Première épreuve ENSAI 1999

François Sauvageot

19 décembre 2000

Partie I

Question I.1 Notons f et g les applications de $]0;1[$ dans $\mathbf{R}_+^*$ définies par $f(t) = -\ln(t)$ et $g(t) = 1-t$. Puisqu'elles sont à valeurs positives, pour tout couple (α,β) dans $\mathbf{R}^2$, on peut définir une application $\phi_{\alpha,\beta}$ de $]0;1[$ dans $\mathbf{R}_+^*$ par

$$\phi_{\alpha,\beta}(t) = (-\ln(t))^\alpha(1-t)^\beta \ .$$

Les fonctions puissances étant continues sur $\mathbf{R}_+^*$ et f et g l'étant sur $]0;1[$, cette application est continue sur $]0;1[$ et y est localement intégrable.

Fixons maintenant un couple (α,β) dans $\mathbf{R}^2$. Par croissance comparée entre les fonctions puissances et le logarithme, on a, au voisinage de 0,

$$f(t)^\alpha = o(\sqrt{t}) \qquad \text{et donc} \qquad \phi_{\alpha,\beta}(t) = o(\sqrt{t})$$

et, par conséquent, $\phi_{\alpha,\beta}$ est absolument localement intégrable au voisinage de 0.

Au voisinage de 1, on a

$$f(t) \sim (1-t) \qquad \text{et donc} \qquad \phi_{\alpha,\beta}(t) \sim (1-t)^{\alpha+\beta} \ .$$

Comme $\phi_{\alpha,\beta}$ est positive, le critère de comparaison des intégrales impropres entraîne que $\phi_{\alpha,\beta}$ est intégrable au voisinage de 1 si et seulement si $t \mapsto (1-t)^{\alpha+\beta}$ l'est. Cette dernière condition est, d'après le critère de Riemann, équivalente au fait que $\alpha+\beta$ est strictement supérieur à -1.

Ces trois points montrent que $\phi_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $]0;1[$ si et seulement si $\alpha+\beta > -1$.

Question I.2.a L'application h définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $h(x) = e^{-x}$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et y est strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $]0;1[$ et est donc un C^1-difféomorphisme entre ces deux ensembles. La dérivée de cette fonction étant son opposé, on a, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, $|h'(x)| = e^{-x}$. Le théorème de changement de variable pour les intégrales impropres entraîne, pour tout (α,β) dans Ω,

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} (-\ln(h(x)))^\alpha(1-h(x))^\beta e^{-x}dx$$

soit

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} x^\alpha(1-e^{-x})^\beta e^{-x}dx \ ,$$

ce qui est bien la formule requise.

Question I.2.b Pour tout réel α, $(\alpha,0)$ appartient à Ω si et seulement si α est strictement supérieur à -1. Sous cette condition $\alpha+1$ est strictement positif et on a, puisque la fonction Γ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$,

$$I(\alpha,0) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx = \Gamma(\alpha+1) \ .$$

Soit n un entier naturel, il est en particulier strictement supérieur à -1 et donc la formule précédente entraîne

$$I(n,0) = \Gamma(n+1) \ .$$

Soit maintenant, pour tout entier naturel k, P_k la propriété : $\Gamma(k+1) = k!$. Montrons qu'elle est vraie, par récurrence sur l'entier naturel k. La propriété P_0 s'écrit

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

et résulte du fait qu'une primitive de $x \mapsto e^{-x}$ est son opposée.

L'hérédité de la propriété provient de la relation fondamentale pour la fonction Γ :

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad \Gamma(k+2) = (k+1)\Gamma(k+1)$$

et donc

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad \Gamma(k+1) = k! \Rightarrow \Gamma(k+2) = (k+1)! \ .$$

Le principe de récurrence permet de conclure

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad I(n,0) = n! \ .$$

Question I.2.c Soit n dans $\mathbf{N}$ et (α, n) dans Ω. La formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$I(\alpha, n) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k e^{-kx} \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^\alpha e^{-(k+1)x} \right) dx \ .$$

Or, pour tout entier k, la fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-(k+1)x}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et y est donc localement intégrable. Elle est absolument intégrable au voisinage de l'infini car, par croissance comparée, c'est un $o(t^{-2})$. En 0 elle est équivalente à $x \mapsto x^\alpha$ et, par positivité, est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si α est strictement supérieur à -1.

Remarquons que la formule de l'énoncé n'a de sens que si $\Gamma(\alpha+1)$ est défini, i.e. seulement si $\alpha > -1$.

Dans ce cas, par linéarité de l'intégrale et intégrabilité de toutes les fonctions considérées, on a

$$I(\alpha, n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(k+1)x} dx \ .$$

Pour k fixé entre 0 et n, le changement de variable linéaire $x = y/(k+1)$ permet de calculer

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(k+1)x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{y^\alpha}{(k+1)^\alpha} e^{-y} \frac{dx}{k+1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)^{\alpha+1}} \ .$$

Il en résulte

$$I(\alpha, n) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}} \ .$$

Remarque : insistons sur le fait qu'il y a une erreur d'énoncé puisqu'il faut supposer $\alpha > -1$ et non juste $(\alpha, n) \in \Omega$, ce qui s'écrit $\alpha > -n-1$.

Question I.2.d Soit k un entier entre 0 et n. Si k n'est pas nul, $1/(k+1)$ est un nombre compris strictement entre 0 et 1 et donc $\lim_{\alpha \to +\infty} 1/(k+1)^{\alpha+1} = 0$. Si par contre k est nul, cette limite vaut 1, puisque la quantité étudiée est alors constante, égale à 1.

Il en résulte, par linéarité,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}} \right) = (-1)^0 C_n^0 = 1$$

et donc, par définition de l'équivalence et grâce à l'égalité I.2.c (valable dès que α est strictement supérieur à -1),

$$I(\alpha, n) \sim \Gamma(\alpha+1) \ .$$

Soit α un réel strictement positif et m la partie entière de α. En particulier m est positif. On a, d'après la relation fondamentale vérifiée par la fonction Γ,

$$\Gamma(\alpha+1) = \left(\prod_{k=0}^{m-1}(\alpha-k)\right)\Gamma(\alpha+1-m) \geq \left(\prod_{k=0}^{m-1}(m-k)\right)\Gamma(\alpha+1-m) = m!\,\Gamma(\alpha+1-m)\ .$$

Or $\alpha+1-m$ est un réel compris entre 1 et 2 et donc

$$\Gamma(\alpha+1-m) \geq \int_1^{+\infty} x^{\alpha-m}e^{-x}dx \geq \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{e}\ .$$

Il vient, en notant $E[x]$ la partie entière d'un nombre réel x,

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^* \qquad \Gamma(\alpha+1) \geq \frac{(E[\alpha])!}{e}$$

et donc

$$\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha,n) = \lim_{\alpha\to+\infty}\Gamma(\alpha+1) = +\infty\ .$$

Question I.3.a Puisque ln est développable en série entière au voisinage de 1, avec un rayon de convergence égal à 1, et exp l'est au voisinage de 0, avec un rayon de convergence infini, pour tout réel β $t\mapsto(1+t)^\beta$ est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence égal à 1, par composition, puisque pour tout t dans $]-1;1[$, on a $(1+t)^\beta = \exp(\beta\ln(1+t))$. Celui-ci est donné par une expression de la forme

$$\forall t \in]-1;1[\qquad (1+t)^\beta = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n(\beta)t^n$$

pour certains coefficients $(u_n(\beta))_{n\in\mathbf{N}}$.

Pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, $-e^{-x}$ appartient à $]-1;0[$ et donc, *a fortiori*, à $]-1;1[$ et on a

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \qquad (1-e^{-x})^\beta = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^n u_n(\beta)e^{-nx}\ .$$

La suite des coefficients étant donnée par la suite des coefficients de la série de Taylor de $t\mapsto(1+t)^\beta$ au voisinage de 0, on a

$$\left\{\begin{array}{l} u_0(\beta) = 1 \\ \forall n\in\mathbf{N}^* \quad u_n(\beta) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\beta-k)}{n!}\ . \end{array}\right.$$

Question I.3.b Remarquons que la suite ν_n est définie pour n entier non nul puisque β n'est pas un entier naturel et donc $u_n(\beta)$ n'est nul pour aucun entier naturel n.

De plus, pour n entier strictement positif, on a

$$\nu_n = \ln\left(\frac{(n+1)^{\beta+1}|\beta-n|}{n^{\beta+1}(n+1)}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta\left|1-\frac{\beta}{n}\right|\right)$$

et donc, lorsque n tend vers l'infini,

$$\nu_n = \beta\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{\beta}{n}\right) = \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)\ .$$

Par comparaison, la série $\sum\nu_n$ est donc absolument convergente, donc convergente.

Soit s sa limite. On a

$$s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln((k+1)^{\beta+1}|u_{k+1}(\beta)|) - \ln(k^{\beta+1}|u_k(\beta)|)\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln(n^{\beta+1}|u_n(\beta)|) - \ln(|\beta|)\right)$$

et il en résulte, par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\beta+1}|u_n(\beta)|\right) = |\beta|e^s \ .$$

Notons $K = |\beta|e^s$, c'est un réel strictement positif puisque β n'est pas un entier naturel et n'est donc pas nul. Par définition de l'équivalence il vient

$$|u_n(\beta)| \sim \frac{K}{n^{\beta+1}} \ .$$

Remarque : il y a donc une nouvelle erreur d'énoncé puisque $u_n(\beta)$ n'est pas de signe constant lorsque n croît indéfiniment. Au contraire, c'est une suite alternée à partir du rang $sup(0, E[\beta])$.

Question I.3.c Soit (α, β) dans Ω. Remarquons qu'une fois encore, pour que l'énoncé ait un sens, il faut supposer également $\alpha > -1$. C'est ce que nous ferons.

D'après I.2.a et I.3.a, on a

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(\beta) x^\alpha e^{-(n+1)x}\right) dx \ .$$

La série donnant $(1+t)^\beta$ pour t dans $]-1;1[$ étant uniformément convergente sur tout compact de $]-1;1[$, elle l'est sur tout intervalle de la forme $]-e^{-T};0[$, pour T réel et strictement positif. Par conséquent la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(\beta) e^{-nx}$$

est absolument convergente pour x dans $[T;+\infty[$.

Soit maintenant T un réel strictement positif. La fonction, définie sur $[T;+\infty[$, $x \mapsto x^\alpha e^{-x}$ est continue et tend vers 0 en l'infini et est donc bornée sur cet intervalle. Soit M un majorant de cette fonction, par ailleurs positive. Pour tout entier naturel N et tout réel x dans $[T;+\infty[$, on a

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n u_n(\beta) x^\alpha e^{-(n+1)x}\right| = x^\alpha e^{-x} \left|\sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n u_n(\beta) e^{-nx}\right| \le M \left|\sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n u_n(\beta) e^{-nx}\right|$$

et, par conséquent, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(\beta) x^\alpha e^{-(n+1)x}$$

est uniformément convergente sur $[T;+\infty[$ de par le même fait pour la série précédente.

On a donc

$$\int_T^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(\beta) x^\alpha e^{-(n+1)x}\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(\beta) \int_T^{+\infty} x^\alpha e^{-(n+1)x} dx \ .$$

Pour tout entier naturel n, on a, par changement de variable linéaire,

$$\int_T^{+\infty} x^\alpha e^{-(n+1)x} dx = \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \int_{(n+1)T}^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx \le \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1) \ .$$

Par conséquent

$$(-1)^n u_n(\beta) \int_T^{+\infty} x^\alpha e^{-(n+1)x} dx = O\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\beta+2}}\right) \ .$$

Par le théorème de comparaison et le critère de Riemann appliqué pour $\alpha+\beta+2$ qui est strictement supérieur à 1, la série de fonctions, dépendant de T,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n(\beta)\int_T^{+\infty} x^\alpha e^{-(n+1)x}dx$$

est normalement convergente. On peut donc en prendre la limite pour T tendant vers 0 en restant strictement positif et échanger les signes somme et limite. Il vient

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n(\beta)x^\alpha e^{-(n+1)x}\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n(\beta)\lim_{T\to 0^+}\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\int_{(n+1)T}^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$$

soit

$$I(\alpha,\beta)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{u_n(\beta)}{(n+1)^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx=\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{u_n(\beta)}{(n+1)^{\alpha+1}}\ .$$

Question I.4 Soit α un réel, $I(\alpha,-1)$ est définie si et seulement si α est strictement positif. De plus pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n(-1)=(-1)^n$ et donc, pour tout entier naturel n, $(-1)^n u_n(-1)=1$. Il en résulte, pour α strictement positif,

$$I(\alpha,-1)=\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}=\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)\ .$$

Cette dernière expression étant licite puisque $\alpha+1$ est appartient au domaine de définition de ζ.

De même, si α est un réel, $I(\alpha,-2)$ est définie si et seulement si α est strictement supérieur à 1. De plus pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n(-2)=(-1)^n(n+1)$ et donc, pour tout entier naturel n, $(-1)^n u_n(-2)=n+1$. Il en résulte, pour α strictement supérieur à 1,

$$I(\alpha,-2)=\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha)\ .$$

Cette dernière expression étant licite puisque α est appartient au domaine de définition de ζ.

Question I.5.a Soit n et m deux entiers naturels non nuls, on a

$$(-1)^n u_n(-m-1)=C_{m+n}^n$$

et

$$C_{m+n}^n=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}=\frac{m+n}{m}\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}=\frac{m-1+n+1}{m}C_{m+n-1}^n\ .$$

Par conséquent

$$(-1)^n u_n(-m)=\frac{m-1}{m}C_{m-1+n}^n+\frac{n+1}{m}C_{m-1+n}^n$$

et donc, pour tout réel α,

$$(-1)^n\frac{u_n(-m-1)}{(n+1)^{\alpha+1}}=\frac{m-1}{m}(-1)^n\frac{u_n(-m)}{(n+1)^{\alpha+1}}+\frac{1}{m}(-1)^n\frac{u_n(-m)}{(n+1)^{\alpha}}\ .$$

Cette formule est encore vraie pour n nul puisqu'elle s'écrit $1=(m-1)/m+1/m$. Il en résulte, pour α strictement supérieur à m et donc $(\alpha,-m-1)$ dans Ω,

$$\begin{aligned}I(\alpha,-m-1)&=\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{u_n(-m-1)}{(n+1)^{\alpha+1}}\\&=\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{m-1}{m}(-1)^n\frac{u_n(-m)}{(n+1)^{\alpha+1}}+\frac{1}{m}(-1)^n\frac{u_n(-m)}{(n+1)^{\alpha}}\right)\ .\end{aligned}$$

Or les séries $\sum_n (-1)^n u_n(-m)/(n+1)^{\alpha+1}$ et $\sum_n (-1)^n u_n(-m)/(n+1)^{\alpha}$ sont absolument convergentes grâce à l'équivalent I.3.b et le critère de Riemann puisque $\alpha + 1 - m + 1$ et $\alpha - m + 1$ sont strictement supérieurs à 1. Comme de plus $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ puisque α est en particulier strictement positif, il vient

$$\begin{aligned} I(\alpha, -m-1) &= \frac{m-1}{m}\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u_n(-m)}{(n+1)^{\alpha+1}} + \frac{1}{m}\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u_n(-m)}{(n+1)^{\alpha}} \\ &= \frac{m-1}{m} I(\alpha, -m) + \frac{\alpha}{m}\Gamma(\alpha)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u_n(-m)}{(n+1)^{\alpha}} \\ &= \frac{m-1}{m} I(\alpha, -m) + \frac{\alpha}{m} I(\alpha-1, -m) \ . \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$ et α strictement supérieur à n,

$$I(\alpha, -n-1) = \frac{n-1}{n} I(\alpha, -n) + \frac{\alpha}{n} I(\alpha-1, -n) \ .$$

Question I.5.b Soit, pour n dans $\mathbf{N}^*$, P_n la propriété

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \qquad \alpha > n \Rightarrow nI(\alpha, -n) = \alpha \sum_{p=0}^{n-1} I(\alpha-1, -p) \ .$$

La propriété P_1 s'écrit, pour α strictement positif,

$$I(\alpha, -1) = \alpha I(\alpha-1, 0) \ .$$

Or $I(\alpha-1, 0) = \Gamma(\alpha)$ et donc $\alpha I(\alpha-1, 0) = \Gamma(\alpha+1)$ d'après la relation fondamentale vérifiée par Γ. La propriété P_1 en résulte.

Soit maintenant n un entier naturel non nul et α un réel strictement supérieur à n. On a

$$nI(\alpha, -n-1) - (n-1)I(\alpha, -n) = \alpha I(\alpha-1, -n)$$

d'après la question précédente et

$$\alpha \sum_{p=0}^{n+1-1} I(\alpha-1, -p) - \alpha \sum_{p=0}^{n-1} I(\alpha-1, -p) = \alpha I(\alpha-1, -n)$$

et donc la propriété est héréditaire. Le principe de récurrence permet de conclure

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall \alpha \in]n; +\infty[\qquad I(\alpha, -n) = \frac{\alpha}{n}\sum_{p=0}^{n-1} I(\alpha-1, -p) \ .$$

Si l'on préfère, comme le demande l'énoncé, on peut remplacer $I(\alpha-1, 0)$ dans la somme précédente par son expression obtenue en I.2.b, à savoir $\Gamma(\alpha)$.

Question I.5.c Soit n dans $\mathbf{N}$ et P_n la propriété $I(\alpha, -n) \sim \Gamma(\alpha+1)$ pour α tendant vers l'infini. Il est équivalent de dire, puisque la fonction Γ ne s'annule jamais, $\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha, -n)/\Gamma(\alpha+1) = 1$.

La propriété P_0 est vraie d'après I.2.d.

Soit maintenant n un entier naturel tel que les propriétés P_k soient toutes vraies pour k entier compris entre 0 et n. On a alors,

$$\forall p \in [0; n] \qquad \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha}{n+1}\frac{I(\alpha-1, -p)}{\Gamma(\alpha+1)} = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{I(\alpha-1, -p)}{(n+1)\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{n+1}$$

et donc la propriété P_{n+1} est vraie, grâce à l'expression trouvée en I.5.b.
Le principe de récurrence permet de conclure :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad I(\alpha, -n) \sim \Gamma(\alpha + 1)$$

lorsque α tend vers l'infini.

Question I.6 Soit (α, β) un couple de réels et m la partie entière de β. Pour tout réel positif x la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ définie par $t \mapsto x^\alpha e^{-x}(1 - e^{-x})^t$ est décroissante, puisque $1 - e^{-x}$ est un réel compris entre 0 et 1 et que tous les termes du produit considéré sont positifs. Il en résulte, pour tout α strictement supérieur à $-m - 1$,

$$I(\alpha, m + 1) \leq I(\alpha, \beta) \leq I(\alpha, m) \ .$$

D'après le théorème de comparaison et le résultat de la question I.2.d ou de la question I.5.c, il en résulte

$$I(\alpha, \beta) \sim \Gamma(\alpha + 1)$$

lorsque α tend vers l'infini.

Partie II

Question II.1.a Pour β réel strictement supérieur à -1, $(0, \beta)$ appartient à Ω et on a

$$I(0, \beta) = \int_0^1 (1 - t)^\beta dt = \left[-\frac{(1 - t)^{\beta + 1}}{\beta + 1} \right]_0^1 = \frac{1}{\beta + 1} \ .$$

Question II.1.b La fonction $u \mapsto \ln(1 - u)$ est développable en série entière sur $]-1; 1[$ et on a

$$\forall u \in]-1; 1[\qquad \ln(1 - u) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} \ .$$

Cette série est uniformément convergente sur tout compact inclus dans $]-1; 1[$.
Il en résulte donc que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - t)^n}{n}$$

est uniformément convergente vers $-\ln(t)$ pour t variant dans un compact inclus dans $]0; 2[$.
Soit donc a un réel dans $]0; 1[$. La série précédente étant uniformément convergente sur $[a; 1]$, on a, pour tout β strictement supérieur à -2,

$$\int_a^1 (-\ln(t))(1 - t)^\beta dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^1 \frac{(1 - t)^{n + \beta}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - a)^{n + \beta + 1}}{n(n + \beta + 1)} \ .$$

Or, pour tout réel a dans $[0; 1]$, on a

$$0 \leq \frac{(1 - a)^{n + \beta + 1}}{n(n + \beta + 1)} \leq \frac{1}{n(n + \beta + 1)} \ .$$

Comme $1/(n(n + \beta + 1)) \sim 1/n^2$, le théorème de comparaison et le critère de Riemann assurent la convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions

$$a \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - a)^{n + \beta + 1}}{n(n + \beta + 1)}$$

sur $[0;1]$. On peut donc intervertir limite en 0 et sommation dans l'expression précédente et obtenir

$$\int_0^1 (-\ln(t))(1-t)^\beta dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+\beta+1)}$$

et donc

$$\forall \beta \in]-2;+\infty[\qquad I(1,\beta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+\beta+1)} \ .$$

Question II.1.c Soit β un réel strictement supérieur à -2 et f la fonction de $[1;+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ qui à t associe $t^{-1}(t+1+\beta)^{-1}$. C'est une fonction continue (en tant que quotient partout défini de fonctions continues), donc localement intégrable, et décroissante. Par conséquent, pour tout entier naturel non nul n, la formule de la moyenne donne

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$$

ou encore, pour n supérieur ou égal à 2,

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt \ .$$

Soit maintenant N un entier supérieur ou égal à 2 ; par sommation des inégalités précédentes entre 1 et N, on obtient

$$\int_1^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq f(1) + \int_1^{N} f(t)dt \ .$$

Puisque $f(t) = O(t^{-2})$ au voisinage de l'infini, chacun des termes des inégalités précédentes a une limite lorsque N tend vers l'infini et on obtient

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt \leq I(1,\beta) \leq \frac{1}{\beta+2} + \int_1^{+\infty} f(t)dt \ .$$

Une primitive de f sur $[1;+\infty[$ étant la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\beta+1} \ln\left(\frac{t}{t+1+\beta}\right)$$

il vient

$$\frac{\ln(\beta+2)}{\beta+1} \leq I(1,\beta) \leq \frac{1}{\beta+2} + \frac{\ln(\beta+2)}{\beta+1} \ .$$

Laissons maintenant β varier. Comme, lorsque β tend vers l'infini,

$$\frac{1}{\beta+2} \sim \frac{1}{\beta} = O\left(\frac{\ln(\beta)}{\beta}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln(\beta+2)}{\beta+1} \sim \frac{\ln(\beta)}{\beta} \ ,$$

le théorème d'encadrement permet de conclure

$$I(1,\beta) \sim \frac{\ln(\beta)}{\beta}$$

lorsque β tend vers l'infini.

Question II.2.a Puisque la fonction logarithme est développable en série entière au voisinage de 1 (avec rayon de convergence égal à 1), il en est de même de son carré et le développement en série entière de cette dernière est donné par un produit de Cauchy :

$$\forall t \in]-1;1[\qquad (\ln(1-u))^2 = \left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}\right)^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} h_n u^n$$

où, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a posé

$$h_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \ .$$

Question II.2.b Pour tout réel β strictement supérieur à -3, $I(2, \beta)$ est défini et on a

$$I(2, \beta) = \int_0^1 (-\ln(t))^2 (1-t)^\beta dt \ .$$

D'après ce qui précède, pour t dans $]0;1]$, on a

$$(-\ln(t))^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} h_n (1-t)^n$$

et donc

$$I(2, \beta) = \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} h_n (1-t)^{n+\beta} dt \ .$$

Soit maintenant a un réel dans $]0;1[$. La série dans l'intégrale précédente est uniformément convergente sur $[a;1]$ puisqu'une série entière converge uniformément sur tout compact inclus dans son disque ouvert de convergence. Il en résulte

$$\int_a^1 \sum_{n=2}^{+\infty} h_n (1-t)^{n+\beta} dt = \sum_{n=2}^{+\infty} h_n \int_a^1 (1-t)^{n+\beta} dt = \sum_{n=2}^{+\infty} h_n \frac{(1-a)^{n+1+\beta}}{n+1+\beta} \ .$$

Or, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a

$$0 \leq \frac{h_n}{n+1+\beta} \leq \frac{2}{n(n+1+\beta)} \left(1 + \int_1^{n-1} \frac{dt}{t} \right)$$

et donc pour tout tel entier n et tout réel a dans $[0;1]$, on a

$$0 \leq h_n \frac{(1-a)^{n+1+\beta}}{n+1+\beta} \leq \frac{2(1+\ln(n-1))}{n(n+1+\beta)}$$

et cette dernière quantité, étant positive et équivalente à $\ln(n)/n^2$ lorsque n tend vers l'infini, est le terme général d'une série convergente. Il en résulte que la série de fonctions

$$a \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} h_n \frac{(1-a)^{n+1+\beta}}{n+1+\beta}$$

est uniformément convergente sur $[0;1]$ et donc

$$\int_0^1 (-\ln(t))^2 (1-t)^\beta dt = \sum_{n=2}^{+\infty} h_n \frac{1}{n+1+\beta}$$

ou encore

$$I(2, \beta) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_{n+1} \frac{1}{n+2+\beta} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \ldots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2+\beta)} \ .$$

Question II.3.a Puisque le logarithme est développable en série entière au voisinage de 1, avec un rayon de convergence égal à 1, on a

$$\forall t \in]-1;1[\qquad \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n} \ .$$

Pour t dans $[0;1[$, on a donc affaire à une série alternée dont le terme général est décroissant. Par conséquent son reste est majoré en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme de ce reste et il vient

$$\forall t \in]-1;1[\qquad \forall N \in \mathbf{N}^* \qquad \left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n} \right| \leq \frac{t^N}{N} \leq \frac{1}{N} \ .$$

Par conséquent la série de fonction

$$t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n}$$

est uniformément convergente sur $[0;1]$. Étant une série de fonctions continues la somme de cette série est elle-même une fonction continue sur $[0;1]$. Comme elle coïncide avec $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0;1[$, c'est encore vrai en 1 et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \ln(2) \ .$$

Question II.3.b Soit N un entier naturel non nul. On a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1/2)} = 2 \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1/2} \right) = 4 \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = 4 \sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^n \frac{1}{n}$$

et donc, en passant à la limite lorsque N tend vers l'infini et en tenant compte des formules II.1.b et II.3.a, il vient

$$I\left(1, -\frac{1}{2}\right) = 4\ln(2) \ .$$

Question II.4.a Soit n un entier naturel non nul. Remarquons tout d'abord

$$\frac{g(1)}{n} = \int_0^1 t^n g(1) dt$$

et donc qu'il suffit, par différence, de montrer que, pour toute fonction continue g sur $[0;1]$, on a

$$\int_0^1 t^n \left(g(t) - g(1)\right) dt = o\left(\frac{1}{n}\right) \ .$$

Puisque g est continue sur $[0;1]$, on peut trouver un réel positif M tel que

$$\forall t \in [0;1] \qquad |g(t) - g(1)| \leq M \ .$$

Fixons maintenant ε un réel strictement positif. Par continuité de g, on peut trouver η un réel strictement positif tel que

$$\forall t \in [0;1] \qquad |t-1| \leq \eta \Rightarrow |g(t) - g(1)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Soit maintenant η comme précédemment. Puisque la quantité $(1-\eta)^n$ tend vers 0 lorsque n tend versl'infini, on peut trouver un rang n_0 tel que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad n \geq n_0 \Rightarrow |1-\eta|^n \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

et ainsi pour de tels η et n_0, pour tout entier n supérieur à n_0, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 t^n\,(g(t)-g(1))\,dt\right| &\leq \int_0^{1-\eta} t^n\,|g(t)-g(1)|\,dt + \int_{1-\eta}^1 t^n\,|g(t)-g(1)|\,dt \\ &\leq \int_0^{1-\eta} M.t^n dt + \int_{1-\eta}^1 \frac{\varepsilon}{2} t^n dt \\ &\leq M\frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1} + \frac{\varepsilon(1-(1-\eta)^{n+1})}{2(n+1)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(n+1)} + \frac{\varepsilon}{2(n+1)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{n}\,.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}^* \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \qquad n \geq n_0 \Rightarrow \left|\int_0^1 t^n\,(g(t)-g(1))\,dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

ce qui signifie bien

$$\int_0^1 t^n\,(g(t)-g(1))\,dt = o\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

Question II.4.b On pourrait raisonner directement en termes de séries entières, mais on va plutôt le faire à la main.

Remarquons que, pour x réel non nul, la quantité $(1-e^{-x})/x$ est le taux d'acroissement de la fonction exponentielle entre 0 et $-x$. Par conséquent cette quantité admet $\exp'(0)$, i.e. 1, comme limite lorsque x tend vers 0.

La fonction f est donc la fonction sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ qui à x non nul associe ce taux d'acroissement et envoie 0 sur 1. Elle est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ en tant que quotient partout défini de fonctions de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et est continue en 0 d'après ce qui précède.

Remarquons que le taux d'accroissement entre 0 et t d'une fonction convexe sur $\mathbf{R}$ est une fonction croissante de t. Par conséquent, sur $\mathbf{R}_+^*$, f est la composée de $x \mapsto -x$ (de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$) avec une fonction croissante, c'est donc une fonction décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$. Elle est même strictement décroissante puisque l'exponentielle est une fonction strictement convexe. Par continuité en 0, f est donc strictement décroissante. Comme sa limite en $+\infty$ est 0, il résulte de la continuité de f qu'elle réalise une bijection entre $\mathbf{R}_+$ et $]0;1]$.

De plus, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, on a

$$f'(x) = \frac{xe^{-x}-(1-e^{-x})}{x^2} = \frac{e^{-x}}{x^2}(1+x-e^x)\,.$$

Compte tenu du développement limité en 0 de l'exponentielle, à savoir $e^x = 1+x+x^2/2+o(x^2)$, on trouve

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}\,.$$

Par conséquent f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ si et seulement si elle est dérivable en 0, de dérivée $-1/2$. Si c'est le cas, f est une bijection de classe C^1 de $\mathbf{R}_+$ sur $]0;1]$ et réalise donc un C^1-difféomorphisme entre ces deux ensembles.

Or on a

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1-e^{-x}-x}{x^2}$$

et le développement limité de l'exponentielle déjà cité permet de conclure

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{1}{2}\,.$$

Par conséquent f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}_+$ sur $]0;1]$.

Question II.4.c Pour tout entier naturel n, $(-n, n)$ appartient à Ω et on a

$$I(-n,n) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^n e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} (f(x))^n e^{-x}dx \; .$$

Puisque f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}_+$ dans $]0;1]$, sa réciproque, notée h, est un C^1-difféomorphisme de $]0;1]$ dans $\mathbf{R}_+$ et un changement de variable fournit

$$I(-n,n) = \int_0^1 t^n e^{-h(t)} |h'(t)| dt \; .$$

Soit g la fonction définie sur $]0;1]$ comme $e^{-h}|h'|$. Lorsque x tend vers 0, $h(x)$ tend vers $+\infty$ et comme

$$e^{-h(x)}h'(x) = \frac{e^{-h(x)}}{f'(h(x))} = \frac{e^{-h(x)}h(x)^2}{(1+h(x))e^{-h(x)}-1} \; ,$$

g est prolongeable par continuité en 0, par 0.

Enfin on a

$$g(1) = e^{-h(1)}|h'(1)| = \frac{e^{-0}}{|f'(0)|} = 2$$

et donc la question précédente permet de conclure

$$I(-n,n) \sim \frac{2}{n}$$

lorsque n tend vers l'infini.

Partie III

Question III.1 Soit (α, β) dans Ω. Soit $h = (\alpha+\beta+1)/3$; c'est un réel strictement positif et $[\alpha-h;\alpha+h] \times [\beta-h;\beta+h]$ est inclus dans Ω.

Soit ε un réel strictement positif. Comme $I(\alpha+h, \beta-h)$ est une intégrale convergente, il existe un réel a, que l'on peut choisir inférieur à $1/e$, tel que

$$0 \leq \int_0^a (-\ln(t))^{\alpha+h}(1-t)^{\beta-h}dt \leq \frac{\varepsilon}{6} \; .$$

Par monotonie des fonctions puissance, il en résulte

$$\forall (\gamma,\delta) \in [\alpha-h;\alpha+h] \times [\beta-h;\beta+h] \qquad 0 \leq \int_0^a (-\ln(t))^{\gamma}(1-t)^{\delta}dt \leq \frac{\varepsilon}{6} \; .$$

De même, comme $I(\alpha-h, \beta-h)$ est une intégrale convergente, il existe un réel b, que l'on peut choisir supérieur à $1/e$, tel que

$$0 \leq \int_b^1 (-\ln(t))^{\alpha-h}(1-t)^{\beta-h}dt \leq \frac{\varepsilon}{6} \; .$$

Par monotonie des fonctions puissance, il en résulte

$$\forall (\gamma,\delta) \in [\alpha-h;\alpha+h] \times [\beta-h;\beta+h] \qquad 0 \leq \int_b^1 (-\ln(t))^{\gamma}(1-t)^{\delta}dt \leq \frac{\varepsilon}{6} \; .$$

Pour de tels a et b, l'intégrale à paramètres réels

$$(\gamma,\delta) \mapsto \int_a^b (-\ln(t))^{\gamma}(1-t)^{\delta}dt$$

est une fonction continue de (γ, δ), puisque la fonction

$$(t, \gamma, \delta) \mapsto (-\ln(t))^\gamma (1-t)^\delta$$

est continue sur $[a, b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Il en résulte que l'on peut trouver η, que l'on peut choisir inférieur à h, tel que

$$\forall (\gamma, \delta) \in [\alpha - \eta; \alpha + \eta] \times [\beta - \eta; \beta + \eta] \qquad \left| \int_a^b (-\ln(t))^\gamma (1-t)^\delta dt - \int_a^b (-\ln(t))^\alpha (1-t)^\beta dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \, .$$

Pour un tel η et (γ, δ) dans $[\alpha - \eta; \alpha + \eta] \times [\beta - \eta; \beta + \eta]$, les trois inégalités précédentes entraînent

$$\begin{aligned} |I(\gamma, \delta) - I(\alpha, \beta)| &\leq \int_0^a (-\ln(t))^\gamma (1-t)^\delta dt + \int_0^a (-\ln(t))^\alpha (1-t)^\beta dt \\ &\quad + \left| \int_a^b (-\ln(t))^\gamma (1-t)^\delta dt - \int_a^b (-\ln(t))^\alpha (1-t)^\beta dt \right| \\ &\quad + \int_b^1 (-\ln(t))^\gamma (1-t)^\delta dt + \int_b^1 (-\ln(t))^\alpha (1-t)^\beta dt \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

et donc la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto I(\alpha, \beta)$ est continue sur Ω.

Question III.2.a Pour t dans $]0; 1[$, soit $f(t) = -\ln(t)/(1-t)$. Cette quantité représente le taux d'accroissement de la fonction logarithme entre 1 et t. Par concavité de cette fonction, c'est une fonction décroissante de t. De plus, par définition de la dérivée en 1, sa limite en 1 par valeurs inférieures vaut $\ln'(1)$, i.e. 1. Il en résulte

$$\forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[\qquad 1 \leq -\frac{\ln(t)}{1-t} \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln(2) \, .$$

Question III.2.b Pour (α, β) dans Ω, par positivité de l'intégrand, on a

$$I(\alpha, \beta) \geq \int_{1/2}^1 (-\ln(t))^\alpha (1-t)^\beta dt = \int_{1/2}^1 f(t)^\alpha (1-t)^{\beta+\alpha} dt$$

et donc, en posant $M = 1$ si α est positif ou $M = (2\ln(2))^\alpha$ sinon,

$$I(\alpha, \beta) \geq M \int_{1/2}^1 (1-t)^{\beta+\alpha} dt = \frac{M}{(\alpha+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}} \, .$$

Et l'assertion en résulte.

Question III.3.a Pour x dans $]0; 1[$, la quantité $x^\alpha (1-x)^\beta$ est une fonction décroissante de β et donc I_2 est une fonction décroissante.

Question III.3.b Puisque I_2 est décroissante, sa limite en $+\infty$ ne peut être $+\infty$. Montrons plutôt qu'elle est nulle ...Ceci est cohérent avec la question suivante !

Fixons donc ε un réel strictement positif. Puisque $I(\alpha, -\alpha)$ est une intégrale convergente, il existe un réel a dans $]0; 1[$ tel que

$$\left| \int_0^a (-\ln(t))^\alpha (1-t)^{-\alpha} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

On a alors, pour β supérieur à $-\alpha$, f la fonction du III.2.a et $M = 1$ si α est positif ou $M = a^\alpha$ sinon,

$$0 \leq I(\alpha, \beta) \leq \int_0^a (-\ln(t))^\alpha (1-t)^{-\alpha} dt + \int_a^1 f(t)^\alpha (1-t)^{\alpha+\beta} dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + M \frac{(1-a)^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1}$$

et donc il existe un réel β_0 supérieur à $-\alpha$, tel que, pour β supérieur à β_0, on ait

$$0 \leq I(\alpha, \beta) \leq \varepsilon \ .$$

Par conséquent

$$\lim_{\beta \to +\infty} I(\alpha, \beta) = 0 \ .$$

Question III.4 Soit α un réel strictement négatif et n un entier naturel. En notant f la fonction de III.2.a, on a

$$I(\alpha, n) = \int_0^1 f(t)^\alpha (1-t)^{\alpha+n} dt \ .$$

Sur $]0;1[$, f est supérieure à 1 et donc f^α est inférieure à 1. Il en résulte

$$0 \leq I(\alpha, n) \leq \int_0^1 (1-t)^{\alpha+n} dt = \frac{1}{\alpha+1+n}$$

et l'assertion en découle.

Question III.5.a La fonction exponentielle étant convexe, on a, pour tout réel x,

$$e^{-x} \geq 1 - x \ .$$

Soit maintenant λ dans $]0;1[$ et n un entier naturel, la fonction $u \mapsto (1-u^{1/\lambda})^n$ est continue sur $]0;1]$, donc y est localement intégrable. Elle est prolongeable par continuité en 0, par la valeur 1, par positivité de λ. L'intégrale considérée a donc un sens et on a

$$\int_0^1 (1-u^{1/\lambda})^n du \leq \int_0^1 e^{-nu^{1/\lambda}} du \ .$$

L'application $t \mapsto (t/n)^\lambda$ est de classe C^1 et croissante de $]0;n]$ sur $]0;1]$ et réalise donc un C^1-difféomorphisme entre ces deux ensembles. Par changement de variable on obtient

$$\int_0^1 (1-u^{1/\lambda})^n du \leq \int_0^n e^{-t} \frac{\lambda t^{\lambda-1}}{n^\lambda} dt$$

et donc, par positivité de l'intégrand

$$\int_0^1 (1-u^{1/\lambda})^n du \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\lambda t^{\lambda-1}}{n^\lambda} dt = \frac{\lambda \Gamma(\lambda)}{n^\lambda} \ .$$

Question III.5.b Soit α un réel strictement positif et n un entier naturel, (α, n) appartient alors à Ω. De plus pour θ dans $]0;1[$ la fonction $t \mapsto t^\theta(-\ln(t))^\alpha$ est continue sur $]0;1[$, prolongeable par continuité en 1 par 0 puisque α est strictement positif ainsi qu'en 0 par 0, par croissances comparées des puissances et du logarithme. La fonction prolongée étant continue sur le compact $[0;1]$, elle y est bornée et donc aussi, a fortiori, la fonction de départ. Soit M un majorant de cette fonction (par ailleurs positive).

On a donc

$$I(\alpha, n) \leq M \int_0^1 t^{-\theta}(1-t)^n dt \ .$$

L'application $t \mapsto t^{1-\theta}$ est un C^1-difféomorphisme de $[0;1]$ sur lui-même, de dérivée $t \mapsto (1-\theta)t^{-\theta}$. Il en résulte, par changement de variable,

$$I(\alpha, n) \leq \frac{M}{1-\theta} \int_0^1 (1-u^{1/(1-\theta)})^n du \leq \frac{M\Gamma(1-\theta)}{n^{1-\theta}}$$

ce qui est bien l'assertion demandée.