

Écrit blanc de probabilités
inspiré de la deuxième épreuve de l'ESSEC 1998

François Sauvageot

22 novembre 2003

Préliminaires

Question P.1 Soit (p, q) un couple d'entiers naturels. Par commutativité et associativité de l'addition dans \mathbf{R} , on a

$$\sum_{j=0}^q \left(\sum_{i=0}^p v_{ij} \right) = \sum_{i=0}^p \left(\sum_{j=0}^q v_{ij} \right).$$

Puisque la série définissant A_i est à termes positifs, on a

$$0 \leq \sum_{j=0}^q v_{ij} \leq A_i$$

et donc

$$\sum_{i=0}^p \left(\sum_{j=0}^q v_{ij} \right) \leq \sum_{i=0}^p A_i.$$

Enfin, puisque la série de terme général A_i est convergente, il vient

$$\sum_{i=0}^p \left(\sum_{j=0}^q v_{ij} \right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} A_i.$$

D'où l'assertion.

Question P.2 On applique le résultat précédent à la suite définie par $w_{ij} = v_{ji}$, pour tous i et j entiers naturels. Il vient : si les séries définissant les nombres B_j sont convergentes et si la série de terme général B_j est convergente, alors

$$\sum_{j=0}^q \left(\sum_{i=0}^p w_{ij} \right) = \sum_{i=0}^p \left(\sum_{j=0}^q w_{ij} \right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} w_{ij} \right).$$

Et donc

$$\sum_{i=0}^p \left(\sum_{j=0}^q v_{ij} \right) = \sum_{j=0}^q \left(\sum_{i=0}^p v_{ij} \right) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} B_j.$$

On se place dans les hypothèses de la question P.1. Pour tout couple d'entiers naturels (p, q) , on a donc, par positivité des v_{ij} ,

$$0 \leq \sum_{i=0}^p v_{iq} \leq \sum_{j=0}^q \left(\sum_{i=0}^p v_{ij} \right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} A_i$$

et donc la série définissant B_q est une série à termes positifs et majorée, elle est donc convergente. De plus, en passant à la limite lorsque p tend vers l'infini dans les inégalités, il vient

$$0 \leq B_q \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^q B_j \leq \sum_{i=0}^{+\infty} A_i .$$

La série de terme général B_j est donc à termes positifs et majorée. Elle est donc convergente et, par passage à la limite en q dans la seconde inégalité, on a

$$\sum_{j=0}^{+\infty} B_j \leq \sum_{i=0}^{+\infty} A_i .$$

De plus les hypothèses faites en début de question sont satisfaites et on en déduit, en étudiant la suite w ,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} A_i \leq \sum_{j=0}^{+\infty} B_j$$

et donc

$$\sum_{i=0}^{+\infty} A_i = \sum_{j=0}^{+\infty} B_j .$$

On en tire le résultat suivant : **si** les séries définissant les nombres A_i sont convergentes ainsi que celle de terme général A_i **ou si** les séries définissant les nombres B_j sont convergentes ainsi que celle de terme général B_j , alors les séries définissant les nombres A_i et celles définissant les nombres B_j sont convergentes, ainsi que celles de termes généraux A_i et B_j et on a de plus

$$\sum_{i=0}^{+\infty} A_i = \sum_{j=0}^{+\infty} B_j .$$

Remarque : le résultat précédent est connu sous le nom de théorème de Fubini (pour les séries).

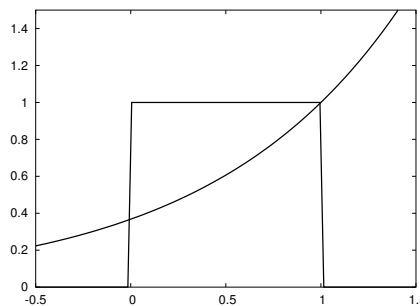
Partie I

Remarque préliminaire : la fonction f est composée d'une fonction affine strictement croissante (puisque a est strictement positif) et de la fonction exponentielle qui est de classe C^∞ , strictement positive, strictement croissante et strictement convexe sur \mathbf{R} . Par conséquent f est également de classe C^∞ , strictement positive, strictement croissante et strictement convexe sur \mathbf{R} .

Question I.1.a Pour k un entier naturel, soit (H_k) la propriété : $0 \leq u_k \leq 1$ et $u_k \leq u_{k+1}$.

Puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = 1/e^a$, on a $0 \leq u_0 \leq 1$ et $u_0 \leq u_1$. Soit maintenant k un entier naturel tel que (H_k) soit vraie. On a alors, par croissance de f , $0 \leq \exp(-a) = f(0) \leq f(u_k) = u_{k+1} \leq f(1) = 1$ et $u_{k+1} = f(u_k) \leq f(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et donc (H_{k+1}) est vérifiée. La propriété (H_k) est donc héréditaire et le principe de récurrence permet de conclure

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad 0 \leq u_k \leq 1 \quad \text{et} \quad u_k \leq u_{k+1} .$$



Remarque : on peut formuler les choses un peu plus synthétiquement. Puisque f est croissante et puisque $0 \leq f(0) = \exp(-a) \leq 1 = f(1)$, l'intervalle $[0; 1]$ est stable par f . Par conséquent la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est monotone et à valeurs dans $[0; 1]$. De plus $u_0 = 0 \leq f(0) = u_1$ et donc la suite est croissante. Ces résultats sont exactement ceux demandés.

Question I.1.b En particulier la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est croissante et majorée. Elle est donc convergente.

Remarque : on peut préciser, par passage à la limite dans les inégalités précédentes, $0 \leq L(a) \leq 1$.

Question I.2.a Puisque $f' = af$, on a, par croissance et positivité de f ,

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| = a \sup_{0 \leq x \leq 1} f = af(1) = a.$$

En particulier, d'après I.1.a, on a

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \sup_{u_k \leq x \leq 1} |f'(x)| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| = a.$$

Par conséquent, l'inégalité des accroissements finis permet d'affirmer

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad |1 - u_{k+1}| \leq a|1 - u_k|$$

et donc, puisque d'après I.1.a $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est majorée par 1,

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k)$$

Question I.2.b Il résulte de I.2.a que la suite $(1 - u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est positive et majorée par une suite géométrique de raison a . Par conséquent, lorsque $0 < a < 1$, le théorème d'encadrement des limites permet de conclure $L(a) = 1$.

Question I.3.a Nous avons déjà répondu à cette question en préambule de cette partie. Donnons néanmoins d'autres arguments !

Abstraction. La fonction $x \mapsto \exp(x - 1)$ est la composée d'une fonction affine strictement croissante et de la fonction exponentielle, qui est strictement convexe sur \mathbf{R} , par conséquent cette fonction est elle-même strictement convexe sur \mathbf{R} .

Directement. Soit x et y deux réels et λ un réel compris entre 0 et 1. Par stricte convexité de l'exponentielle sur \mathbf{R} , il vient, pour $a = 1$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \exp(\lambda(x - 1) + (1 - \lambda)(y - 1)) \leq \lambda \exp(x - 1) + (1 - \lambda) \exp(y - 1) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

et les cas d'égalité sont exactement les cas $x = y$, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

Par le calcul. On a $f' = af$ et donc f' est strictement croissante sur \mathbf{R} . Il en résulte que f est strictement convexe sur \mathbf{R} .

Calcul (bis). On a $f'' = a^2 f$ et donc f'' est strictement positive sur \mathbf{R} . Il en résulte que f est strictement convexe sur \mathbf{R} .

Question I.3.b Puisque $f(1) = 1$ et $f'(1) = af(1) = a$, la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1 est la droite d'équation cartésienne $y - 1 = a(x - 1)$ ou encore $y = ax + 1 - a$. En particulier, lorsque $a = 1$, c'est la première bissectrice.

Question I.3.c Puisque f est strictement convexe, son graphe ne rencontre ses tangentes qu'en un seul point. En particulier, lorsque $a = 1$, le graphe de f ne rencontre la première bissectrice qu'au point $(1, 1)$. Autrement dit l'équation $f(x) = x$ n'admet qu'une seule solution, à savoir 1. Comme la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite récurrente associée à la fonction continue f , son éventuelle limite est un point fixe de f et donc, lorsque $a = 1$, l'unique limite possible de $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est 1. D'après I.1.b cette suite est convergente et il vient $L(1) = 1$, i.e. la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers 1 lorsque $a = 1$.

Question I.4.a La fonction logarithme est (strictement) croissante et (strictement) concave sur \mathbf{R}_+^* . Par conséquent

$$\forall x \in [1; +\infty[\quad 0 = \ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(1) + (x - 1) \ln'(1) = x - 1.$$

En particulier

$$\forall x \in [1; +\infty[\quad 0 \leq \ln(x) \leq x$$

et donc

$$\forall x \in [1; +\infty[\quad 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq 1.$$

Par conséquent $\ln(a)/a$ appartient à l'intervalle $[0; 1]$. Il en résulte, par stabilité de l'intervalle $[0; 1]$ par l'application $t \rightarrow 1-t$,

$$0 \leq 1 - \frac{\ln(a)}{a} \leq 1.$$

Question I.4.b Comme $f' = af$, la fonction f' réalise, tout comme le fait f , une bijection bicontinue et strictement croissante de \mathbf{R} sur \mathbf{R}_+^* . En particulier, l'équation $f'(x) = 1$ a une unique solution sur \mathbf{R} . Celle-ci vérifie $f(x) = f'(x)/a = 1/a$ et donc

$$a(x - 1) = \ln(f(x)) = -\ln(a) \quad \text{et} \quad x = 1 - \frac{\ln(a)}{a}.$$

Par conséquent l'unique réel en lequel f a une dérivée égale à 1 est $1 - \ln(a)/a$.

Question I.4.c Soit g la fonction définie sur \mathbf{R} par $x \mapsto f(x) - x$. C'est une fonction strictement convexe puisqu'elle est somme d'une fonction strictement convexe et d'une fonction affine.

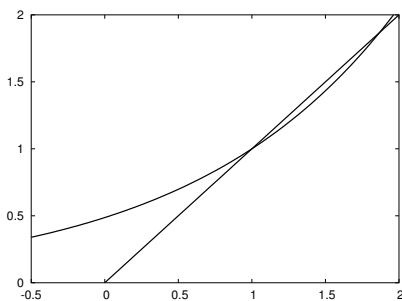
Par le calcul. La fonction g est strictement convexe et tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$ puisque l'exponentielle est dominante. Elle est, de plus, de classe C^∞ et son minimum est atteint lorsque g' s'annule, i.e. en $1 - \ln(a)/a$, qui est un réel compris entre 0 et 1. Par conséquent on a le tableau de variations suivant pour g

x	$-\infty$	0	$1 - \frac{\ln(a)}{a}$	1	$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow \frac{1}{e}$	$\searrow \frac{\ln(a)-(a-1)}{a}$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$

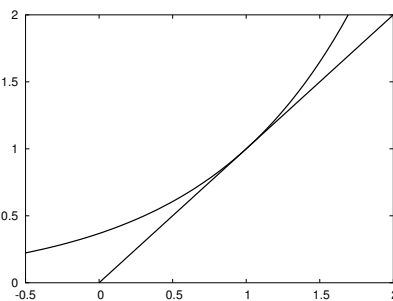
Il en résulte que g est strictement positive sur \mathbf{R}_- et $]1; +\infty[$ et s'annule une fois exactement entre 0 et $1 - \ln(a)/a$ et entre $1 - \ln(a)/a$ et 1 (en 1). Par conséquent $x \rightarrow f(x) - x$ s'annule exactement deux fois sur \mathbf{R} : en 1 et (strictement) entre 0 et $1 - \ln(a)/a$.

Par convexité. La fonction f est convexe et la pente de la tangente a son graphe au point (1,1) est a . Par conséquent si a est distinct de 1, la première bissectrice n'est pas une tangente au graphe de f en 1 et c'en est donc une sécante. Par stricte convexité une sécante coupe le graphe en deux points exactement. Comme $a > 1$ la pente de la tangente en 1 est strictement supérieure à la pente de la première bissectrice, et donc le second point d'intersection est d'abscisse strictement inférieure à 1. Par ailleurs la pente de la corde joignant les points d'abscisses 0 et 1 est $f(1) - f(0) = 1 - 1/e^a$, ce qui strictement inférieur à 1, et donc la première bissectrice recoupe le graphe de f en un point d'abscisse strictement supérieure à 0.

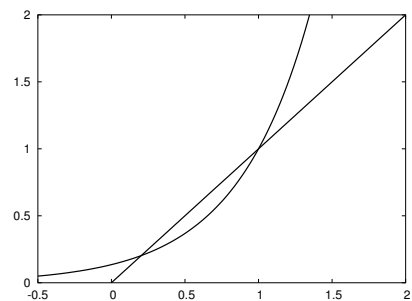
Remarque : en fonction de a , on peut dessiner la position de f par rapport à la première bissectrice.



Cas $a < 1$



Cas $a = 1$



Cas $a > 1$

La suite récurrente $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers la racine de l'équation $f(x) = x$ qui est la plus petite parmi celles qui sont positives. Par conséquent, pour $a \leq 1$, on a $L(a) = 1$ et pour $a > 1$, on trouve $0 < L(a) < 1$.

Question I.4.d D'après ce qui précède $x \rightarrow f(x) - x$ s'annule en 1 et entre 0 et $1 - \ln(a)/a$. D'après I.4.a.1, $r(a)$ est donc ce dernier zéro. Ainsi $0 \leq r(a) \leq 1 - \ln(a)/a$. Comme $f(0) = 1/e^a$, $r(a)$ n'est pas nul. De plus $\ln(a)/a$ est strictement positif et donc $0 < r(a) < 1$.

Question I.4.e Puisque f est croissante et $0 = u_0 \leq r(a)$, on a $f(0) \leq f(r(a)) = r(a)$ et donc $0 \leq f(0) \leq f(r(a)) = r(a)$. La croissance de f entraîne de plus que l'intervalle $[u_0; r(a)]$ est stable par f . Par conséquent la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est à valeurs dans cet intervalle, ce qui est la propriété recherchée.

Remarque : on peut bien entendu également procéder par récurrence. Pour k entier naturel, notons (H_k) la propriété $0 \leq u_k \leq r(a)$. Puisque $u_0 = 0$ et $0 < r(a)$, la propriété (H_0) est vraie. Soit k un entier naturel tel que (H_k) soit vraie. Par croissance de f , il vient

$$0 \leq \exp(-a) = f(0) \leq f(u_k) = u_{k+1} \leq f(r(a)) = r(a)$$

et donc la propriété (H_k) est héréditaire. Le principe de récurrence permet de conclure

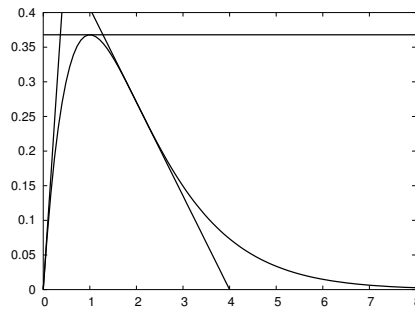
$$\forall k \in \mathbf{N} \quad 0 \leq u_k \leq r(a).$$

Remarque : puisque l'intervalle $[0; r(a)[$ est stable par f , on a en fait une inégalité stricte à droite.

Question I.4.f Puisque $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite récurrente associée à une fonction continue, sa limite, qui existe d'après I.1.b, est un point fixe de f , i.e. $L(a)$ vaut soit $r(a)$, soit 1. Comme par passage à la limite dans I.4.a.4, il vient $0 \leq L(a) \leq r(a) < 1$, on en déduit $L(a) = r(a)$.

Question I.5.a La fonction φ est de classe C^∞ sur \mathbf{R} en tant que produit de composées de telles fonctions. Au voisinage de 0, on a $f(x) = x + o(x)$ et donc le graphe de f est tangent à la première bissectrice en $(0, 0)$. Puisque l'exponentielle est dominante, f tend vers 0 en $+\infty$ et le graphe de f est donc asymptote à l'axe des abscisses en $+\infty$.

La dérivée de φ est donnée par $(1-x)\exp(-x)$ pour x réel et donc φ est strictement croissante sur $[0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. En particulier elle atteint son maximum en 1 où elle vaut $1/e$.



La dérivée seconde de φ est donnée par $(x-2)\exp(-x)$ et donc φ possède un unique point d'inflexion en 2 et sa tangente y admet comme équation $y = (4-x)\exp(-2)$. À cet endroit le graphe de φ traverse sa tangente.

Question I.5.b Puisque $f(r(a)) = r(a)$, on a $\exp(ar(a) - a) = r(a)$ et donc $\varphi(ar(a)) = a \exp(-a)$. Par conséquent a et $ar(a)$ ont même image par φ .

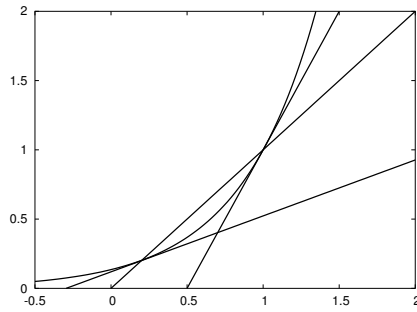
Question I.5.c Comme φ est une application continue strictement croissante sur $[0; 1]$, elle réalise une bijection bicontinue de $[0; 1]$ sur son image, à savoir $[\varphi(0); \varphi(1)]$, i.e. $[0; 1/e]$. Son application réciproque est donc une application continue strictement croissante de $[0; 1/e]$ sur $[0; 1]$.

Question I.5.d.1 Commençons par remarquer $ar(a) < 1 < a$.

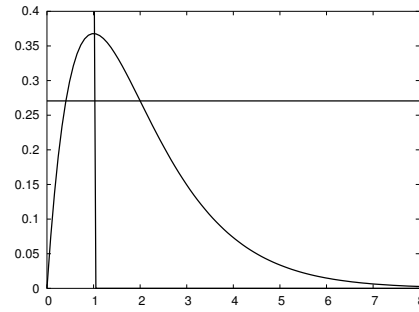
Par convexité. Comme f est strictement convexe, son taux d'accroissement est une fonction strictement croissante des deux variables. Il en résulte

$$ar(a) = f'(r(a)) < \frac{f(1) - f(r(a))}{1 - r(a)} = \frac{1 - r(a)}{1 - r(a)} = 1 < f'(1) = a .$$

Par étude de fonction. D'après l'étude menée en I.5.a, φ envoie \mathbf{R}_+ sur $]0; 1/e[$ et, pour y dans $]0; 1/e[$ l'équation $\phi(x) = y$ admet exactement deux solutions l'une strictement comprise entre 0 et 1 et l'autre strictement plus grande que 1. Les cas limites $y = 0$ et $y = 1/e$ admettent chacun une seule solution, à savoir 0 et 1 respectivement. Comme $a > 1$ et $\varphi(a) = \varphi(r(a))$, c'est que $0 < ar(a) < 1 < a$.



Par convexité



Par étude de fonction

Par conséquent, par définition de ψ , il vient

$$\psi(\varphi(a)) = \psi(\varphi(ar(a))) = ar(a)$$

et donc

$$r(a) = \frac{1}{a} \psi(a \exp(-a)) .$$

Question I.5.d.2 Puisque ψ est bornée par 1, on a

$$\forall a \in [1; +\infty[\quad 0 \leq r(a) \leq \frac{1}{a}$$

et donc, par le théorème de comparaison des limites,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} r(a) = 0 .$$

Remarque : puisque l'exponentielle est dominante, $a \exp(-a)$ tend vers 0 en $+\infty$. Or, en 0, $\varphi(x) \sim x$ et donc $\psi(x) \sim x$ également en 0. Il en résulte $\psi(a \exp(-a)) \sim a \exp(-a)$ en $+\infty$ et donc $r(a) \sim \exp(-a)$, ce qui est plus précis que la limite précédente.

Question I.5.e.1 Puisque $f' = af$, on a, par croissance de f

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{a}\right] \quad a \exp(-a) = af(0) \leq f'(x) \leq af\left(\frac{1}{a}\right) = ae \exp(-a) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(1)} .$$

Posons $m = \varphi(a)/\varphi(1)$. Par stricte positivité et stricte décroissance de φ sur $[1; +\infty[$, on a $0 < m < 1$. Et, d'après ce qui précède,

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{a}\right] \quad 0 < f'(x) \leq m .$$

Question I.5.e.2 Pour k entier naturel, notons (H_k) la propriété $0 \leq r(a) - u_k \leq m^k$. Puisque $u_0 = 0$ et $0 < r(a) < 1$, on a $|u_0 - r(a)| = r(a) < 1$ et donc la propriété (H_0) est vraie. Soit k un entier naturel. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante de limite $r(a)$, on a $u_k \leq r(a)$ et $u_{k+1} \leq r(a)$. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$0 \leq r(a) - u_{k+1} = f(r(a)) - f(u_k) \leq (r(a) - u_k) \sup_{u_k \leq x \leq r(a)} |f'(x)|.$$

Or, d'après ce qui a été écrit en réponse à I.5.d.1, $ar(a) < 1 < a$ et donc $0 \leq u_k \leq r(a) \leq 1/a$. Il en résulte, par positivité de f' et par I.5.e.1,

$$0 \leq r(a) - u_{k+1} \leq (r(a) - u_k) \sup_{0 \leq x \leq 1/a} f'(x) \leq m(r(a) - u_k)$$

et par conséquent la propriété (H_k) est héréditaire. Le principe de récurrence permet de conclure

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad 0 \leq r(a) - u_k \leq m^k.$$

A fortiori

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad |u_k - r(a)| \leq m^k.$$

Question I.5.f.1 Comme $L(a) = r(a)$, I.5.e.2 permet de conclure qu'une valeur approchée de $r(a)$ par défaut est donnée par u_k pour un k vérifiant $m^k \leq 10^{-2}$, avec $m = e\varphi(a)$. Autrement dit pour k supérieur à $-2 \ln(10)/\ln(m)$. Or

$$0 \geq \ln(m) = 1 + \ln(\varphi(a)) = \ln(a) - (a - 1)$$

Il en résulte

$$-2 \frac{\ln(10)}{\ln(m)} = 2 \frac{\ln(10)}{a - 1 - \ln(a)}.$$

Voici donc un algorithme en langage Ti-89 pour mettre en place ces idées.

```
L(a)
Prgm
If a>1 Then
0->u
0->k
2*ln(10)/(a-1-ln(a))->x
While k<x
k+1->k
e^(a*(u-1))->u
EndWhile
Else
1->u
EndIf
Disp a,u
EndPrgm
```

Remarque : ce n'est a priori pas la bonne méthode. En effet on calcule non pas u_k par cet algorithme mais une valeur approchée de u_k . Notons v_k la valeur calculée par la machine de sorte que $v_0 = 0$ et v_1 est la valeur de $\exp(-a)$ approchée calculée par la machine. Si la machine garantit une précision de ε à chaque calcul, avec par exemple $\varepsilon = 10^{-8}$, on a donc $|v_1 - u_1| \leq \varepsilon$ et, du coup,

$$|v_2 - u_2| \leq m|v_1 - u_1| + \varepsilon \leq (1 + m)\varepsilon$$

et donc

$$|v_k - u_k| \leq (1 + m + \dots + m^{k-1})\varepsilon = \frac{(1 - m^k)\varepsilon}{1 - m}.$$

D'où

$$|v_k - r(a)| \leq m^k + \frac{(1 - m^k)\varepsilon}{1 - m}.$$

Par exemple, pour $a = 2$, on trouve $-2\ln(10)/\ln(m) \simeq 15.007749$ et, pour $k = 16$, on a $|v_{16} - r(2)| \leq 0.00737514$.

Voici une «meilleure» méthode, bien que ce ne soit pas celle que suggère l'énoncé. Remarquons tout d'abord qu'on a, lorsque $a > 1$,

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad x < r(a) \Leftrightarrow (x < 1 \quad \text{et} \quad x < f(x)).$$

Soit maintenant x et ε deux réels tels que

$$\varepsilon > 0, \quad x < r(a) \quad \text{et} \quad x < f(x) < x + \varepsilon$$

alors on a, par croissance de f , $f(x) < r(a)$ et, d'après I.5.e.1 et le théorème des accroissements finis, $f(x) < f(f(x)) < f(x) + m\varepsilon$. On en déduit

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad f^k(x) < f^{k+1}(x) < f^k(x) + m^k\varepsilon$$

de sorte que

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad f^{k+1}(x) < x + \varepsilon(1 + m + \dots + m^k) < x + \frac{\varepsilon}{1 - m}.$$

Or, comme dans l'étude précédente, la suite $(f^k(x))_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite récurrente croissante attachée à la fonction continue f et prenant des valeurs inférieures à son plus petit point fixe $r(a)$. Elle converge donc vers ce point fixe. Il en résulte $r(a) \leq x + \varepsilon/(1 - m)$. D'où l'assertion

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad x < f(x) < x + \varepsilon < 1 \Rightarrow x < r(a) < x + \frac{\varepsilon}{1 - m}.$$

L'algorithme mettant ce théorème en action est essentiellement le même que précédemment : on itère f à partir de 0, c'est le test d'arrêt qui change. Avec les notations précédentes on calcule cette fois-ci v_k et non u_k et c'est v_k qui sera une approximation de $r(a)$ à 10^{-2} près dès que l'on peut vérifier $v_k < f(v_k) < v_k + (1 - m)10^{-2} < 1$.

Voici l'algorithme en langage Ti-89

```
L(a)
Prgm
If a>1 Then
0->u
While u+10^(-2)*(1-a*e^(1-a))<e^(a*(u-1))
e^(a*(u-1))->u
EndWhile
Else
1->u
EndIf
Disp a,u
EndPrgm
```

L'algorithme est bien meilleur. Déjà on n'abuse pas trop de la majoration grossière par m du I.5.e.1.

Question I.5.f.2 Avec l'algorithme suggéré par l'énoncé, on obtient :

a	k	$L(a) = r(a) \simeq u_k$	$f(u_k)$
2	16	0.20318779	0.20318784
4	3	0.01981792	0.01982665

Avec l'algorithme amélioré, on obtient :

a	k	$L(a) = r(a) \simeq u_k$	$f(u_k)$
2	4	0.19907981	0.20152529
4	1	0.01831564	0.01970787

Si l'on veut tronquer ces résultats, par exemple à la seconde décimale, il faut faire attention. Pour $a = 2$, on a $0.2 < f(0.2) < 0.202 < 1$ et donc $0.2 < L(2) < 0.21$, i.e. 0.2 est une valeur approchée par défaut de $L(2)$ à 10^{-2} près.

Mais pour $a = 4$, on a $f(0.01) \simeq 0.0191$ ce qui ne permet pas de conclure. Par contre $0.019 < f(0.019) < 0.0198 < 1$ et donc $0.019 < L(4) < 0.029$: 0.019 est une valeur approchée par défaut de $L(4)$ à 10^{-2} près.

Néanmoins $f(0.02) > 0.02$, de sorte que $0.01 < L(4) < 0.02$ et 0.02 est une valeur approchée de $L(4)$ **par excès**. Il en résulte également que 0.01 est, finalement, une valeur approchée par défaut de $L(4)$ à 10^{-2} près.

Question I.6.a On a déjà remarqué en I.5.b que, pour tout $a > 1$, on a $\exp(a(r(a) - 1)) = f(r(a)) = r(a)$ et donc $\exp(a(L(a) - 1)) = L(a)$. En admettant que L est de classe C^1 sur $]1; +\infty[$, il vient

$$\forall a \in]1; +\infty[\quad L'(a) = (L(a) - 1 + aL'(a)) \exp(a(L(a) - 1)) = (L(a) - 1 + aL'(a))L(a)$$

et donc

$$\forall a \in]1; +\infty[\quad (aL(a) - 1)L'(a) = L(a)(1 - L(a))$$

i.e. L est solution de l'équation différentielle

$$(ay - 1) \frac{dy}{da} = y(1 - y)$$

sur $]1; +\infty[$.

Remarque : notons F la fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} définie par $F(a, x) = \exp(a(x - 1)) - x$. C'est une fonction de classe C^∞ en les deux variables et on a

$$\frac{\partial F}{\partial a} = (x - 1) \exp(a(x - 1)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = a \exp(a(x - 1)) - 1.$$

Pour $a > 1$ et $x = r(a)$, on a $F(a, x) = 0$. Comme on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, r(a)) = ar(a) - 1 < 0$$

en particulier la dérivée partielle de F par rapport à x en $(a, r(a))$ est non nulle et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. La fonction r peut donc être définie au voisinage de a (ce que l'on sait déjà) et y est de classe C^1 . De plus on a

$$r'(a) = -\frac{\partial F}{\partial a}(a, r(a)) / \frac{\partial F}{\partial x}(a, r(a)) = -\frac{(r(a) - 1)r(a)}{ar(a) - 1},$$

ce qui est le résultat que l'on vient de trouver.

Question I.6.b On suppose $a > 1$. Comme r est à valeurs dans $]0; 1[$, on a $(1 - r(a))r(a) > 0$. Par ailleurs $ar(a) < 1$ d'après I.5.d.1 et donc $L'(a) < 0$. Il en résulte que L est décroissante sur $]1; +\infty[$.

Question I.6.c La fonction L est constante sur $[0; 1]$. Elle tend vers 0 exponentiellement en $+\infty$ et, en particulier, son graphe est asymptote à l'axe des abscisses.

On peut tracer approximativement les valeurs et les tangentes au graphe de L en 2 et 4. On a $0.20 \leq L(2) \leq 0.21$ et donc

$$-0.29 \leq -\frac{0.21(1 - 0.20)}{1 - 2 \times 0.21} \leq L'(2) \leq -\frac{0.20(1 - 0.21)}{1 - 2 \times 0.20} \leq -0.26.$$

De même, à partir de $0.019 \leq L(4) \leq 0.02$, on tire

$$-0.022 \leq -\frac{0.02(1 - 0.019)}{1 - 4 \times 0.02} \leq L'(4) \leq -\frac{0.019(1 - 0.02)}{1 - 4 \times 0.019} \leq -0.02.$$

De plus L est décroissante sur $]1; +\infty[$ et donc L a une limite à droite en 1 et celle-ci est inférieure à 1 puisque L prend des valeurs inférieures à 1.

Remarque : on peut préciser cette limite. En effet, pour $a > 1$, comme f est de classe C^2 sur \mathbf{R} , on peut écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre $r(a)$ et 1. On obtient

$$r(a) = f(r(a)) = f(1) + (r(a) - 1)f'(1) + \frac{(r(a) - 1)^2}{2}f''(c) = 1 + (r(a) - 1) \left(a + \frac{a^2}{2}(r(a) - 1)f(c) \right)$$

pour un certain c compris entre $r(a)$ et 1. On peut récrire l'égalité précédente en divisant par $r(a) - 1$ qui n'est pas nul d'après I.4.a.4. et on obtient

$$1 = a + \frac{a^2}{2}(r(a) - 1)f(c)$$

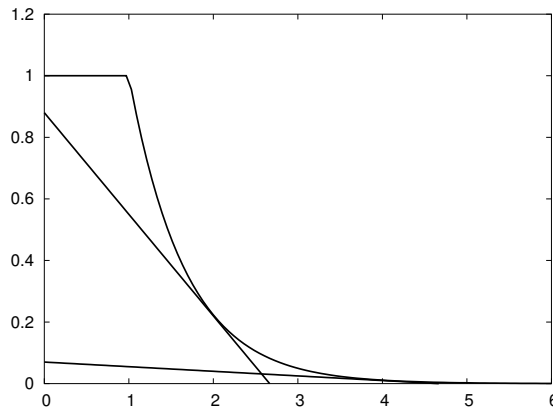
ou encore, par stricte positivité de f ,

$$1 - r(a) = \frac{2(a - 1)}{a^2 f(c)}.$$

Comme $0 \leq r(a) \leq c \leq 1$, il vient $\exp(-a) \leq f(c) \leq 1$ et donc

$$\frac{2(a - 1)}{a^2} \leq 1 - r(a) \leq \frac{2e^a(a - 1)}{a^2}.$$

D'après le théorème de comparaison des limites, r admet donc 1 comme limite à droite en 1. Par conséquent L est continue en 1 et donc sur \mathbf{R}_+ .



Remarquons que L est une fonction convexe sur $]1; +\infty[$. En effet, puisque $aL(a) < 1$ pour $a > 1$, l'équation différentielle que satisfait L montre que L est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$. On obtient en dérivant $(aL - 1)L' = L(1 - L)$:

$$\begin{aligned} (aL - 1)L'' + (L + aL')L' &= L'(1 - 2L) \\ (aL - 1)L'' &= L'(1 - 3L - aL') \\ (aL - 1)^2 L'' &= L'((1 - 3L)(aL - 1) - aL(1 - L)) \\ (aL - 1)^2 L'' &= L'(-1 + 3L - 2aL^2) \\ (aL - 1)^2 L'' &= -L'(1 - 3L + 2aL^2) \end{aligned}$$

et donc, puisque L' est négative sur $]1; +\infty[$, L'' est du signe de $1 - 3L + 2aL^2$ sur ce domaine. En particulier, si $9 - 8a$ est négatif, i.e. si $a > 9/8$, alors $1 - 3L + 2aL^2$ est positif et donc L'' aussi. Si maintenant $1 < a < 9/8$, alors

$$1 < \frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{9 - 8a} < 1 \Leftrightarrow 1 < a$$

et donc $L(a) < 1 < (3 - \sqrt{9 - 8a})/2$. Par conséquent $1 - 3L + 2aL^2$ est positif et donc L'' aussi. Finalement L'' est positive sur $]1; +\infty[$ et L y est convexe.

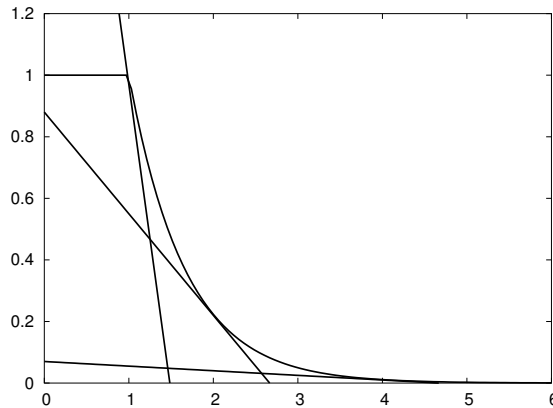
Il résulte de cette remarque que L n'est pas de classe C^1 sur \mathbf{R}_+^* . En effet L est dérivable à gauche en 1, de dérivée nulle. Sa dérivée a une limite à droite en 1 (finie ou infinie) puisque cette dérivée est une fonction croissante sur $]1; +\infty[$. Cette limite est donc inférieure à $L'(2)$ qui est strictement négatif. Elle ne peut donc être nulle et ainsi L n'est pas continûment dérivable en 1.

Remarque : le calcul montrant la continuité de L donne également la valeur de la dérivée à droite de L en 1. En effet, on a vu que, pour $a > 1$, il existe $c(a)$ entre $r(a)$ et 1 tel que

$$\frac{r(a) - 1}{a - 1} = -\frac{2}{a^2 f(c(a))}.$$

Comme $r(a) \leq c(a) \leq 1$, le théorème d'encadrement des limites assure que $c(a)$ tend vers 1 lorsque a tend vers 1. Par continuité de f , $f(c(a))$ tend donc vers 1 aussi dans les mêmes conditions. Il en résulte

$$\lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{r(a) - 1}{a - 1} = -2.$$



Remarque : il est très difficile de résoudre l'équation différentielle que satisfait L avec la condition $L(1) = 1$. En effet le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas. De même on ne peut appliquer le théorème des fonctions implicites à $F(a, x) = \exp(a(x-1)) - x$ au voisinage $(1, 1)$. Moralement il y a deux solutions à l'équation en x , $F(a, x) = 0$. L'une d'entre elle est la solution constante égale à 1. La seconde est une fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R}_+^* , égale à L sur $]1; +\infty[$ et qui est la solution «la plus grande» lorsque $0 < a < 1$.

Partie II

Question II.1.a Soit n et k deux entiers naturels. Si le temps de service du client initial est n , il y a n intervalles $[i-1, i[$ pendant chacun desquels il peut arriver un client ou non : si la variable aléatoire B_i prend la valeur 1, un client arrive dans $[i-1, i[$, si elle prend la valeur 0, il n'en arrive pas. On peut donc écrire que le nombre de clients arrivés dans le temps de service du client initial est égal à la somme de ces B_i pour i allant de 1 à n . Formellement, cela donne :

$$(D = n \ \& \ N_1 = k) = \left(D = n \ \& \ \sum_{i=1}^n B_i = k \right)$$

Remarque : contrairement à l'usage en probabilités, on a noté $(X \ \& \ Y)$ l'évènement « X et Y », c'est-à-dire l'intersection de X et Y . La notation standard est plutôt (X, Y) .

L'évènement $D = n$ est de probabilité $\exp(-\lambda)\lambda^n/n!$ et est donc de probabilité non nulle. On peut donc parler de probabilité conditionnelle relativement à cet évènement et on a

$$\mathbf{P}(N_1 = k \mid D = n) = \frac{\mathbf{P}(D = n \ \& \ N_1 = k)}{\mathbf{P}(D = n)} = \frac{\mathbf{P}(D = n \ \& \ \sum_{i=1}^n B_i = k)}{\mathbf{P}(D = n)} = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n B_i = k \mid D = n\right).$$

Ce n'est pas explicite dans l'énoncé, mais les variables aléatoires $(B_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ et les divers temps de services, donc en particulier D , sont supposées mutuellement indépendantes. Il en résulte

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n B_i = k \mid D = n\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n B_i = k\right).$$

Or la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p suit une loi binomiale de paramètres n et p , i.e. pour k entier naturel inférieur à n , on a

$$\mathbf{P}(N_1 = k \mid D = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et sinon $\mathbf{P}(N_1 = k \mid D = n) = 0$.

Remarque : de manière générale, on peut écrire que le nombre de clients arrivant pendant le temps de service du client initial est la somme aléatoire des D variables aléatoires B_i , i allant de 1 à D :

$$N_1 = \sum_{i=1}^D B_i.$$

Question II.1.b Si A est un évènement et $(\Omega_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une famille d'évènements de probabilités non nulles et formant une partition de Ω , on a

$$A = \cup_{i=0}^{+\infty} (A \cap \Omega_i) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A \cap \Omega_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A \mid \Omega_i) \mathbf{P}(\Omega_i).$$

La famille $(D = n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une partition de Ω , puisque D est à valeurs entières, d'évènements de probabilités non nulles ainsi qu'il a été remarqué en II.1.a. Soit k un entier naturel, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_1 = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}(N_1 = k \mid D = n) \mathbf{P}(D = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} p^k (1-p)^{n-k} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^n}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} p^k (1-p)^n \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{n+k}}{k!n!} \\ &= \exp(-\lambda) \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^n}{n!} = \exp(-\lambda) \frac{(\lambda p)^k}{k!} \exp((1-p)\lambda) \\ &= \exp(-p\lambda) \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

et donc N_1 suit une loi de Poisson de paramètre λp et son espérance est égale à son paramètre, i.e. $\mathbf{E}(N_1) = \lambda p$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N_1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbf{P}(N_1 = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(-p\lambda) \frac{k(\lambda p)^k}{k!} = \exp(-p\lambda) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(\lambda p)^k}{k!} \\ &= \exp(-p\lambda) \lambda p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda p \exp(-p\lambda) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \\ &= \lambda p \exp(-p\lambda) \exp(p\lambda) \\ &= \lambda p. \end{aligned}$$

Remarque : en d'autres termes, on vient de démontrer que, si durant chaque intervalle de temps unité un client arrive avec une probabilité p et si on se donne une durée aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ , alors le nombre total de clients arrivant pendant cette durée aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre λp .

Question II.2.a.1 L'évènement

La file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini

est la réunion, pour k entier naturel, des évènements

La file d'attente au guichet s'achève avant le temps k

ou encore

Au temps k , il n'y a personne au guichet

c'est-à-dire que c'est la réunion des évènements $(N_k = 0)$ pour k entier naturel. Comme $(N_0 = 1)$, c'est aussi la réunion des évènements $(N_k = 0)$ pour k entier supérieur à 1.

Question II.2.a.2 Soit k un entier naturel. S'il n'y a pas de client à la k^e vague, il n'y a personne à servir et donc pas de temps de service. Par conséquent personne ne peut se présenter durant le temps de service de la k^e vague et ainsi le nombre de clients de la $(k + 1)^e$ vague est également nul. Il en résulte $(N_k = 0) \subset (N_{k+1} = 0)$. En particulier la suite $(N_k = 0)_{k \in \mathbf{N}^*}$ est croissante.

Question II.2.a.3 Soit k un entier naturel, puisque $(N_k = 0) \subset (N_{k+1} = 0)$, on a $\mathbf{P}(N_k = 0) \leq \mathbf{P}(N_{k+1} = 0)$ et donc la suite $(p_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par 1, elle converge vers une limite L , inférieure ou égale à 1.

Puisque la suite $(N_k = 0)_{k \in \mathbf{N}}$ est croissante, on a

$$\mathbf{P}(\cup_{k \in \mathbf{N}}(N_k = 0)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(N_k = 0) .$$

Autrement dit la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini est égale à L .

Remarque : rappelons la démonstration du résultat utilisé. On a

$$\cup_{k \in \mathbf{N}}(N_k = 0) = (N_0 = 0) \cup (\cup_{k \in \mathbf{N}}(N_{k+1} = 0 \ \& \ N_k \neq 0))$$

et cette dernière écriture est une réunion disjointe. Quand on a une union disjointe, la probabilité de l'union est la somme des probabilités. En particulier, si k est un entier naturel

$$(N_{k+1} = 0) = (N_k = 0) \cup (N_{k+1} = 0 \ \& \ N_k \neq 0)$$

et donc $\mathbf{P}(N_{k+1} = 0) = \mathbf{P}(N_k = 0) + \mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \ \& \ N_k \neq 0)$ et

$$\mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \ \& \ N_k \neq 0) = \mathbf{P}(N_{k+1} = 0) - \mathbf{P}(N_k = 0) .$$

Il vient

$$\mathbf{P}(\cup_{k \in \mathbf{N}}(N_k = 0)) = \mathbf{P}(N_0 = 0) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \ \& \ N_k \neq 0) = \mathbf{P}(N_0 = 0) + \sum_{k=0}^{+\infty} (\mathbf{P}(N_{k+1} = 0) - \mathbf{P}(N_k = 0)) .$$

D'où

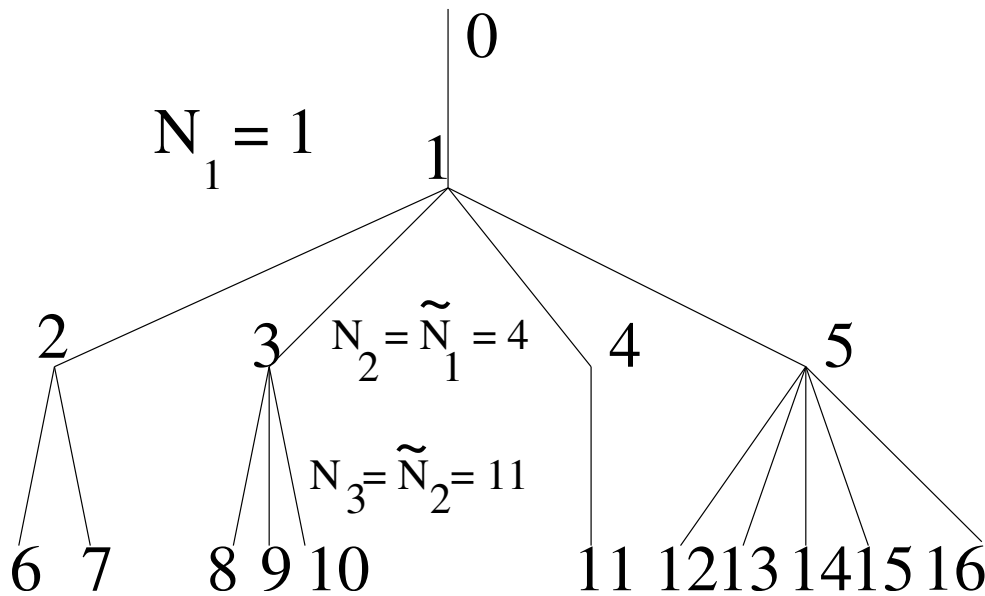
$$\mathbf{P}(\cup_{k \in \mathbf{N}}(N_k = 0)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(N_k = 0) .$$

Question II.2.b Étudier une probabilité conditionnellement à l'évènement $N_1 = 1$ c'est se placer dans un cadre où $N_1 = 1$ est un évènement certain. Supposons donc que l'on ait $N_1 = 1$. Dans ce cas, à la fin du temps de service du client initial,

disons n , l'unique client de la première vague est au guichet. Si l'on recommence à numéroté le temps et les vagues à partir de cet instant n , on est dans une situation identique, formellement, à la situation de départ.

Soit maintenant k un entier naturel non nul. Les considérations précédentes se traduisent par le fait que la $(k+1)^e$ vague pour le client initial est la « k^e vague pour le seul client qui arrive pendant le temps de service du client initial ». Donc dire que la $(k+1)^e$ vague est vide revient à dire que la k^e vague pour le deuxième client est vide. Or le comportement des vagues après un client ne dépend pas de son instant d'arrivée et l'assertion en découle.

Pour se convaincre que le comportement des vagues est bien celui que l'on vient de dire, on peut raisonner comme suit. Comme les variables B_i sont indépendantes des temps de services, la suite de variables $(B_i)_{n \leq i}$ et la suite de variables $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ont la même loi. Si on note D_j le temps de service du j^e client, de sorte que $D_0 = D$, par indépendance et équidistribution, les suites $(D_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ont même loi. Si on note avec des tildes tout ce qui concerne la situation à partir de l'unique client de la première vague, on a $\tilde{B}_i = B_{n+i}$, $\tilde{D}_i = D_{i+1}$ et $\tilde{N}_i = N_{i+1}$. Ceci est illustré par le graphe suivant



où, sous chaque client, on a placé le nombre de clients arrivés durant son temps de service, ce nombre étant aléatoire. On a donc

$$(N_{k+1} = 0 \ \& \ N_1 = 1) = (N_1 = 1 \ \& \ \tilde{N}_k = 0)$$

et il vient, puisque $\mathbf{P}(N_1 = 1)$ n'est pas nul,

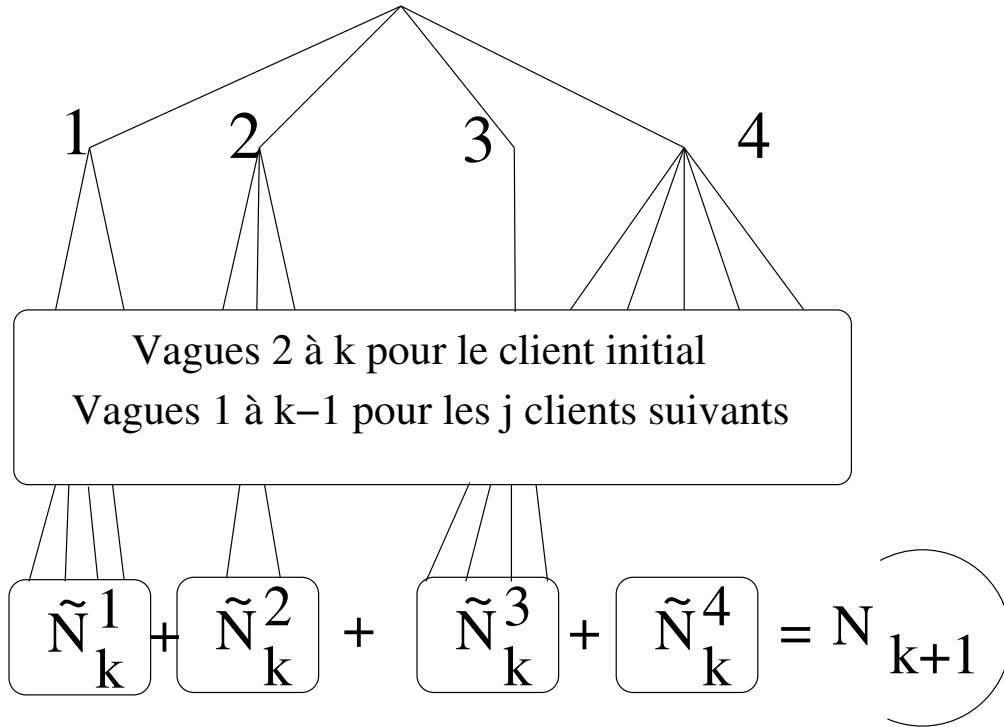
$$\mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = 1) = \frac{\mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \ \& \ N_1 = 1)}{\mathbf{P}(N_1 = 1)} = \frac{\mathbf{P}(N_1 = 1 \ \& \ \tilde{N}_k = 0)}{\mathbf{P}(N_1 = 1)}.$$

Par indépendance de \tilde{N}_k et N_1 , il en résulte

$$\mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = 1) = \mathbf{P}(\tilde{N}_k = 0) = \mathbf{P}(N_k = 0)$$

puisque \tilde{N}_k et N_k ont même loi.

Soit maintenant j un entier naturel non nul. On suppose que la première vague (du client initial) comporte j clients, la $(k+1)^e$ vague pour le client initial est constituée de la réunion des k^e vagues de ces j clients en convenant de nommer, pour ℓ entre 1 et j , « k^e vague du client ℓ » les clients de $(k+1)^e$ vague qui sont sous lui dans le graphe précédent.



Par indépendance des $(B_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ et des $(D_i)_{i \in \mathbf{N}}$, chacune des vagues des clients 1 à j sont indépendantes et, par équidistribution des $(B_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ et équidistribution des $(D_i)_{i \in \mathbf{N}}$, les k^{e} vagues des clients 1 à j ont même loi. Notons \tilde{N}_k^ℓ le nombre de clients de la k^{e} vague du client ℓ , autrement dit le nombre de clients de la $(k+1)^{\text{e}}$ vague qui sont sous le client ℓ dans le graphe précédent. On a

$$(N_{k+1} = 0 \ \& \ N_1 = j) = \left(\sum_{\ell=1}^j \tilde{N}_k^\ell = 0 \ \& \ N_1 = j \right)$$

et donc, puisque $\mathbf{P}(N_1 = j)$ est non nul,

$$\mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = j) = \frac{\mathbf{P}\left(\sum_{\ell=1}^j \tilde{N}_k^\ell = 0 \ \& \ N_1 = j\right)}{\mathbf{P}(N_1 = j)}$$

et donc, par indépendance des $(\tilde{N}_k^\ell)_{1 \leq \ell \leq j}$ et de N_1 ,

$$\mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = j) = \mathbf{P}\left(\sum_{\ell=1}^j \tilde{N}_k^\ell = 0\right) = \mathbf{P}\left(\cup_{\ell=1}^j (\tilde{N}_k^\ell = 0)\right)$$

ou encore, par indépendance mutuelle des $(\tilde{N}_k^\ell)_{1 \leq \ell \leq j}$,

$$\mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = j) = \prod_{\ell=1}^j \mathbf{P}(\tilde{N}_k^\ell = 0).$$

Enfin, puisque les $(\tilde{N}_k^\ell)_{1 \leq \ell \leq j}$ ont même loi que N_k , il vient

$$\mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = j) = \prod_{\ell=1}^j \mathbf{P}(N_k = 0) = \mathbf{P}(N_k = 0)^j.$$

Remarque : il est possible d'écrire cela formellement, mais cela est très lourd et n'apporte rien à la compréhension. Ainsi le temps de service du premier client est $D = D_0$, celui de la première vague est $D_1 + \dots + D_{N_1}$. Celui de la seconde $D_{N_1+1} + \dots + D_{N_1+N_2}$. Le nombre de clients de la première vague est $N_1 = B_1 + \dots + B_{D_0}$, celui de la seconde vague est $N_2 = B_{D_0+1} + \dots + B_{D_0+\dots+D_{N_1}}$ et plus généralement

$$N_{k+1} = \sum_{i=D_0+\dots+D_{N_1+\dots+N_{k-1}+1}}^{D_0+\dots+D_{N_1+\dots+N_k}} B_i = \sum_{i=1+\sum_{j=0}^{N_1+\dots+N_{k-1}} D_j}^{\sum_{j=0}^{N_1+\dots+N_k} D_j} B_i$$

ce qui correspond aux clients arrivant durant les $D_{N_{k-1}+1} + \dots + D_{N_k}$ instants qu'à duré la k^e vague. On voit ici que \tilde{N}_k et N_1 sont sommes de variables B_i distinctes et ceci assure qu'ils sont indépendants l'un de l'autre. Et il en va de même pour les \tilde{N}_k^ℓ et N_1 .

Question II.2.c.1 Soit k un entier naturel non nul. En utilisant la formule des probabilités totales et le fait que les événements $(N_1 = j)_{j \in \mathbf{N}}$ sont de probabilité non nulle et forment une partition de l'espace Ω , il vient

$$p_{k+1} = \mathbf{P}(N_{k+1} = 0) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = j) \mathbf{P}(N_1 = j)$$

Puisque, d'après II.1.b, N_1 suit une loi de Poisson de paramètre λp , en utilisant la question précédente on obtient :

$$p_{k+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} p_k^j \exp(-\lambda p) \frac{(\lambda p)^j}{j!} = \exp(-\lambda p) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p p_k)^j}{j!} = \exp(-\lambda p) \exp(\lambda p p_k).$$

Et donc $p_{k+1} = \exp(\lambda p(p_k - 1))$.

Question II.2.c.2 On a posé $N_0 = 1$ et on a donc $p_0 = \mathbf{P}(N_0 = 0) = 0$. La formule précédente est donc valable y compris lorsque k est nul. Par conséquent la suite $(p_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est la suite récurrente définie en première partie pour a égal à λp . Par conséquent la suite $(p_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers $L(\lambda p)$.

D'après I.2 et I.3, si $\lambda p \leq 1$, $(p_k)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers 1, i.e. l'événement «la file d'attente s'achève en un temps fini» est de probabilité 1 ou encore «presque sûrement il existe un instant (aléatoire) où il n'y a plus personne au guichet».

Par contre, d'après I.4, si $\lambda p > 1$, cela n'est plus vrai : l'événement «la file d'attente s'achève en un temps fini» est de probabilité $L(\lambda p)$ ou encore l'évènement «la file ne s'arrête pas et donc il y a toujours du monde au guichet» est de probabilité strictement positive égale à $1 - L(\lambda p)$.

Question II.2.d On trouve ci-dessous le tableau croisant les diverses valeurs de p (en ligne) et celles de λ (en colonne) et donnant la valeur de $L(\lambda p)$, i.e. la valeur de la probabilité que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini.

$p \backslash \lambda$	1	2	4	8
0.5	1	1	$\simeq 0.20$	$\simeq 0.01$
0.25	1	1	1	$\simeq 0.20$

Les valeurs précédées du symbole \simeq sont des valeurs approchées à 10^{-2} de $L(\lambda p)$.

Question II.3.a.1 Si l'événement $(N_k = 0)$ est réalisé, il n'y a aucun client à servir et le temps de service associé est donc nul : la loi de la durée de service est celle de la variable aléatoire certaine égale à 0.

Soit i un entier naturel non nul. Si l'événement $(N_k = i)$ est réalisé, cela signifie qu'il y a i clients à servir, dont les temps de service sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ : la durée de service de ces i clients est donc la somme de i variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ , elle suit une loi de Poisson de paramètre $i\lambda$.

Remarque : en effet, une variable aléatoire T , somme de deux variables aléatoires indépendantes U_1 et U_2 , suivant chacune une loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 , suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$, puisque, si n est un entier naturel,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(T = n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(T = n \ \& \ U_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(U_2 = n - k \ \& \ U_1 = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(U_2 = n - k) \mathbf{P}(U_1 = k) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(U_2 = n - k) \mathbf{P}(U_1 = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n \exp(-\lambda_1) \frac{\lambda_1^k}{k!} \exp(-\lambda_2) \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)) \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
 &= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)) \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
 &= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)) \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} .
 \end{aligned}$$

Par conséquent la somme de i variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_i$.

Question II.3.a.2 Si l'évènement ($N_k = 0$) est réalisé, on a vu en II.2.a.2 que l'évènement ($N_{k+1} = 0$) est également réalisé.

Soit i un entier naturel non nul. Si l'évènement ($N_k = i$) est réalisé, d'après ce qui précède la durée de service de ces i clients suit une loi de Poisson de paramètre $i\lambda$. D'après II.1.b, N_{k+1} suit donc, conditionnellement à l'évènement $N_k = i$, une loi de Poisson de paramètre $i\lambda p$.

On en déduit immédiatement

$$\mathbf{E}(N_{k+1} \mid N_k = i) = i\lambda p .$$

Remarque : on peut rassembler les deux résultats précédents en un seul. Conditionnellement à l'évènement ($N_k = i$), N_{k+1} suit une loi de Poisson de paramètre $i\lambda p$.

Remarque : on peut démontrer le résultat de façon plus détaillée, i.e. sans faire appel à II.1.b. Notons T_k la durée de service des clients de la k^{e} vague. Conditionnellement à $T_k = n$, le nombre de clients de la $(k+1)^{\text{e}}$ vague suit une loi binomiale de paramètres n et p , ceci ne dépendant pas des arrivées précédentes. En utilisant la formule des probabilités totales, il vient, pour i entier naturel non nul,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(N_{k+1} = j \mid N_k = i) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N_{k+1} = j \ \& \ T_k = n \mid N_k = i) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N_{k+1} = j \mid (T_k = n \ \& \ N_k = i)) \mathbf{P}(T_k = n \mid N_k = i) \\
 &= \sum_{n=j}^{+\infty} \exp(-i\lambda) \frac{(i\lambda)^n}{n!} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\
 &= \exp(-i\lambda) p^j (i\lambda)^j \frac{1}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{(i\lambda p)^{n-j}}{(n-j)!} \\
 &= \exp(-i\lambda + i\lambda(1-p)) \frac{(i\lambda p)^j}{j!} \\
 &= \exp(-i\lambda p) \frac{(i\lambda p)^j}{j!}
 \end{aligned}$$

Question II.3.b.1 On suppose que l'espérance $\mathbf{E}(N_k)$ existe, c'est-à-dire que la série de terme général $(i\mathbf{P}(N_k = i))_{i \in \mathbf{N}}$ est convergente et qu'on a

$$\mathbf{E}(N_k) = \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbf{P}(N_k = i).$$

D'après II.3.a.2, on a

$$i = \frac{1}{\lambda p} \mathbf{E}(N_{k+1} | N_k = i)$$

et donc

$$\mathbf{E}(N_k) = \frac{1}{\lambda p} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(N_k = i) \mathbf{E}(N_{k+1} | N_k = i).$$

Question II.3.b.2 Si X et Y désignent deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N} , pour i et j entiers naturels, on suppose que $(X = i)$ est un évènement de probabilité non nulle et on note $v_{ij} = j\mathbf{P}(Y = j | X = i)\mathbf{P}(X = i)$. On reprend les notations des préliminaires A_i et B_j .

Pour j entier naturel, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$B_j = \sum_{i=0}^{+\infty} v_{ij} = j\mathbf{P}(Y = j).$$

Autrement dit les séries définissant les nombres $(B_j)_{j \in \mathbf{N}}$ sont convergentes et la série de terme général $(B_j)_{j \in \mathbf{N}}$ converge si et seulement si Y a une espérance.

Pour i entier naturel, par définition,

$$A_i = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij} = \mathbf{P}(X = i) \mathbf{E}(Y | X = i).$$

Autrement dit les séries définissant les nombres $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ sont convergentes si et seulement si Y possède des espérances conditionnellement aux évènements $(X = i)_{i \in \mathbf{N}}$.

Par conséquent, d'après P.2, si Y a une espérance ou bien si d'une part Y possède des espérances conditionnellement aux évènements $(X = i)_{i \in \mathbf{N}}$ et d'autre part la série $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{E}(Y | X = i)\mathbf{P}(X = i)$ est convergente, alors les deux propriétés sont vérifiées simultanément et on a

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{E}(Y | X = i)\mathbf{P}(X = i).$$

Autrement dit si l'un des deux côtés a un sens, l'autre aussi et l'égalité est vérifiée.

Question II.3.b.3 Soit i un entier naturel, l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(N_{k+1} | N_k = i)$ existe et vaut $i\lambda p$ d'après II.3.a.2. De plus, puisque N_k a une espérance, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} i\mathbf{P}(N_k = i)$ converge et sa somme est $\mathbf{E}(N_k)$. Par conséquent la série

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{E}(N_{k+1} | N_k = i)\mathbf{P}(N_k = i)$$

converge et sa somme est $\lambda p \mathbf{E}(N_k)$. D'après II.3.b.2 N_{k+1} a donc une espérance et on a

$$\mathbf{E}(N_{k+1}) = \lambda p \mathbf{E}(N_k).$$

Question II.3.c Pour i entier naturel, soit (H_i) la propriété « N_i a une espérance et $\mathbf{E}(N_i) = (\lambda p)^i$ ». Puisque N_0 est la variable aléatoire presque sûrement égale à 1, elle admet une espérance et on a $\mathbf{E}(N_0) = 1$. La propriété (H_0) est donc vraie. La question II.3.b.3 montre que (H_i) est une propriété héréditaire.

Le principe de récurrence permet d'affirmer donc que pour tout i dans \mathbf{N} , N_i a une espérance et qu'on a

$$\forall i \in \mathbf{N} \quad \mathbf{E}(N_i) = (\lambda p)^i .$$

Question II.3.d Soit n un entier naturel non nul. Le nombre de clients qui se présentent au guichet du client initial inclus jusqu'à ceux de la n^{e} vague incluse est égal à la somme $\sum_{k=0}^n N_k$. L'espérance de ce nombre de clients est donc, par linéarité de l'espérance $\sum_{k=0}^n (\lambda p)^k$.

L'espérance recherchée est donc $n + 1$, si $\lambda p = 1$, et $\frac{1 - (\lambda p)^{n+1}}{1 - \lambda p}$ sinon.

Question II.3.e Lorsque $\lambda p < 1$, l'espérance du nombre de clients total est fini et vaut $1/(1 - \lambda p)$. Ceci entraîne que la file d'attente a une probabilité 1 de s'arrêter en un temps fini. C'est bien ce qu'on a obtenu en II.2.c.2.

Numériquement, si $(\lambda, p) = (1, 0.5)$ ou si $(\lambda, p) = (2, 0.25)$, l'espérance du nombre de clients est 2 et si $(\lambda, p) = (1, 0.25)$, cette espérance est $4/3$. Il y a donc très probablement peu de clients : les files d'attente se résorbent très vite.

Remarque : Lorsque $\lambda p > 1$, le nombre moyen de clients sur l'ensemble des vagues est infini, ce qui est évident puisque la file d'attente a une probabilité strictement positive de ne pas s'arrêter en un temps fini. Par contre pour le cas limite $\lambda p = 1$, le nombre moyen de clients de l'ensemble des vagues est infini bien que la file d'attente ait une probabilité 1 de s'arrêter en un temps fini.