A^*A) \subset Im(A^*)$, il vient $Im(A^*A) = Im(A^*)$.

Soit maintenant Y dans $M_{n,1}$, A^*Y appartient à $Im(A^*)$ et donc aussi à $Im(A^*A)$. Par conséquent l'équation, d'inconnue X dans $M_{p,1}$, $A^*AX = A^*Y$ a une solution.

Question II.2.2

Comme A^*A est diagonalisable, ses sous-espaces caractéristiques sont ses sous-espaces propres. En particulier, relativement à la valeur propre 0, il vient

$$Ker(A^*A) = Ker((A^*A)^2) = \ldots = Ker((A^*A)^p) = \ldots$$

et donc, pour tout entier k strictement positif, $Ker((A^*A)^k) = Ker(A^*A)$. Par conséquent la suite décroissante d'inclusions

$$Im(A^*A) \supset Im((A^*A)^2) \supset \ldots \supset Im((A^*A)^p) \supset \ldots$$

est, grâce au théorème du rang, une suite d'égalités, i.e. pour tout couple d'entiers strictement positifs (j,k), on a

$$Im((A^*A)^k) = Im((A^*A)^j) \; .$$

Ce qui est bien l'assertion demandée : soit Z dans $M_{p,1}$ et j et k des entiers strictement positifs, $(A^*A)^k Z$ appartient à $Im((A^*A)^k)$ et donc aussi à $Im((A^*A)^j)$ et l'équation, d'inconnue X dans $M_{p,1}$, $(A^*A)^j X = (A^*A)^k Z$ a une solution.

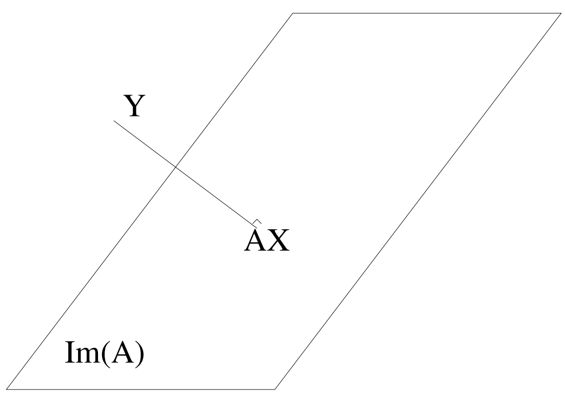
Question II.3.1

Si X est solution de (2), alors $\Phi_Y(X) = 0$ et, comme Φ_Y est positive, c'est bien un de ses minima, i.e. X est une pseudo-solution de (2).

Question II.3.2

Soit X dans $M_{p,1}$. Comme $(\;|\;)_n$ est un produit scalaire, la quantité $\Phi_Y(X)$ représente le carré de la distance de AX à Y et donc

$$\min_{Z \in M_{p,1}} \Phi_Y(Z) = d(Y, Im(A))^2 \; .$$



De plus $d(Y, Im(A))$ est réalisée en un unique point de $Im(A)$, qui est la projection orthogonale de Y sur $Im(A)$. Autrement dit

$$\Phi_Y(X) = \min_{Z \in M_{p,1}} \Phi_Y(Z) \Leftrightarrow Y - AX \in (Im(A))^{\perp_n}$$

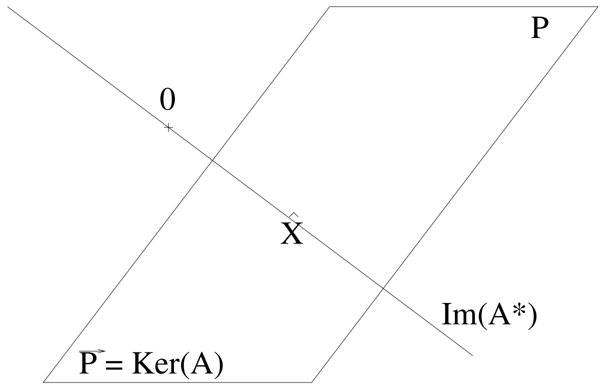
et donc, d'après 0.5,

$$\Phi_Y(X) = \min_{Z \in M_{p,1}} \Phi_Y(Z) \Leftrightarrow Y - AX \in Ker(A^*) \Leftrightarrow A^*(Y - AX) = 0 \Leftrightarrow A^*Y = A^*AX$$

ce qui est bien l'assertion cherchée.

Question II.3.3

Soit Y dans $M_{n,1}$. D'après II.3.2 et II.2.1, l'équation (2) admet une pseudo-solution. Soit X_0 une telle pseudo-solution. D'après II.3.2, AX_0 est alors la projection orthogonale de Y sur $Im(A)$. Par conséquent, si X est une autre pseudo-solution de (2), on a $AX = AX_0$ et $X - X_0$ appartient à $Ker(A)$. Autrement dit l'ensemble des pseudo-solutions de (2) forme un sous-espace affine $\mathcal{P}$ de $M_{p,1}$ de direction $Ker(A)$.



Par conséquent un vecteur X_0 de ce sous-espace affine est orthogonal à $Ker(A)$ si et seulement si $0 - X_0$ est orthogonal à tout vecteur $X - X_0$ pour X dans $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si et seulement si X_0 est la projection orthogonale de 0 sur $\mathcal{P}$.

Ceci prouve l'existence et l'unicité d'une pseudo-solution de (2) orthogonale à $Ker(A)$.

Question II.3.4

Soit Y dans $M_{n,1}$. Pour X dans $M_{p,1}$, on a

$$X = \varphi_A(Y) \Leftrightarrow (A^*AX = A^*Y \quad \text{et} \quad X \in Im(A^*))$$

puisque l'orthogonal de $Ker(A)$ est $Im(A^*)$.

Soit maintenant Y et Y' deux vecteurs dans $M_{n,1}$ et λ, λ' deux scalaires. Notons $X = \varphi_A(Y)$ et $X' = \varphi_A(Y')$. On a

$$A^*A(\lambda X + \lambda' X') = \lambda A^*AX + \lambda' A^*AX' = \lambda Y + \lambda' Y'$$

et, puisque $Im(A^*)$ est un espace vectoriel,

$$\lambda X + \lambda' X' \in Im(A^*) ,$$

d'où

$$\varphi_A(\lambda Y + \lambda' Y') = \lambda X + \lambda' X' = \lambda \varphi_A(Y) + \lambda' \varphi_A(Y') .$$

Et donc φ_A est une application linéaire.

Soit Y dans $M_{n,1}$. On a

$$\varphi_A(Y) = 0 \Leftrightarrow (A^*Y = 0 \quad \text{et} \quad 0 \in Im(A^*))$$

et donc $Ker(\varphi_A) = Ker(A^*)$.

De plus, on a $Im(\varphi_A) \subset Im(A^*)$ par construction de φ_A, et, par le théorème du rang,

$$rang(\varphi_A) = n - \dim(Ker(\varphi_A)) = n - \dim(Ker(A^*)) = rang(A^*) ,$$

d'où $Im(\varphi_A) = Im(A^*)$.

Question II.4.1

Remarque : techniquement il y a une grosse difficulté que l'énoncé ignore, à savoir qu'on a toujours travaillé sur **C** et qu'on se place maintenant sur **R**. Par ailleurs le phrasé de cette question est ridicule. On est en effet censé démontrer une notation.

On considère donc A et Y comme des matrices dans $M_{n,2}$ et $M_{n,1}$ respectivement, i.e. à coefficients complexes.

Les pseudo-solutions de $AX = Y$ dans $M_{2,1}$ forment un espace affine de direction $Ker(A)$ et il y a donc une unique pseudo-solution de $AX = Y$ si et seulement si A est injective, ou encore si A est de rang 2. C'est le cas puisque les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ne sont pas tous égaux.

Montrons maintenant que l'unique pseudo-solution de $AX = Y$ est à coefficients réels. Puisque A et Y sont à coefficients réels, on a

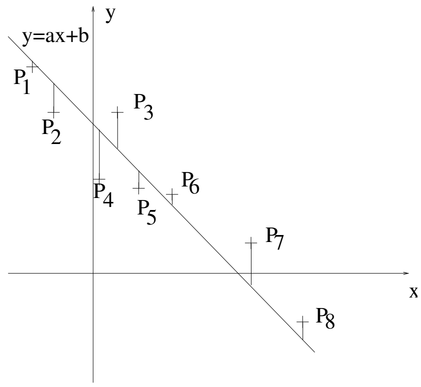
$$\forall X \in M_{2,1} \qquad \Phi_Y(\overline{X}) = ||A\overline{X} - Y||_n^2 = ||\overline{AX - Y}||_n^2 = ||AX - Y||_n^2 = \Phi_Y(X)$$

et donc l'ensemble des pseudo-solutions de $AX = Y$ est stable par passage au conjugué. Par unicité de la pseudo-solution de $AX = Y$, celle-ci doit vérifier $\overline{X} = X$, i.e. c'est un vecteur à coefficients réels.

Question II.4.2

Soit X le vecteur colonne de coordonnées (a, b), on a

$$\Phi_Y(X) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b|^2$$



et donc la droite d'équation $y = ax_0 + b_0$ est la droite de la méthode des moindres carrés, i.e. c'est la droite qui minimise la somme des carrés des écarts verticaux aux points $(P_k)_{1\leq k\leq n}$.

Partie III

Remarque : il y a évidemment une faute dans l'énoncé, la seconde inégalité étant une majoration de $||AU||_n$ et non de $||AU||$ (ce qui n'aurait aucun sens). Par ailleurs la définition de $||A||_S$ ne veut rien dire, en effet ce n'est pas $||AU||_n$ qui est «tel que» mais U. Mathématiquement on écrit «|» et non «tel que», ou alors on étudie un supremum fonctionnel auquel cas l'ensemble d'étude est mis en indice et la fonction entre parenthèses :

$$\sup_{U\in M_{n,1}\ |\ ||U||_n\leq 1} (||AU||_n) .$$

Question III.1.1

Soit A et B dans M_n, U dans $M_{n,1}$ et λ un scalaire.

Si U est nul, on a $||AU||_n = 0 = ||A||_S||U||_n$. Sinon on écrit $U = uV$ avec $u = ||U||_n$ et $V = U/u$. On a $||V||_n = 1$ et donc

$$||AU||_n = ||A(uV)||_n = u||AV||_n \leq u||A||_S||V||_n = ||A||_S.||U||_n .$$

Il en résulte

$$\forall U \in M_{n,1} \qquad ||AU||_n \leq ||A||_S||U||_n .$$

En particulier, si $||A||_S$ est nul, alors, pour tout U dans $M_{n,1}$, AU est nul, i.e. A est nul.

On suppose dorénavant U de norme inférieure à 1 ; on a

$$||(A + B)U||_n \leq ||AU||_n + ||BU||_n \leq ||A||_S + ||B||_S$$

et donc $||A + B||_S \leq ||A||_S + ||B||_S$.

De plus

$$||\lambda AU||_n = |\lambda|.||AU||_n$$

et il vient $||\lambda A||_S = |\lambda|.||A||_S$. Il en résulte que $||\ ||_S$ est une norme sur M_n.

Enfin
$$||ABU||_n \leq ||A||_S.||BU||_n \leq ||A||_S.||B||_S.||U||_n$$
et donc
$$||AB||_S \leq ||A||_S.||B||_S \ .$$
Ainsi $||\ ||_S$ est une norme sur M_n vérifiant les propriétés $(*)$.

Question III.1.2

Soit A dans M_n et U dans $M_{n,1}$, on a
$$||AU||_n^2 = U^*(A^*AU) \ .$$
Comme la matrice A^*A est hermitienne, on peut la diagonaliser dans une base orthonormée. Soit $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de vecteurs propres de A^*A et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ les valeurs propres de A^*A associées. Puisque $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée, on a
$$U = \sum_{i=1}^{n}(U|U_i)_n U_i \qquad \text{et} \qquad A^*AU = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i (U|U_i)_n U_i$$
et donc, puisque les valeurs propres de A^*A sont positives,
$$||AU||_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \left|(U|U_i)_n\right|^2 \leq \max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i)\sum_{i=1}^{n}\left|(U|U_i)_n\right|^2 = \max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i)||U||_n^2$$
avec égalité si et seulement si U est vecteur propre de A^*A pour la valeur propre $\max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i)$. Il en résulte que le carré de $||A||_S$ est la valeur propre maximale de A^*A et donc le carré du nombre singulier maximal de A. Par conséquent, puisque les nombres singuliers sont positifs, $||A||_S$ est égal au nombre singulier maximal de A.

Par définition de $||\ ||_S$, on a
$$||I_n||_S = \sup\{||U||_n \mid U \in M_{n,1} \quad \text{et} \quad ||U||_n \leq 1\}$$
et donc $||I_n|| = 1$.

Remarque : on aurait également pu arguer que $I_n^* I_n$ est I_n, dont les valeurs propres sont toutes égales à 1 et donc que les nombres singuliers de I_n sont tous égaux à 1.

Question III.2.1

Soit $\phi\ : \mathbf{C}^{n^2} \to M_n$ l'isomorphisme linéaire donné par la suite d'isomorphismes
$$\mathbf{C}^{n^2} \simeq \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \times \ldots \times \mathbf{C}^n \simeq M_{n,1} \times M_{n,1} \times \ldots \times M_{n,1} \simeq M_n$$
et qui consiste donc à associer à un n^2-uplet de complexes, la matrice obtenue en remplissant chaque colonne successivement, de haut en bas puis de gauche à droite : $\phi((\alpha_i)_{1\leq i\leq n^2}) = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $a_{ij} = \alpha_{i+(j-1)n}$.

Soit maintenant $||\ ||$ la norme hermitienne canonique sur $\mathbf{C}^{n^2}$, i.e. la norme $||\ ||_{n^2}$, et A dans M_n, on a $||A||_E = ||\phi^{-1}(A)||$ et donc $||\ ||_E$ est une norme sur M_n. L'indice E correspond donc à «euclidien».

Soit A et B dans M_n et U dans $M_{n,1}$. Notons $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $U = (u_i)_{1\leq i\leq n}$.

Par calcul direct On a, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz 0.2,
$$||AB||_E^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n}|b_{lj}|^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|b_{lj}|^2\right) = ||A||_E^2||B||_E^2$$
et donc $||AB||_E \leq ||A||_E||B||_E$. De plus, toujours grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz,
$$||AU||_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_j\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\sum_{k=1}^{n}|u_k|^2\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|^2\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = ||U||_n^2||A||_E^2$$
et donc $||AU||_n \leq ||A||_E||U||_n$. Par conséquent $||\ ||$ est une norme sur M_n vérifiant les propriétés $(*)$.

Par interprétation matricielle Comme la matrice A^*A est hermitienne, on peut la diagonaliser dans une base orthonormée. Soit $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de vecteurs propres de A^*A et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ les valeurs propres de A^*A associées. Comme la trace est un invariant de similitude, on peut la calculer dans la base $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ et comme cette base est orthonormée, pour toute matrice M dans M_n, on a

$$tr(M) = \sum_{i=1}^{n}(U_i|MU_i)_n \ .$$

En particulier, comme on la déjà remarqué en I.4.2,

$$tr(A^*A) = \sum_{i=1}^{n}(U_i|A^*AU_i)_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \ .$$

Par ailleurs on a

$$tr(A^*A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ij}} = ||A||_E^2 \ .$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
||AB||_E^2 &= tr(B^*A^*AB) = tr(BB^*A^*A) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(U_i|BB^*A^*AU_i)_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(U_i|BB^*U_i)_n \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\lambda_i \sum_{i=1}^{n}(U_i|BB^*U_i)_n = \max_{1\leq i\leq n}\lambda_i\, tr(BB^*) \\
&\leq tr(BB^*)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = tr(BB^*)\,tr(A^*A) = tr(B^*B)\,tr(A^*A) = ||A||_E^2||B||_E^2 \ .
\end{aligned}$$

Par conséquent $||AB||_E \leq ||A||_E.||B||_E$. Enfin on a

$$||AU||_n^2 = (AU|AU)_n = (U|A^*AU)_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,|(U|U_i)_n|^2 \leq \max_{1\leq i\leq n}\lambda_i||U||_n^2 \leq tr(A^*A)||U||_n^2 = ||A||_E^2||U||_n^2 \ .$$

Par conséquent $||\ ||$ est une norme sur M_n vérifiant les propriétés $(*)$.

Par calcul direct On a, en notant δ_{ij} le symbole de Kronecker,

$$||I_n||_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}1} = \sqrt{n} \ .$$

Par interprétation matricielle On a $||I_n||_E^2 = tr(I_n^*I_n) = tr(I_n) = n$ et donc $||I_n||_E = \sqrt{n}$.

Remarque : On a en fait démontré $||AB||_E \leq ||A||_S||B||_E$ et $||A||_S \leq ||A||_E$.

Question III.2.2

On l'a en fait déjà remarqué. En effet on a, en reprenant les notations de la réponse à la question précédente,

$$||A||_E^2 = tr(A^*A) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}\mu_i^2$$

et

$$||A||_E^2 \geq \max_{1\leq i\leq n}(\mu_i^2) = \max_{1\leq i\leq n}(\mu_i)^2 = ||A||_S^2 \ ,$$

et donc $||A||_S \leq ||A||_E$.

Remarque : cette dernière inégalité est immédiate au vu de la seconde propriété imposée aux normes. Une norme est totalement définie par ses valeurs sur les vecteurs de norme inférieure à 1 et donc $|| \ ||_S$ est la plus petite norme à vérifier la seconde propriété dans $(*)$. Comme elle vérifie également la première inégalité aussi, elle est la plus petite norme à vérifier $(*)$. Ici « la plus petite » est à prendre au sens fort : elle est minimale pour tout A, i.e. si $|| \ ||$ est une norme sur M_n vérifiant $(*)$ et si A est dans M_n, alors $||A||_S \leq ||A||$.

Partie IV

Question IV.1

Soit A une matrice non nulle dans M_n ; on a

$$||A|| = ||AI_n|| \leq ||I_n||.||A||$$

et donc $||I_n|| \geq 1$.

Remarque : on a aussi $||I_n|| \geq ||I_n||_S = 1$.

Question IV.2

Soit A dans M_n et λ une valeur propre de A. Puisque $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, l'espace propre pour A relativement à λ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit donc U un vecteur non nul propre pour A et associé à la valeur propre λ. Il vient

$$|\lambda|.||U||_n = ||\lambda U||_n = ||AU||_n \leq ||A||.||U||_n$$

et donc, puisque $||U||_n$ est non nul, $|\lambda| \leq ||A||$.

Remarque : l'existence de U n'est pas totalement évidente. Soit E_λ le sous-espace caractéristique de A relatif à λ. On a en particulier $E_\lambda = Ker(A - \lambda I_n)^n$. Soit u l'endomorphisme que représente A dans la base canonique de $M_{n,1}$ identifié à $\mathbf{C}^n$. Alors u laisse stable E_λ et donc on peut considérer la restriction v de u à E_λ : v est un **endo**morphisme de E_λ.

Maintenant, puisque $\mathbf{C}$ est algèbriquement clos, v est un endomorphisme triangularisable. En particulier v admet au moins un vecteur propre non nul.

Comme la seule valeur propre de v est λ, le vecteur propre précédent est associé à λ. On a ainsi trouvé X dans E_λ, non nul, tel que $v(X) = \lambda X$.

Matriciellement, X est donc un vecteur non nul dans $Ker(A - \lambda I_n)^n$ tel que $AX = \lambda X$. C'est donc un vecteur propre non nul de A associé à la valeur propre λ. Au final, pour toute valeur propre de A, on peut trouver un vecteur propre non nul associé.

Question IV.3.1

Soit A dans M_n telle que $||A|| < 1$. D'après IV.2 toutes ses valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Or une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Donc $I_n + A$ est inversible si et seulement si $\det(A - (-I_n))$ est non nul, i.e. si et seulement si -1 n'est pas valeur propre de A. Par conséquent $I_n + A$ est inversible.

Question IV.3.2

Remarque : ce n'est pas précisé, mais on convient évidemment que $A^0 = I_n$.

Soit A dans M_n, on a

$$(I_n + A).\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k A^k\right) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k A^k + \sum_{k=0}^{p}(-1)^k A^{k+1} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k A^k + \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k-1} A^k = I_n + (-1)^p A^{p+1} .$$

Soit X dans M_n. Si $||A|| < 1$, on a

$$X = (I_n + A)(I_n + A)^{-1}X = (I_n + A)^{-1}X + A(I_n + A)^{-1}X$$

et donc
$$(I_n + A)^{-1}X = X - A(I_n + A)^{-1}X \ .$$
D'après l'inégalité triangulaire pour $|| \ ||$, on en déduit
$$||(I_n + A)^{-1}X|| \leq ||X|| + || - A(I_n + A)^{-1}X|| \leq ||X|| + ||A||.||(I_n + A)^{-1}X||$$
d'où, puisque $1 - ||A||$ est strictement positif,
$$(1 - ||A||)\, ||(I_n + A)^{-1}X|| \leq ||X|| \qquad \text{et donc} \qquad ||(I_n + A)^{-1}X|| \leq \frac{||X||}{1 - ||A||} \ .$$
On choisit X ainsi :
$$X = (I_n + A) \, . \left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k A^k\right) - I_n = (-1)^p A^{p+1} \ .$$
On a donc
$$(I_n+A)^{-1}X = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k A^k - (I_n+A)^{-1} \qquad \text{et} \qquad \left|\left|\sum_{k=0}^{p}(-1)^k A^k - (I_n + A)^{-1}\right|\right| = ||(I_n+A)^{-1}X|| \leq \frac{||X||}{1 - ||A||} = \frac{||A^{p+1}||}{1 - ||A||}$$
Comme $|| \ ||$ vérifie $(*)$, en particulier, pour tout entier positif k, $||A^k|| \leq ||A||^k$. Il en résulte
$$\left|\left|\sum_{k=0}^{p}(-1)^k A^k - (I_n + A)^{-1}\right|\right| \leq \frac{||A||^{p+1}}{1 - ||A||} \ .$$

On en conclut que la série $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k A^k$ converge normalement vers l'inverse de $I_n + A$ et donc converge tout court car M_n est complet pour toute norme, et donc en particulier pour $|| \ ||$.

Question IV.4

Soit A et ϵ_A dans M_n avec $||\epsilon_A|| < 1/||A^{-1}||$. Il vient
$$||\epsilon_A A^{-1}|| \leq ||\epsilon_A||.||A^{-1}|| < 1$$
et donc, d'après IV.3.1, $I_n + A^{-1}\epsilon_A$ est inversible. Le produit de deux matrices inversibles étant inversible $(I_n + \epsilon_A A^{-1})A$ est inversible, i.e. $A + \epsilon_A$ est inversible.

On a donc
$$(A + \epsilon_A)^{-1} = \left((I_n + \epsilon_A A^{-1})A\right)^{-1} = A^{-1}(I_n + \epsilon_A A^{-1})^{-1} = A^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(\epsilon_A A^{-1})^k$$
et
$$(A + \epsilon_A)^{-1} - A^{-1} = A^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k(\epsilon_A A^{-1})^k \ .$$
D'où
$$\begin{aligned}
||(A + \epsilon_A)^{-1} - A^{-1}|| &\leq ||A^{-1}||.\left|\left|\sum_{k=1}^{+\infty}(-\epsilon_A A^{-1})^k\right|\right| \\
&\leq ||A^{-1}||\sum_{k=1}^{+\infty}||\epsilon_A A^{-1}||^k \\
&\leq ||A^{-1}||\sum_{k=1}^{+\infty}||A^{-1}||^k||\epsilon_A||^k \\
&\leq ||A^{-1}||\frac{||A^{-1}||.||\epsilon_A||}{1 - ||A^{-1}\epsilon_A||} \\
&\leq \frac{||A^{-1}||^2.||\epsilon_A||}{1 - ||A^{-1}||.||\epsilon_A||}
\end{aligned}$$

Question IV.5

Le calcul donne $\det(A) = -0.11363$. Par conséquent A est inversible et donc la matrice $\det(A)A^{-1}$ est la transposée de la comatrice de A. Le calcul des mineurs donne

$$\det(A)A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.1263 & 0.2548 & -0.0908 \\ -0.2467 & 1.9102 & -0.6272 \\ 0.2806 & -1.9516 & 0.5706 \end{pmatrix} .$$

Posons $\epsilon_A = B - A$. On a $||\epsilon_A||_E < \sqrt{9.10^{-4}} = 3.10^{-2}$. De plus

$$||A^{-1}||_E = |\det(A)|^{-1}.||\det(A)A^{-1}||_E = \frac{1}{0.11363}\sqrt{8.40528742}$$

et donc

$$||A^{-1}||_E^{-1} = \frac{0.11363}{\sqrt{8.40528742}} \geq \frac{0.1}{\sqrt{9}} \geq \frac{10}{3}.10^{-2} > 3.10^{-2} > ||\epsilon_A||_E .$$

D'après IV.4, puisque $||\ ||_E$ vérifie les propriétés $(*)$, la matrice $A + \epsilon_A$ est inversible, i.e. B est inversible.