

### Partie I – La méthode de dichotomie

**Question I.1.a** Cela résulte de l'inégalité des accroissements finis. Si  $x$  appartient à  $[a, b]$ , on a

$$\begin{aligned} |g(x)| &\geq \left| g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left| g(x) - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right| \\ &\geq \left| g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \sup_{a \leq t \leq b} |g'(t)| \right| \\ &\geq \left| g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{2} \sup_{a \leq t \leq b} |g'(t)| \right| \\ &> 0. \end{aligned}$$

**Question I.1.b** On applique la question précédente à  $f'$ , celle-ci ne s'annule pas sur  $[a, b]$  et donc  $f$  y est strictement monotone. L'assertion en résulte.

**Question I.2.a** Comme  $f'(x)$  est non nul par hypothèse  $f$  est localement strictement monotone au voisinage de  $x$  : il existe un intervalle  $I_x$  centré en  $x$  tel que  $f'$  soit de signe constant sur  $I_x$  et donc  $f$  n'y admet que  $x$  comme zéro.

**Question I.2.b** Supposons que  $f$  ait une infinité de zéros sur  $I$ . Par compacité de cet intervalle, on pourrait donc construire une suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de zéros de  $f$  tous distincts et convergente dans  $I$ . Notons  $x$  sa limite. Par continuité de  $f$  sur  $I$ ,  $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = 0$  et donc, d'après ce qui précède il existe un intervalle  $I_x$  centré en  $x$  tel que  $x$  soit l'unique zéro de  $f$  sur  $I_x$ . Ceci est en contradiction avec le fait que  $x$  soit la limite de  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**Question I.3.a** Puisque  $Z$  est fini,  $m_1$  est égal à  $|f'(x)|$  pour un certain  $x$  dans  $Z$ . Par hypothèse sur  $f$ , c'est donc un réel strictement positif. Par compacité de  $I$ ,  $M_2$  est également atteint et est donc un réel positif.

**Question I.3.b** Si  $M_2$  est nul  $f'$  est constante égale à  $m_1$  et il n'y a rien à démontrer (mais l'énoncé aurait sûrement été mieux inspiré d'écrire les choses sous la forme  $M_2|z - t| \leq m_1/2 \Rightarrow |f'(z)| > m_1/2$  : on ne peut vraiment faire confiance à personne!). Sinon l'inégalité des accroissements finis appliquée à  $f'$  entre un zéro  $z$  de  $f$  et  $t$  dans  $I$  donne

$$|f'(t)| \geq |f'(z)| - |t - z|M_2 \geq m_1 - |t - z|M_2$$

et l'assertion en résulte.

**Question I.3.c** Si  $M_2$  est nul (i.e.  $f$  est affine) il n'y a rien à démontrer (par exemple en utilisant la question précédente). On se place donc dans le cas où  $M_2$  n'est pas nul.

On note  $J$  la réunion des intervalles  $]x - m_1/2M_2, x + m_1/2M_2[ \cap [a, b]$  pour  $x$  dans  $Z$  et  $K$  son complémentaire dans  $[a, b]$ .

$K$  est compact en tant que fermé dans l'intervalle compact  $[a, b]$  et donc la fonction continue  $|f|$  y atteint son minimum. Ce dernier n'est pas nul par définition de  $Z$ . Notons-le  $m$ .

Soit maintenant  $n$  tel que  $\beta(b - a)2^{-n}$  soit inférieur à  $m_1/2$  et  $\alpha(b - a)2^{-n}$  soit inférieur à  $m$ . D'après la question précédente, si  $t$  appartient à  $J$ ,  $|f'(x)|$  est supérieur à  $m_1/2$  et s'il appartient à  $K$ ,  $|f(x)|$  est supérieur à  $m$ . L'assertion en résulte.

**Question I.3.d** Ceci résulte immédiatement de la propriété de  $n$  et de la question I.1. (à condition de donner à la subdivision la longueur  $2^n$  et non  $n$  : ce problème est un excellent exercice de travail sur un énoncé pas totalement faux mais tout de même un petit peu ... Bref la subdivision est « évidemment »  $(c_k)_{0 \leq k \leq 2^n}$ ).

**Question I.3.e** On détermine  $\alpha$  et  $\beta$  empiriquement. Si  $c = (a+b)/2$  vérifie l'une des relations 1 ou 2, le signe de  $f(a)f(b)$  détermine le nombre de zéros de  $f$  sur  $[a, b]$ . Sinon on subdivise  $[a, b]$  en deux :  $[a, c]$  et  $[c, b]$ . Sur chacun de ces intervalles on détermine éventuellement de nouvelles valeurs pour  $\alpha$  et  $\beta$  et on recommence sur chacun d'eux le test précédent (en  $(a+c)/2$  et  $(c+b)/2$  respectivement). Le théorème assure qu'en au plus  $n$  subdivisions tous les milieux vérifieront le test. Bien sûr si l'on désire une précision supérieure on peut continuer la dichotomie dans les intervalles où il y a une seule racine, cette fois-ci en découpant en deux et en choisissant l'intervalle où  $f$  change de signe.

## Partie II – La méthode de J-L. Lagrange

**Question II.1.a** Remarquons que  $x$  dans  $\mathbf{R}_+^*$  est racine de  $P$  si et seulement s'il est un zéro de  $f(x) = x^{-n}P(x) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n}$ . Or cette fonction est strictement croissante, admet  $-\infty$  comme limite à droite en 0 et 1 comme limite en  $+\infty$  et ceci assure l'existence et l'unicité de la racine strictement positive  $\rho$  de  $P$ .

**Question II.1.b** Comme  $P$  tend vers l'infini en  $+\infty$ , pour  $x$  dans  $\mathbf{R}_+^*$ , on a  $P(x) \geq 0$  si et seulement si  $x \geq \rho$ . Or

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k (1 + \sup_{0 \leq j < \deg P} |a_j|)^k \right| &= \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| (1 + \sup_{0 \leq j < \deg P} |a_j|)^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{0 \leq j < \deg P} |a_j| (1 + \sup_{0 \leq j < \deg P} |a_j|)^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left( (1 + \sup_{0 \leq j < \deg P} |a_j|)^{k+1} - (1 + \sup_{0 \leq j < \deg P} |a_j|)^k \right) \\ &\leq (1 + \sup_{0 \leq j < \deg P} |a_j|)^n - 1 \\ &< (1 + \sup_{0 \leq j < \deg P} |a_j|)^n. \end{aligned}$$

Par conséquent  $P$  prend une valeur positive en le réel positif  $1 + \sup_{0 \leq k < \deg P} |a_k|$ . Il en résulte que  $\rho$  est inférieur à  $1 + \sup_{0 \leq k < \deg P} |a_k|$ .

De même

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k \max \left( 1, \sum_{0 \leq k < \deg P} |a_k| \right)^k \right| &= \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \max \left( 1, \sum_{0 \leq k < \deg P} |a_k| \right)^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \max \left( 1, \sum_{0 \leq k < \deg P} |a_k| \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\leq \max \left( 1, \sum_{0 \leq k < \deg P} |a_k| \right)^n$$

et donc  $P \left( \max \left( 1, \sum_{0 \leq k < \deg P} |a_k| \right) \right)$  est strictement positif, i.e.  $\rho$  est inférieur au maximum de 1 et  $\sum_{0 \leq k < \deg P} |a_k|$ .

**Question II.1.c** S Grâce à l'inégalité triangulaire et au signe des coefficients de  $P$ , on a pour tout complexe  $z$

$$|P(z)| \geq P(|z|) .$$

Si  $z$  est une racine de  $P$ , on a  $P(z) = 0$  et donc  $P(|z|) \leq 0$ .

**Question II.1.d** Si  $z$  est une racine de  $P$ ,  $|z|$  est positif et  $P(|z|)$  est négatif. Par conséquent  $|z|$  est inférieur à  $\rho$  : toute racine de  $P$  est de module inférieur à  $\rho$ .

**Question II.2** On considère  $Q$  le polynôme donné par

$$Q(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| X^k .$$

Si  $z$  est une racine de  $P$ , on a

$$|z|^n = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |z|^k$$

et donc  $Q(|z|)$  est négatif. Par conséquent  $z$  est de module inférieur à la plus grande racine de  $Q$ . L'assertion provient donc des résultats de la question II.1.

**Question II.3.a** Les coefficients de  $Q$  sont des fonctions symétriques de ses racines, i.e. des  $(x_i - x_j)^2$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ . Montrons que ces coefficients sont aussi des fonctions symétriques des  $x_i$  pour  $i$  entre 1 et  $n$ . Si on permute les  $x_k$  par une permutation  $\sigma$ , les  $(x_k - x_l)^2$  sont transformés en les  $(x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(l)})^2$ . Si  $\sigma(k) < \sigma(l)$  on a bien affaire à un  $(x_i - x_j)^2$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ . Sinon ce terme est aussi égal à  $(x_{\sigma(l)} - x_{\sigma(k)})^2$  qui est de la forme requise.

De plus pour  $1 \leq k < l \leq n$  et  $1 \leq k' < l' \leq n$ , on a

$$(x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(l)})^2 = (x_{\sigma(k')} - x_{\sigma(l')})^2$$

si et seulement si

$$x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(l)} = x_{\sigma(k')} - x_{\sigma(l')} \quad \text{ou} \quad x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(l)} = x_{\sigma(l')} - x_{\sigma(k')}$$

soit

$$(\sigma(k), \sigma(l)) = (\sigma(k'), \sigma(l')) \quad \text{ou} \quad (\sigma(k), \sigma(l)) = (\sigma(l'), \sigma(k'))$$

c'est-à-dire

$$(k, l) = (k', l') \quad \text{ou} \quad (k, l) = (l', k') .$$

Comme on a supposé  $k < l$  et  $k' < l'$ , il en résulte que l'ensemble des  $(x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(l)})^2$  est bien formé de  $(x_i - x_j)^2$  tous distincts. Par cardinalité on a donc affaire à une bijection et donc, par symétrie en les  $(x_i - x_j)^2$ , les coefficients sont inchangés si on permute les  $x_i$ .

Il en résulte que les coefficients de  $Q$  sont des fractions rationnelles (à coefficients entiers) en les coefficients de  $P$  et sont donc, a fortiori, réels.

**Question II.3.b** Par hypothèse sur  $P$ ,  $Q$  n'a pas de racine nulle et donc les racines de  $R$  sont exactement les inverses des racines de  $Q$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux racines distinctes de  $P$ ,  $(x - y)^2$  est une racine de  $Q$  et  $(x - y)^{-2}$  est une racine de  $R$ . On a donc  $(x - y)^{-2} \leq \delta$  et donc  $|x - y| \geq \delta^{-1/2}$ .

**Question II.3.c** On commence par trouver un majorant  $M$  des modules des racines de  $P$  grâce à la question II.2. Ensuite on calcule  $Q$ ,  $R$  et un majorant  $\delta$  des racines de  $R$  et on choisit  $m$  tel que  $2M/m$  soit inférieur à  $\delta^{-1/2}$ . Dans ces conditions la subdivision de pas constant égal à  $2M/m$  sur l'intervalle  $[-M; M]$  réalise la partition désirée : chacun des intervalles entre deux points successifs de la subdivision contient au plus une racine de  $P$ .

### Partie III - La méthode de Householder

**Question III.1.a** Il est nécessaire que  $u$  et  $v$  soient de même norme puisqu'une symétrie est une isométrie. Réciproquement si  $u$  et  $v$  sont distincts, la symétrie par rapport à leur hyperplan médiateur répond à la question (puisque cet hyperplan contient 0). Sinon toute symétrie par rapport à un hyperplan contenant  $u = v$  convient.

**Question III.1.b** La symétrie par rapport au plan perpendiculaire à  $u_\theta$ , qui est de norme 1, envoie  $u$  sur le vecteur

$$v = u - 2\langle u, u_\theta \rangle u_\theta .$$

La dernière coordonnée de ce vecteur est

$$u_3 - 2(u_2 \cos \theta + u_3 \sin \theta) \sin \theta ,$$

soit  $(1 - 2 \sin^2 \theta)u_3 - 2u_2 \sin \theta \cos \theta$ . Par conséquent  $v$  appartient au plan  $(e_1, e_2)$  si et seulement si

$$\cos(2\theta)u_3 = \sin(2\theta)u_2 .$$

**Question III.1.c** Si  $u$  appartient à  $P$ , toute symétrie par rapport à un hyperplan contenant  $P$  convient.

Sinon soit  $F$  l'espace de dimension 3 contenant  $P$  et  $u$ . On applique le résultat précédent en prenant comme base de  $E$  une base telle que  $v$  à soit proportionnel à  $e_1$ . Il existe donc  $w$  dans  $F$ , unitaire, orthogonal à  $v$  et tel que

$$u - 2\langle u, w \rangle w$$

appartienne à  $P$ . Il en résulte que la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à  $w$  laisse fixe  $v$  et envoie  $u$  dans  $P$ .

**Question III.2.a** Pour que  $\sigma \circ \phi$  admette  $e_1$  comme vecteur propre il faut et il suffit que  $\sigma$  envoie  $\phi(e_1)$  sur un multiple de  $e_1$ .

Soit  $\lambda$  un réel, il existe une symétrie envoyant  $\phi(e_1)$  sur  $\lambda e_1$  si et seulement si  $|\lambda| = \|\phi(e_1)\|$ . Par conséquent si  $e_1$  n'est pas valeur propre de  $\phi$  il y a deux choix possibles pour  $\lambda$  et chacun

de ces choix fournit une unique symétrie. Ces deux symétries sont distinctes puisque les images de  $\phi(e_1)$  sont distinctes pour ces deux symétries. Il y a donc deux symétries hyperplanes  $\sigma$  telles que  $e_1$  soit vecteur propre de  $\sigma \circ \phi$  dans ce cas.

Sinon toute symétrie par rapport à un hyperplan contenant la droite engendrée par  $e_1$  convient. Il y a donc une infinité de symétries hyperplanes ayant la propriété requise.

**Question III.2.b Il y a une faute (impardonnable) d'énoncé : la matrice triangulaire n'est évidemment pas à coefficients positifs mais à diagonale positive ...**

Montrons par récurrence sur la dimension de  $E$  la propriété (H) : tout endomorphisme de  $E$  peut s'écrire  $ut$  avec  $u$  un endomorphisme orthogonal de  $E$  et  $t$  ayant une matrice triangulaire supérieure à diagonale positive dans la base canonique de  $E$ .

Remarquons d'abord que la question III.1.a ne nécessite pas que  $n$  soit plus grand que 3. Par conséquent le résultat de III.2.a est valide en toute généralité. On effectuera donc la récurrence sur  $n$  à partir de 1. Dans ce cas un endomorphisme de  $E$  est un réel  $x$  et on peut l'écrire  $\pm|x|$ . Or  $\pm 1$  est un endomorphisme orthogonal de  $E$  et  $|x|$  a bien une matrice triangulaire (en fait diagonale) dans la base canonique et son unique coefficient est bien positif (ou nul). On constate qu'il n'y a unicité que si  $x$  est non nul.

Si maintenant  $E$  est de dimension supérieure à 2, notons  $F$  l'orthogonal de la droite engendrée par  $e_1$  et  $p$  la projection sur  $F$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $\sigma$  une symétrie hyperplane telle que  $\sigma f$  ait  $e_1$  comme vecteur propre. Soit  $p(\sigma f)|_F$  l'endomorphisme de  $F$  associé à  $\sigma f$ .

Si la propriété (H) est vraie pour  $F$ , on a donc  $p\sigma f|_F = ut$  pour  $u$  et  $t$  vérifiant les bonnes propriétés. Soit  $U$  l'endomorphisme orthogonal de  $E$  défini comme  $u$  sur  $F$  et  $\pm Id$  sur la droite engendrée par  $e_1$ , selon que la valeur propre associée à  $e_1$  pour  $\sigma f$  est positive ou non. Par conséquent  $U^{-1}\sigma f$  envoie  $e_1$  sur un multiple positif de lui-même et a donc une matrice triangulaire dans la base canonique dont la diagonale est composée de coefficients positifs. Comme  $U^{-1}\sigma$  est un endomorphisme orthogonal de  $E$ , tout comme son inverse, il en résulte que la propriété (H) est héréditaire.

L'assertion en résulte.

On a déjà vu que l'unicité est en défaut si la matrice est singulière. C'est en fait général. Pour avoir un exemple en dimension quelconque la matrice nulle fait parfaitement l'affaire :  $u$  est quelconque et  $t$  est nulle.

Réciproquement si une matrice  $A$  inversible s'écrit  $ut = u't'$  avec  $(u, t)$  et  $(u', t')$  ayant les bonnes propriétés,  $u^{-1}u' = tt'^{-1}$  est à la fois orthogonale et triangulaire à coefficients positifs sur la diagonale; c'est donc l'identité et  $(u, t) = (u', t')$ . Il y a donc unicité dès que  $A$  est inversible à condition de demander à  $t$  d'être triangulaire supérieure.

Enfin l'écriture  $A = ut$  ne donne pas d'algorithme de calcul des valeurs propres puisque ni  $u$ , ni  $t$  ne sont semblables à  $A$ .

**Question III.3.a** Puisque  $\sigma$  est à la fois orthogonale et involutive, on a  $\sigma = \sigma^{-1} = {}^t\sigma$ .

Soit maintenant  $\sigma$  une symétrie envoyant  $\phi(e_1)$  dans le plan engendré par  $(e_1, e_2)$  et fixant  $e_1$ . Une telle symétrie existe d'après III.1.c. On a donc

$$\sigma\psi\sigma(e_1) = \sigma(\psi(e_1))$$

et ce dernier vecteur appartient au plan engendré par  $e_1$  et  $e_2$ .

L'assertion en résulte.

Si l'on demande à  $\sigma$  de fixer  $e_1$  et si ce vecteur n'est pas vecteur propre de  $\psi$ , la question III.1.b montre qu'il y a deux choix possibles. Sinon il y a une infinité de choix possibles a priori.

**Question III.3.b** On démontre par récurrence sur l'entier  $k$  strictement inférieur à  $n - 1$  la propriété (H) : tout endomorphisme symétrique de  $E$  est orthogonalement semblable à un endomorphisme envoyant  $e_i$  dans l'espace engendré par  $(e_{i-1}, e_i, e_{i+1})$  pour  $i$  compris entre 1 et  $k$ . Pour  $i = 1$  on convient  $e_0 = 0$ .

Pour  $k = 1$  cela résulte de la question III.1.c. Soit maintenant  $k$  strictement supérieur à 1,  $E_k$  l'espace engendré par  $(e_1, \dots, e_{k-1})$  et  $F_k$  son supplémentaire orthogonal. Comme on a supposé  $k$  strictement inférieur à  $n - 1$ ,  $F_k$  est de dimension au moins 3. En supposant la propriété vraie au rang  $k - 1$ , on se donne  $\rho$  unitaire tel que  ${}^t\rho\psi\rho$  envoie  $e_i$  dans l'espace engendré par  $(e_{i-1}, e_i, e_{i+1})$  (qui n'est rien d'autre que  $E_{i+2} \cap F_{i-1}$ ). En particulier, pour  $i \leq k - 2$ , on a

$$\langle {}^t\rho\psi\rho(e_i), e_k \rangle .$$

Comme  ${}^t\rho\psi\rho$  est un endomorphisme symétrique cela entraîne

$$\langle {}^t\rho\psi\rho(e_k), e_i \rangle$$

et donc  ${}^t\rho\psi\rho(e_k)$  appartient à  $F_{k-1}$ . Écrivons

$${}^t\rho\psi\rho(e_k) = \alpha e_{k-1} + u$$

avec  $u$  dans  $F_k$  et  $\alpha$  réel. D'après la question III.1.c on peut trouver une symétrie hyperplane de  $F_k$  fixant  $e_k$  et envoyant  $u$  dans l'espace engendré par  $(e_k, e_{k+1})$ , c'est-à-dire un vecteur unitaire  $v$  de  $F_k$  orthogonal à  $e_k$  tel que

$$u - 2\langle u, v \rangle v \in F_k \cap E_{k+2} .$$

Puisque  $v$  appartient à  $F_k$  et est orthogonal à  $e_k$ , c'est qu'il appartient en fait à  $F_{k+1}$ . La symétrie  $\sigma_k$  de  $E$  par rapport à l'hyperplan orthogonal à  $v$  fixe donc  $E_{k+1}$  et ainsi envoie  ${}^t\rho\psi\rho(e_k)$  sur

$$\sigma_k(\alpha e_{k-1} + u) = \alpha e_{k-1} + \sigma_k(u) ,$$

ce qui est un élément de l'espace engendré par  $(e_{k-1}, e_k, e_{k+1})$ . Comme  $\sigma_k$  fixe  $e_k$ , on a même

$${}^t\sigma_k {}^t\rho\psi\rho\sigma_k(e_k) = \sigma_k {}^t\rho\psi\rho(e_k) .$$

De plus, comme  $v$  appartient à  $F_{k+1}$ ,  $\sigma_k$  fixe  $E_{k+1}$  donc pour  $i$  strictement inférieur à  $k$ , on a  $e_i \in E_k$  et

$${}^t\sigma_k {}^t\rho\psi\rho\sigma_k(e_i) = \sigma_k {}^t\rho\psi\rho(e_i) .$$

Comme  ${}^t\rho\psi\rho(e_i)$  appartient à  $E_{i+2}$ , il appartient à  $E_{k+1}$  et est donc fixé par  $\sigma_k$ . Il en résulte que  ${}^t\sigma_k {}^t\rho\psi\rho\sigma_k$  est orthogonalement semblable à  $\psi$  et envoie tout  $e_i$ , pour  $i$  inférieur ou égal à  $k$ , dans l'espace engendré par  $(e_{i-1}, e_i, e_{i+1})$ .

Par le principe de récurrence la propriété est donc vraie pour  $k = n - 2$ . Il en résulte que la matrice de l'endomorphisme  $u$  dans une base orthogonale bien choisie a tous ses coefficients en-dessous de la sous-diagonale nuls. Comme cette matrice est évidemment symétrique, elle est tridiagonale. Ce qui est l'assertion recherchée.

**Question III.3.c** Avec la méthode précédente on a à chaque fois deux choix pour la symétrie  $\sigma_k$ . Comme  $\sigma_k$  fixe  $e_k$ , si on écrit

$${}^t\rho\psi\rho(e_k) = \alpha e_{k-1} + \beta e_k + u'$$

avec  $u'$  dans  $F_{k+1}$ , on a

$$\sigma_k(\beta e_k + u') = \beta e_k + \sigma_k(u')$$

et, comme  $u'$  est perpendiculaire à  $e_k$ ,  $\sigma_k$  préserve l'orthogonalité et envoie  $\beta e_k + u'$  dans l'espace engendré par  $(e_k, e_{k+1})$ , on a

$$\sigma_k(\beta e_k + u') = \beta e_k \pm \|u'\| e_{k+1} .$$

Pour que les erreurs d'arrondis ne soient pas trop importantes on a donc intérêt à ce que, à chaque étape,  $\|u'\|$  ne soit pas trop petit. On fait donc le choix de sorte  ${}^t\sigma_k{}^t\rho\psi\rho\sigma_k(e_{k+1})$  ait une projection sur  $F_{k+2}$  de norme la plus grande possible.

Comme on a obtenu un endomorphisme semblable à  $\psi$ , il a les mêmes valeurs propres que  $\psi$  et on est donc ramené à savoir calculer les valeurs propres d'un endomorphisme tridiagonal.

**Question III.3.d** Si l'on cherche, avec cette méthode, à diagonaliser  $\psi$ , on est conduit à prendre  $\sigma$  envoyant  $\psi(e_1)$  dans la droite engendrée par  $e_1$  mais alors  $\sigma\psi\sigma$  ne fixe pas cette droite (sauf si  $e_1$  était déjà vecteur propre) ou bien à chercher  $\sigma$  tel que  $e_1$  soit vecteur propre de  $\sigma\psi\sigma$ . Il revient au même de trouver un vecteur propre de  $\psi$  (qui sera  $\sigma(e_1)$ ) or ceci est impossible puisque l'on n'a pas encore déterminé les valeurs propres de  $\psi$ . En conclusion la forme tridiagonale est la meilleure que l'on puisse espérer avec cette méthode.

**Question III.4.a** Pour  $i = 1$  on a

$$P_{i+1} = P_2 = \begin{vmatrix} a_1 - X & b_1 \\ b_1 & a_2 - X \end{vmatrix} = (a_2 - X)(a_1 - X) - b_1^2 ,$$

ce qui est bien la formule voulue.

Pour  $i$  supérieur à 2, on a

$$P_{i+1} = \begin{vmatrix} a_1 - X & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 - X & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_i \\ 0 & \dots & \dots & b_i & a_{i+1} - X \end{vmatrix}$$

et donc, en développant par rapport à la dernière ligne

$$P_{i+1} = (a_{i+1} - X)P_i - b_i \begin{vmatrix} a_1 - X & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 - X & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{i-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & b_{i-2} & a_{i-1} - X & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{i-1} & b_i \end{vmatrix}$$

et donc, en développant ce dernier déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$P_{i+1} = (a_{i+1} - X)P_i - b_i^2 P_{i-1} .$$

**Question III.4.b** Si  $x$  est une racine de  $P_i$ , on a

$$P_{i+1}(x)P_{i-1}(x) = -b_i^2 P_{i-1}(x)$$

et il s'agit donc de démontrer, en fait, que  $P_i$  et  $P_{i-1}$  n'ont pas de racines communes. Mais la formule de récurrence donnant les  $P_k$  montre qu'une racine commune à  $P_i$  et  $P_{i-1}$  est également une racine commune à  $P_{i-1}$  et  $P_{i-2}$  (si  $i$  est plus grand que 2) et donc, finalement, une racine commune à  $P_1$  et  $P_0$ . Comme  $P_0$  ne s'annule pas, une telle racine n'existe pas et on a bien

$$P_i(x) = 0 \Rightarrow P_{i+1}(x)P_{i-1}(x) < 0 .$$

**Question III.4.c** Pour  $i = 0$ ,  $P_0$  est constant égal à 1 et ses limites en  $+$  et  $-$  l'infini sont égales à 1. Si  $i$  est strictement positif, le terme dominant de  $P_i$  est  $(-X)^i$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P_i(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P_i(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } i \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

**Question III.4.d** Montrons par récurrence sur l'entier  $i$  compris entre 1 et  $n$  la propriété (H) suivante :  $P_i$  est scindé à racines simples et, si  $i$  est supérieur à 2, les racines de  $P_{i-1}$  sont intercalées entre celles de  $P_i$ .

Pour  $i = 1$ ,  $P_1 = a_1 - X$  et (H) est vraie.

Soit  $i$  supérieur à 1. Supposons (H) vraie pour tout  $j$  inférieur à  $i$  et montrons qu'elle est vraie pour  $i + 1$ . Puisque  $P_{i-1}$  est à racines simples, il change de signe en chacune de ses racines. D'après III.4.c,  $P_{i-1}$  est donc positif avant  $\lambda_{i-1,1}$ , négatif entre  $\lambda_{i-1,1}$  et  $\lambda_{i-1,2}$  etc. De par la propriété des racines de  $P_i$ , on en déduit que  $P_{i-1}$  prend des signes alternés en les racines de  $P_i$ . Comme  $P_{i+1}$  et  $P_{i-1}$  sont de signes opposés en ces mêmes racines, c'est que  $P_{i+1}$  prend des signes alternés entre les racines de  $P_i$ .

Par le théorème des valeurs intermédiaires on en déduit que  $P_{i+1}$  admet une racine entre chacune des racines de  $P_i$ , ce qui lui en fait au moins  $i - 1$ . Or  $P_{i-1}$  est positif avant  $\lambda_{i-1,1}$ , donc en  $\lambda_{i,1}$  et  $P_{i+1}$  y est négatif. D'après III.4.c cela impose à  $P_{i+1}$  d'avoir une racine avant  $\lambda_{i,1}$ .

De même  $P_{i+1}$  est du signe de  $(-1)^{i-1}$  après  $\lambda_{i-1,i-1}$  donc en  $\lambda_{i,i}$ . Aussi  $P_{i+1}$  y est-il du signe de  $(-1)^i$ . Par III.4.c cela impose à  $P_{i+1}$  d'avoir une racine après  $\lambda_{i,i}$ . La propriété (H) est donc vérifiée pour  $i + 1$  et le principe de récurrence entraîne sa validité pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ .

**Question III.4.e** Les valeurs propres de  $S$  sont les racines de  $P_n$ . Soit  $V$  l'ensemble de ces racines et  $W$  l'ensemble des racines de tous les polynômes  $P_i$  pour  $i$  entre 0 et  $n$ .

Si  $x$  n'appartient pas à  $W$ , par continuité des  $P_i$ , il existe un intervalle contenant  $x$  sur lequel aucun d'eux ne s'annule et donc  $\omega$  est constante sur cet intervalle. Par conséquent  $\omega$  est constante sur tout intervalle ne rencontrant pas  $W$ .

Si maintenant  $x$  appartient à  $W$  mais pas à  $V$ . Par continuité des  $P_i$  et le fait qu'ils sont à racines simples, il existe un intervalle contenant  $x$  sur lequel, pour tout  $i$  entre 0 et  $n$ , soit  $P_i$



ne s'annule pas, soit  $P_i$  admet un unique 0 (i.e.  $x$ ) et  $y$  change de signe. D'après III.4.b la suite des  $P_i(x)$  ne s'annule pas deux fois consécutivement et là où elle s'annule ses valeurs de par et d'autre sont de signes opposés. Comme  $x$  n'appartient pas à  $V$  et comme  $P_0$  ne s'annule pas, il y a bien des éléments non nuls de la suite  $P_i(x)$  de par et d'autre de tout éventuel 0 de cette suite. Autrement dit tout 0 dans la suite  $P_i(x)$  correspond à un changement de signe (mais la réciproque n'est pas vraie).

Or si  $P_i(x)$  est nul,  $P_{i+1}$  et  $P_{i-1}$  sont non nuls en  $x$  et, par construction, ils ne s'annulent pas sur l'intervalle considéré. Comme ils sont de signes opposés sur cet intervalle quelque soit  $t$  dans cet intervalle et quelque soit le signe de  $P_i(t)$ , la suite  $P_{i-1}(t), P_i(t), P_{i+1}(t)$  admet un et un seul changement de signe. Autrement dit le fait que  $P_i$  s'annule ne modifie pas le nombre de changements de signes.

Par conséquent  $\omega$  est constante sur tout intervalle ne rencontrant pas  $V$ , i.e. sur tout intervalle ne contenant aucune valeur propre de  $S$ .

**Question III.4.f** Puisque  $\omega$  est constante sur tout intervalle ne rencontrant pas de valeur propre de  $S$ , elle y est continue et donc si  $x$  n'est pas une valeur propre de  $S$

$$\lim_{x \rightarrow y, x > y} \omega(x) - \lim_{x \rightarrow y, x < y} \omega(x) = 0 .$$

Si maintenant  $x$  est valeur propre de  $S$ , le raisonnement de la question précédente montre encore que le fait que  $P_i$  s'annule en  $x$ , pour  $i < n$ , ne modifie pas le nombre de changements de signes dans la suite  $P_i(x)$ . Si par contre  $P_n(x)$  s'annule, comme  $P_{n-1}$  est de signe constant au voisinage de  $x$ , le fait que  $P_n$  change de signe en  $x$  montre que le nombre de changements de signes est différent au voisinage de  $x$  selon que l'on est avant  $x$  ou après. Pour montrer qu'il s'accroît il faut donc montrer que  $P_n$  est du signe de  $P_{n-1}$  avant  $x$  et du signe opposé après. Or  $P_{n-1}$  prend des signes alternés en les racines de  $P_n$  et est positif en  $\lambda_{n,1}$ , il est donc du signe de  $(-1)^{j-1}$  au voisinage de  $\lambda_{n,j}$ . Comme  $P_n$  change de signe en chacune de ses racines en commençant par être positif en  $-\infty$ , il est du signe de  $(-1)^{j-1}$  à gauche de  $\lambda_{n,j}$  et du signe de  $(-1)^j$  à droite de cette même racine. L'assertion en résulte.

Par conséquent pour isoler les valeurs propres de  $S$ , on commence par majorer leur valeur absolue par un réel  $M$  (soit par la méthode du II.1, soit en faisant des majorations directes grâce aux coefficients de  $S$ ). Ensuite on effectue une dichotomie sur l'intervalle  $[-M; M]$  jusqu'à trouver des points où  $\omega$  augmente d'au plus 1 entre chaque point de la subdivision.

**Question III.4.g** Si certains  $b_i$  sont nuls, la matrice  $S$  est diagonale par blocs. On peut donc se restreindre aux calculs des polynômes caractéristiques des blocs, sur lesquels la méthode précédente s'applique.

#### Partie IV – Les formules de Gerolamo Cardano et Ludovico Ferrari

**Question IV.1.a** On a

$$\lambda(X + u)^3 + \mu(X + v)^3 = (\lambda + \mu)X^3 + 3(\lambda u + \mu v)X^2 + 3(\lambda u^2 + \mu v^2)X + (\lambda u^3 + \mu v^3)$$

et l'assertion en résulte par identification :  $P$  s'écrit  $\lambda(X + u)^3 + \mu(X + v)^3$  si et seulement si

$$(1, a, b, c) = \lambda(1, u, u^2, u^3) + \mu(1, v, v^2, v^3) .$$

**Question IV.1.b** L'espace des suites qui sont combinaison linéaire des suites  $(U^n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(V^n)_{n \in \mathbf{N}}$  est formé des suites linéaires récurrentes dont le polynôme caractéristique admet  $U$  et  $V$  comme racines (simples), c'est-à-dire dont le polynôme caractéristique est  $(X - U)(X - V)$  ou encore  $X^2 - (U + V)X + UV$ . Ce sont donc les suites qui vérifient la relation de récurrence

$$x_{n+2} - (U + V)x_{n+1} + UVx_n = 0$$

pour tout entier  $n$ . L'assertion en résulte.

**Question IV.1.c** Dans ce cas on a

$$P(X) = (X + a)^3 + (c - a^3)$$

et donc, si  $z$  est un complexe quelconque dont le cube est  $a^3 - c$  et si  $j$  est une racine cubique non triviale de l'unité, les racines de  $P$  sont  $z - a$ ,  $jz - a$  et  $j^2z - a$  étant entendu que si  $z$  est nul (i.e. si  $c = a^3$ ) cela signifie que  $-a$  est racine triple de l'équation  $P(X) = 0$ .

**Question IV.1.d** Cherchons tout d'abord  $u$  et  $v$  tels que

$$b - (u + v)a + uv = 0 \quad \text{et} \quad c - (u + v)b + uva = 0$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u + v \\ uv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

i.e. (puisque  $b$  est distinct de  $a^2$ )

$$u + v = \frac{c - ab}{b - a^2} \quad \text{et} \quad uv = \frac{ac - b^2}{b - a^2}.$$

On obtient donc  $u$  et  $v$  en résolvant l'équation du second degré

$$(b - a^2)U^2 + (ab - c)U + ac - b^2 = 0.$$

Supposons que cette équation a deux racines distinctes  $u$  et  $v$ , i.e.

$$(ab - c)^2 - 4(b - a^2)(ac - b^2) \neq 0.$$

Dans ce cas le système

$$1 = \lambda + \mu \quad a = \lambda u + \mu v$$

est de Cramer et on peut donc écrire  $\lambda = (v - a)/(v - u)$  et  $\mu = (a - u)/(v - u)$ . D'après IV.1.a, les solutions de  $P(X) = 0$  sont les

$$x = -\frac{u\sqrt[3]{v-a} + v\sqrt[3]{a-u}}{\sqrt[3]{v-a} + \sqrt[3]{a-u}}$$

où on choisit les mêmes déterminations des racines cubiques (il y en a *a priori* trois possibles à chaque fois) pour les termes du numérateur et pour ceux du dénominateur.

(Remarque : on vérifie aisément que cela ne dépend pas du choix de quelle racine se nomme  $u$  et laquelle est  $v$  et qu'il n'y a bien que 3 racines obtenues par exemple en fixant une racine cubique de  $v - a$  et faisant varier les racines cubiques de  $a - u$ .)

Pour conclure il faut savoir si cette équation a effectivement deux racines distinctes. Pour cela il faut savoir ce que nous donne la condition de racines simples. On a

$$P'(X) = 3X^2 + 6aX + 3b = 3(X^2 + 2aX + b)$$

et un pgcd de  $P$  et  $P'$  est donc un pgcd de  $P$  et  $X^2 + 2aX + b$ . Comme

$$X^3 + 3aX^2 + 3bX + c = (X + a)(X^2 + 2aX + b) + 2(b - a^2)X + c - ab$$

un pgcd de  $P$  et  $P'$  est un pgcd de  $X^2 + 2aX + b$  avec  $2(b - a^2)X + c - ab$ . La condition de racines simples est donc exactement le fait que  $(ab - c)/2(b - a^2)$  n'est pas racine de  $X^2 + 2aX + b$ , i.e.

$$(ab - c)^2 + 4a(ab - c)(b - a^2) + 4b(b - a^2)^2 \neq 0$$

soit encore

$$(ab - c)^2 + 4(b - a^2)(a(ab - c) + b(b - a^2)) \neq 0$$

i.e.

$$(ab - c)^2 - 4(b - a^2)(ac - b^2) \neq 0.$$

ce qui est la condition que l'on voulait !

**Question IV.1.e** Si  $b \neq a^2$  mais  $(ab - c)^2 - 4(b - a^2)(ac - b^2) = 0$ , l'équation de départ admet  $(ab - c)/2(b - a^2)$  comme racine double puisqu'un pgcd de  $P$  et  $P'$  est  $2(b - a^2)X + c - ab$ . D'après les relations entre coefficients et racines, la somme des trois racines de  $P(X) = 0$  est  $-3a$  et donc les racines sont  $(ab - c)/2(b - a^2)$  avec la multiplicité 2 et  $(3a^3 - 4ab + c)/(b - a^2)$  (si cette dernière racine est égale à  $(ab - c)/2(b - a^2)$ , c'est qu'on a affaire à une racine de multiplicité 3).

**Question IV.1.f** On a  $a = 0$ ,  $b = 2/3$  et  $c = -1$ . On n'est donc pas dans le cas  $b = a^2$ . Le discriminant  $(ab - c)^2 - 4(b - a^2)(ac - b^2)$  vaut  $1 + 32/27$  et on est donc dans le cas où les racines de  $P$  sont simples. On trouve  $u$  et  $v$  en résolvant

$$\frac{2}{3}U^2 + U - \frac{4}{9} = 0$$

ou encore

$$6U^2 + 9U - 4 = 0.$$

Les racines de cette équation sont  $u = -(9 + \sqrt{177})/12$  et  $v = (-9 + \sqrt{177})/12$ . On a donc

$$x = \frac{(9 + \sqrt{177})\sqrt[3]{-9 + \sqrt{177}} + (9 - \sqrt{177})\sqrt[3]{9 + \sqrt{177}}}{12(\sqrt[3]{-9 + \sqrt{177}} + \sqrt[3]{9 + \sqrt{177}})} \simeq 0.45339765$$

ou

$$x = \frac{(9 + \sqrt{177})\sqrt[3]{-9 + \sqrt{177}} + j(9 - \sqrt{177})\sqrt[3]{9 + \sqrt{177}}}{12(\sqrt[3]{-9 + \sqrt{177}} + j\sqrt[3]{9 + \sqrt{177}})}$$

ou

$$x = \frac{(9 + \sqrt{177})\sqrt[3]{-9 + \sqrt{177}} + j^2(9 - \sqrt{177})\sqrt[3]{9 + \sqrt{177}}}{12(\sqrt[3]{-9 + \sqrt{177}} + j^2\sqrt[3]{9 + \sqrt{177}})}.$$

**Question IV.2.a** Soit  $C_1$  la conique d'équation  $Y^2 + aX^2 + bX + c = 0$ . Les points d'intersection de  $C_0$  et  $C_1$  sont les points  $(x, y)$  tels que  $P(x) = 0$  et  $y = x^2$  et l'assertion en découle.

**Question IV.2.b** On a

$$P_t(X) = (t(a + 1) - 1)X^2 + tY^2 + bX + (1 - t)Y + tc$$

et ce polynôme est de degré 2 en  $(X, Y)$  sauf si  $t = t(a + 1) - 1 = 0$ , ce qui est impossible. Par conséquent  $C_t$  est une conique. De plus si, pour deux réels  $x$  et  $y$ ,  $P_0(x, y) = P_1(x, y) = 0$ , alors  $P_t(x, y) = 0$ . Réciproquement si  $t$  est non nul et si  $x$  et  $y$  sont deux réels tels que  $P_0(x, y) = P_t(x, y) = 0$ , alors  $tP_1(x, y) = 0$  et donc  $P_1(x, y) = 0$ . On a donc, pour  $x$  et  $y$  deux réels

$$P_0(x, y) = P_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow P_0(x, y) = P_t(x, y) = 0$$

ce qui se traduit au niveau des coniques par

$$C_1 \cap C_0 = C_t \cap C_0 .$$

**Question IV.2.c** La conique de l'énoncé, notée  $C$ , est l'intersection du cône  $\Gamma$  de  $\mathbf{R}^3$  défini par

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

et du plan affine  $\Pi$  défini par

$$z = 1 .$$

Dans cette interprétation le plan  $\mathbf{R}^2$  initial est identifié à  $\Pi$ .

$\Gamma$  est le cône isotrope de la forme quadratique  $Q$  associée à la forme bilinéaire symétrique donnée par la matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ . Maintenant si  $C$  contient une droite  $\Delta$ , c'est une droite du plan  $\Pi$  et l'ensemble des vecteurs de  $\mathbf{R}^3$  colinéaires à un vecteur de  $\Delta$  est le plan vectoriel  $P$  contenant  $\Delta$ . En particulier pour tout couple  $(X, Y)$  de vecteurs du plan  $P$  on a

$${}^tXAY = 0$$

et  $A$  envoie le plan  $P$  dans la droite  $P^\perp$ . Ceci impose  $\det(A) = 0$ .

Réciproquement supposons  $\det(A) = 0$ . Comme  $A$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale pour le produit scalaire euclidien canonique de  $\mathbf{R}^3$ . Dans cette base  $A$  est diagonale et on a

$$Q(X) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 \quad \text{si } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

De plus l'une des valeurs propres est nulle, disons  $\gamma$  et le plan  $\Pi$  admet dans ce nouveau repère orthonormé une équation de la forme

$$ax + by + cz = 1 \quad \text{avec } a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

puisque la distance de  $O$  à  $\Pi$  est 1.

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de même signe, alors le cône isotrope  $\Gamma$  est donné par  $x = y = 0$  et la conique a pour équation  $cz = 1$ . Ce qui est impossible.

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de signes opposés ou si l'un d'eux est nul, disons  $\alpha = u^2$  et  $\beta = -v^2$ , alors  $\Gamma$  est la réunion des deux plans donnés par  $ux \pm vy = 0$  et  $C$  est donc formé de l'intersection de ces deux plans avec  $\Pi$ , chacune étant soit une droite, soit un plan, soit un ensemble vide. Puisque  $C$  est une conique, elle n'est pas vide, et donc  $C$  contient une droite : c'est une conique dégénérée.

**Question IV.2.d** Soit  $A_0, A_1$  et  $A_t$  les matrices symétriques associées aux coniques  $C_0, C_1$  et  $C_t$ . On a  $A_t = (1-t)A_0 + tA_1$  et donc  $C_t$  est dégénérée si et seulement si  $\det(A_0 + t(A_1 - A_0))$  est nul. Si  $A_1 - A_0$  n'est pas inversible, la conique  $\Gamma$  qu'elle définit est dégénérée et on a évidemment  $\Gamma \cap C_0 = C_1 \cap C_0$ . Si  $A_1 - A_0$  est inversible la condition exprime que  $t$  est valeur propre de  $A_0(A_1 - A_0)^{-1}$ , ce qui est bien donné par une équation de degré 3. Ainsi en résolvant une équation de degré au plus 3 on a trouvé une conique dégénérée  $\Gamma$  telle que  $\Gamma \cap C_0 = C_1 \cap C_0$ .

**Question IV.2.e** Si  $\Gamma$  est formée de deux droites parallèles ou confondues elle admet une infinité de centres de symétries (ce sont tous les points de la bissectrice des deux droites dans le cas de droites parallèles et tous les points de  $\Gamma$  sinon). Si, au contraire,  $\Gamma$  est formée de deux droites sécantes en  $O$ , ce dernier est son unique centre de symétrie.

Soit  $Q(x, y) = 0$  un équation de la conique dégénérée  $\Gamma$ . Par conséquent le système

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

est un système de Cramer si et seulement si la conique est formée de deux droites sécantes.

(En effet si  $O = (x_0, y_0)$  est un centre de symétrie de  $\Gamma$  alors on a l'équivalence  $Q(x_0 + x, y_0 + y) = 0$  si et seulement si  $Q(x_0 - x, y_0 - y) = 0$ . Autrement dit  $Q(x_0 + X, y_0 + Y)$  est un polynôme pair. Or, d'après la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} Q(x_0 + X, y_0 + Y) &= Q(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)X + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)Y \\ &\quad + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x_0, y_0)X^2 + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial xy}(x_0, y_0)XY + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x_0, y_0)Y^2 \end{aligned}$$

et donc  $Q(x_0 + X, y_0 + Y)$  est pair si et seulement si ses termes de degré 1 sont nuls.)

**Question IV.2.f** On trouve le centre de  $\Gamma$  en résolvant le système linéaire évoqué dans la question précédente. Dans ce cas le centre  $O$  de  $\Gamma$  lui appartient et celle-ci est définie dans un repère centré en  $O$  par une équation paire sans terme constant, i.e. de la forme

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = 0,$$

avec  $a, b$  et  $c$  réels non tous nuls. Si  $a = 0$ , l'équation s'écrit  $Y(2bX + cY)$  et on a trouvé les deux droites. Sinon  $Y = 0$  n'est pas solution de cette équation et on peut chercher si la droite  $X = tY$  est solution de cette équation en résolvant l'équation de degré 2 en  $t$

$$at^2 + 2bt + c = 0.$$

Ainsi en résolvant un système linéaire et au plus une équation de degré 2 on trouve les équations des deux droites formant  $\Gamma$ .

**Question IV.2.g** Montrons d'abord que l'on peut déterminer les équations des droites formant  $\Gamma$  dans tous les cas. En effet si le système

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

n'est pas de Cramer, c'est que  $Q(X, Y)$  est de la forme  $\alpha(aX + bY + c)(aX + bY + c')$  pour un scalaire  $\alpha$  non nul et un couple  $(a, b)$  non nul. En effet  $aX + bY + c = 0$  et  $aX + bY + c'$  sont les équations des deux droites parallèles ou confondues formant  $\Gamma$ . Mais alors

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2a\alpha(aX + bY + c + c')$$

et

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2b\alpha(aX + bY + c + c').$$

Autrement dit la direction des droites formant  $\Gamma$  est donnée par le terme linéaire de  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ . On cherche alors  $c$  et  $c'$  en résolvant une équation de degré 2 :  $c + c'$  est donné par le système précédent tandis que  $cc'$  est donné par l'équation de la conique.

Une fois que l'on a l'équation d'une droite  $D$ , on peut la paramétrer par un point et un vecteur directeur :  $D$  est formé des points  $(x_0 + at, y_0 + bt)$  pour certains paramètres  $x_0, a$  et  $b$ . L'appartenance de ce point à  $\Gamma$  est une équation de degré 2 en  $t$ . Ainsi, au final, l'intersection entre  $\Gamma$  et  $C_0$  est obtenue en résolvant des équations de degré au plus deux.

**Question IV.2.h** On a, avec les notations de l'énoncé,  $P_1(X, Y) = Y^2 - X^2 - X + \frac{1}{4}$  et donc  $P_t(X, Y) = -X^2 + tY^2 - tX + (1-t)Y + t/4$  et donc  $C_t$  est dégénérée si et seulement si

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -t/2 \\ 0 & t & (1-t)/2 \\ -t/2 & (1-t)/2 & t/4 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant on trouve  $-t^2/4 + (1-t)^2/4 - t^3/4 = 0$ , soit  $t^3 + 2t - 1 = 0$ .

On peut donc choisir

$$t = \frac{(9 + \sqrt{177})\sqrt[3]{-9 + \sqrt{177}} + (9 - \sqrt{177})\sqrt[3]{9 + \sqrt{177}}}{12(\sqrt[3]{-9 + \sqrt{177}} + \sqrt[3]{9 + \sqrt{177}})}.$$

Le centre de la conique  $\Gamma$  est donné par

$$\begin{cases} -2x_0 - t = 0 \\ 2ty_0 + 1 - t = 0 \end{cases}$$

et donc le centre  $O$  de  $\Gamma$  est  $(-t/2, (t-1)/2t)$ . Dans le repère de centre  $O$  l'équation de la conique  $C_t$  est

$$-X^2 + tY^2 = 0$$

soit

$$X = \sqrt{t}Y \quad \text{ou} \quad X = -\sqrt{t}Y ,$$

soit, dans le repère initial,

$$X + \frac{t}{2} = \sqrt{t} \left( Y + \frac{1-t}{2t} \right) \quad \text{ou} \quad X + \frac{t}{2} = -\sqrt{t} \left( Y + \frac{1-t}{2t} \right) .$$

L'intersection de  $C_t$  avec la parabole s'écrit donc

$$tX^2 - \sqrt{t}X + \frac{1}{2}(1-t-t\sqrt{t}) = 0 \quad \text{ou} \quad tX^2 + \sqrt{t}X + \frac{1}{2}(1-t+t\sqrt{t}) = 0 .$$

Par conséquent les racines de  $P$  sont

$$\frac{1}{2} \left( \sqrt{t} + \sqrt{-t + 2t^2 + 2t^2\sqrt{t}} \right)$$

où les racines carrées s'entendent au signe près (mais fixé une fois pour toutes dans une expression, ce qui donne 4 valeurs possibles) et avec

$$t = \frac{(9 + \sqrt{177}) \sqrt[3]{-9 + \sqrt{177}} + (9 - \sqrt{177}) \sqrt[3]{9 + \sqrt{177}}}{12(\sqrt[3]{-9 + \sqrt{177}} + \sqrt[3]{9 + \sqrt{177}})} \simeq 0.45339765 .$$

On trouve approximativement

$$1.27667570 \quad 0.094506347 \quad -0.74255800 \pm 0.62295073i .$$