Problème de révision 1999

François Sauvageot

2 mars 2001

***

Partie I

I.1 La fonction $t \mapsto \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$ est de classe C^1 en 0 et on peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à (E'). Il existe un intervalle I ouvert contenant 0 et une fonction y de classe C^1 sur I vérifiant l'équation (E') sur tout I. Comme $y'(0) = 1$ et y' est continue au voisinage de 0, on peut supposer que I est suffisamment petit pour que y' ne s'annule pas sur I (ce qui est d'ailleurs équivalent à $|y(t)| < 1$ sur I) et, quitte à remplacer I par $I \cap -I$, centré en 0. Comme $t \mapsto \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$ est de classe C^1 sur $]-1;1[$, y est en fait de classe C^∞ sur I. En particulier y est bien une solution de (E) de classe C^2 sur I.

I.2 Rappelons que le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne aussi que toute autre solution de (E') coïncide avec y sur leur intervalle commun de définition.
Soit maintenant $\tilde{y}$ une solution de (E) définie sur l'intervalle I. Par continuité de $\tilde{y}'$, il existe un intervalle J inclus dans I tel que $\tilde{y}'$ soit strictement positive sur J et donc tel que $\tilde{y}$ soit une solution de (E') sur I. D'où $y = \tilde{y}$ sur J. Choisissons J maximal pour cette propriété de (stricte) positivité de $\tilde{y}'$. Supposons que J soit strictement inclus dans I, c'est-à-dire qu'au moins l'une de ses bornes appartient à I. Soit a une telle borne. Comme $\tilde{y}'$ continue sur I et a appartient à I, $\tilde{y}'(a)$ ne peut être strictement positif, sinon $\tilde{y}'$ le serait encore dans un voisinage de a et cela contrdirait la maximalité de J. Et comme $\tilde{y}'$ est strictement positive sur J, il en résulte $\tilde{y}'(a) = 0$. Mais comme $\tilde{y} = y$ sur J, par continuité de y' en a (qui appartient à I), on doit donc avoir $y'(a) = 0$, ce qui impossible vu le choix de I. On en conclut donc que $J = I$ et donc que $\tilde{y} = y$ sur I. Pour le choix de I que l'on a fait, on a donc existence et unicité d'une solution de classe C^2 de (E).

I.3 La fonction $x \to -sn(-x)$ vérifie (E) sur l'intervalle $I = -I$. Par unicité on a donc $sn(x) = -sn(-x)$ dans I, i.e. sn est impaire.
La dérivée d'une fonction impaire étant paire et le quotient de deux fonctions paires aussi, $cn = sn'/dn$ est une fonction paire.
On a

$$cn^2 = \frac{\dot{sn}^2}{dn^2} = \frac{(1-sn^2)(1-k^2sn^2)}{1-k^2sn^2} = 1 - sn^2$$

et donc

$$sn^2 + cn^2 = 1\ .$$

En dérivant l'égalité précédente, on trouve

$$\dot{sn}sn + \dot{cn}cn = 0\ .$$

Comme $\dot{sn}$ est non nul sur I, il en est de même pour cn. On a donc $\dot{cn} = -sn.dn$.
En dérivant $k^2sn^2 + dn^2 = 1$, on obtient la dernière égalité (car dn n'est jamais nul).

I.4

I.4.a Par définition de $s_1 = sn$, on a

$$\dot{s_1}^2 = (1-s_1^2)(1-k^2s_1^2)\ .$$

Il en résulte

$$\dot{s_1}\ddot{s_1} = [-(k+1)s_1 + 2k^2 s_1^3]\dot{s_1}$$

d'où

$$\ddot{s_1} = -(k+1)s_1 + 2k^2 s_1^3$$

puisque $\dot{s_1}$ ne s'annule pas sur I.
On a

$$\dot{s_2}(u) = -\dot{s_1}(w-u)$$

et donc

$$\dot{s_2}^2 = (1-s_2^2)(1-k^2 s_2^2)$$

et

$$\ddot{s_2} = -(k+1)s_2 + 2k^2 s_2^3 \ .$$

Par conséquent

$$\frac{\ddot{s_1}s_2 - \ddot{s_2}s_1}{\dot{s_1}^2 s_2^2 - \dot{s_2}^2 s_1^2} = \frac{2k^2 s_1 s_2 [s_1^2 - s_2^2]}{[s_1^2 - s_2^2](-1 + k^2 s_1^2 s_2^2)} = -2k^2 \frac{s_1 s_2}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} \ .$$

I.4.b Formellement

$$\frac{\ddot{s_1}s_2 - \ddot{s_2}s_1}{\dot{s_1}s_2 - \dot{s_2}s_1} = -2k^2 \frac{s_1 s_2(\dot{s_1}s_2 + \dot{s_2}s_1)}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2}$$

et donc

$$d\log(\dot{s_1}s_2 - \dot{s_2}s_1) = d\log(1 - k^2 s_1^2 s_2^2) \ ;$$

d'où

$$\frac{\dot{s_1}s_2 - \dot{s_2}s_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} = \text{Cte} \ .$$

Plus rigoureusement il suffit d'écrire

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\dot{s_1}s_2 - \dot{s_2}s_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2}\right) = \frac{(\ddot{s_1}s_2 - \ddot{s_2}s_1)(1 - k^2 s_1^2 s_2^2) + 2k^2(\dot{s_1}s_2 - \dot{s_2}s_1)s_1 s_2(\dot{s_1}s_2 + \dot{s_2}s_1)}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2} = 0$$

pour obtenir le résultat demandé.

I.4.c Comme $\dot{s_2} = -\dot{sn}(v)$, il en résulte qu'il existe une fonction C telle que

$$\frac{\dot{sn}(u)sn(v) + \dot{sn}(v)sn(u)}{1 - k^2 sn^2(u) sn^2(v)} = C(u+v) \ .$$

En faisant $v = 0$, on obtient $C(u) = sn(u)$, i.e. $C = sn$. D'où la formule demandée en utilisant $\dot{sn} = cn.dn$.

I.4.d Quand k tend vers 0 , (E) redonne les fonctions trigonométriques usuelles : sn devient $\sin$, cn devient $\cos$ et dn devient la fonction identiquement égale à 1 . Les formules du texte redonnent donc les formules d'addition pour $\sin$ et $\cos$.

I.5 On note avec un indice 1 ou 2 les fonctions dépendant de u ou v. Par exemple $c_1 = cn(u)$. Calculons le numérateur :

$$c_1(c_1c_2 - s_1s_2d_1d_2) + d_2s_1(s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1) = c_1^2 c_2 + s_1^2 c_2 d_2^2$$

et, en développant c_1^2 et d_2^2, on trouve

$$c_2(1 - s_1^2 + s_1^2(1 - k^2 s_2^2)) = c_2(1 - k^2 s_1^2 s_2^2) \ .$$

D'où

$$c_1 \frac{c_1c_2 - s_1s_2d_1d_2}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} + d_2 s_1 \frac{s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} = c_2 \ .$$

Ce qui est la formule recherchée.

I.6 **I.6.a** K est bien défini puisque l'intégrand est continu sur $[0;1[$ et est équivalent à $1/\sqrt{2(1-k^2)(1-t)}$ quant t tend vers 1 par valeurs inférieures.

I.6.b Montrons qu'il existe u_0 tel que $sn(u_0)=1$ et tel que sn soit monotone sur $[0,u_0]$. On va montrer en fait que u_0 est le premier zéro (positif) de sn'. Remarquons que l'on a toujours $|sn(u)|\leq 1$ d'après, par exemple, la formule $sn^2+cn^2=1$. Supposons que sn' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, alors elle est de signe constant sur $\mathbb{R}_+$ et y est donc positive puisque $sn'(0)=1$. La fonction sn est donc strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même et définit donc un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur son image. On peut donc écrire

$$u=\int_0^u dx=\int_0^{sn(u)}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\leq\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=K\ .$$

Ceci est impossible à satisfaire pour tout u réel positif. Donc sn' s'annule en au moins un point de $\mathbb{R}_+$. Comme elle y est continue, l'ensemble de ses zéros postifs est fermé et on peut donc définir u_0 le plus petit de ses zéros positifs. Comme sn' est de signe constant sur $[0;u_0]$, elle y est positive, sonc sn y est croissante. En particulier sn est positive sur $[0;u_0]$. Comme $sn'(u_0)=0$, on a $cn(u_0)=0$ et donc $|sn(u_0)|=1$. Par positivité, on a donc $sn(u_0)=1$. Par conséquent sn est un C^1 difféomorphisme de $[0;u_0]$ sur $[0;1]$. On a donc

$$u_0=\int_0^u dx=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=K\ .$$

I.6.c Il en résulte $sn(K)=1$ et $cn(K)=0$.

I.6.d

$$sn(u+K)=\frac{sn(u)cn(K)dn(K)+sn(K)cn(u)dn(u)}{1-k^2sn^2(u)sn^2(K)}=\frac{cn(u)dn(u)}{1-k^2sn^2(u)}$$

I.6.e On dérive $sn(u+K)=\frac{\dot{sn}(u)}{1-k^2sn^2(u)}$ et on trouve

$$\begin{aligned}\dot{sn}(u+K)&=\frac{\ddot{sn}(u)[1-k^2sn^2(u)]+2k^2sn(u)\dot{sn}^2(u)}{(1-k^2sn^2(u))^2}\\&=\frac{sn(u)[2k^2sn^2(u)-(1+k^2)]+2k^2sn(u)[1-sn^2(u)]}{1-k^2sn^2(u)}\\&=-\frac{(1-k^2)sn(u)}{1-k^2sn^2(u)}\end{aligned}$$

I.6.f Remarquons que sn est impaire et que $u\mapsto sn(u+K)$ est paire. Il en résulte

$$sn(u+2K)=sn\left((u+K)+K\right)=sn\left(-(u+K)+K\right)=sn(-u)=-sn(u)$$

et donc

$$sn(u+4K)=-sn(u+2K)=sn(u)$$

i.e. sn est $4K$ périodique.
Sur $[0,K]$, $\dot{sn}$ est positif car il ne s'annule pas (K est la première valeur où sn vaut 1) . Grâce à la formule donnant $\dot{sn}(u+K)$, on voit que $\dot{sn}$ est négatif sur $[K,2K]$. Enfin, en utilisant $sn(u+2K)=-sn(u)$, on trouve le tableau de

variations :

$$\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & 0 & & K & & 2K & & 3K & & 4K \\
\hline
 & & & 1 & & & & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
sn & 0 & & & & 0 & & & & 0 \\
 & & & & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & & & & -1 & &
\end{array}$$

I.6.g Remarquons que $sn(u) = sn(2K - u)$.
Supposons $\sin(\phi) = 1$; on a alors $\cos(\phi) = 0$. L'équation $sn(u) = 1$ a une seule solution modulo K, à savoir $u = K$ et alors $cn(u) = 0$. D'où l'existence et l'unicité de u modulo $4K$ dans ce cas.
Si maintenant $\sin(\phi) = -1$, on a encore $\cos(\phi) = 0$. L'équation $sn(u) = -1$ a une seule solution modulo K, à savoir $u = 3K$ et alors $cn(u) = 0$. D'où l'existence et l'unicité de u modulo $4K$ dans ce cas.
Enfin si $|\sin(\phi)| < 1$, l'équation $sn(u) = \sin(\phi)$ a deux solution modulo $4K$ d'après le tableau précédent, à savoir u et $2K-u$. Leurs dérivées y ont des signes opposés. C'est-à-dire que les deux solutions sont telles que $cn(u)$ admet une même valeur absolue (car $sn^2 + cn^2 = 1$ fixe cette valeur absolue), mais ont des signes opposés (puisque $cn = sn/dn$ est du signe de sn'). Il en résulte qu'il y a au plus une solution. Et comme $cn^2(u) = 1 - sn^2(u) = 1 - \sin^2(\phi) = \cos^2(\phi)$, on a effectivement une solution.

I.6.h Soit u tel que $cn(u) = \alpha$. On a $dn(u) = \beta \Leftrightarrow dn^2(u) = \beta^2$ car dn est toujours positif. Comme $dn^2 = 1 - k^2 sn^2 = 1 - k^2(1 - cn^2)$, on a

$$dn(u) = \beta \Leftrightarrow \beta^2 = 1 - k^2(1 - \alpha^2) \Leftrightarrow k^2 = \frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2} \, .$$

I.7 **I.7.a** Si $\alpha = \beta = 0$, soit $\gamma = 0$ et alors tout u est solution, soit γ est non nul et alors il n'y a pas de solution.

Si $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\alpha cn(u) + \beta sn(u) = \gamma \quad & \Rightarrow \quad \alpha^2 cn^2(u) = \beta^2 sn^2(u) - 2\beta\gamma sn(u) + \gamma^2 \\
& \Rightarrow \quad (\alpha^2 + \beta^2) sn^2(u) - 2\beta\gamma sn(u) + \gamma^2 - \alpha^2 = 0 \\
& \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 \geq \gamma^2 \\ \text{et} \\ sn(u) = \frac{\beta\gamma \pm \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}}{\alpha^2 + \beta^2} \, . \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Et alors, si α est non nul,

$$cn(u) = \frac{\gamma - \beta sn(u)}{\alpha} = \frac{\alpha\gamma \mp \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

et, si $\alpha = 0$,

$$sn(u) = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{et} \quad cn(u) = \pm\frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\beta} = \frac{\alpha\gamma \mp \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}}{\alpha^2 + \beta^2} \, .$$

La formule trouvée est donc valable dès que $\alpha^2 + \beta^2 \geq \gamma^2 > 0$ et on vérifie qu'on a bien

$$\left(\frac{\beta\gamma \pm \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}}{\alpha^2 + \beta^2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha\gamma \mp \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}}{\alpha^2 + \beta^2} \right)^2 = \frac{(\beta^2 + \alpha^2)\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = 1$$

et donc qu'il existe bien un unique u modulo $4K$ tel que

$$(sn(u), cn(u)) = \left(\frac{\beta\gamma + \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha\gamma - \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$$

ainsi qu'un unique u modulo $4K$ tel que

$$(sn(u),cn(u)) = \left(\frac{\beta\gamma - \alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}}{\alpha^2+\beta^2}, \frac{\alpha\gamma + \beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}}{\alpha^2+\beta^2}\right)$$

Au final, si $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2=0$, tout u est solution ; Si $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2\neq 0$, il y a une seule solution modulo $4K$; Si $\alpha^2+\beta^2>\gamma^2$, il y a deux solutions modulo $4K$.

I.7.b On résout en w avec $\alpha = cn(u)$, $\beta = sn(u)dn(v)$ et $\gamma = cn(v)$. On a

$$\begin{aligned}
\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 &= cn^2(u) + sn^2(u)dn^2(v) - cn^2(v) \\
&= 1 - sn^2(u) + sn^2(u)[1-k^2sn^2(v)] - 1 + sn^2(v) \\
&= sn^2(v)[1-k^2sn^2(u)] \\
&= sn^2(v)dn^2(u)
\end{aligned}$$

Les formules précédentes montrent que

$$sn(w) = \frac{sn(u)cn(v)dn(v) \pm cn(u)dn(u)sn(v)}{1-k^2sn^2(u)sn^2(v)}$$

et

$$cn(w) = \frac{cn(u)cn(v) \mp sn(u)sn(v)dn(u)dn(v)}{1-k^2sn^2(u)sn^2(v)} ,$$

i.e. $sn(w) = sn(u\pm v)$ et $cn(w) = cn(u\pm v)$; et donc $w = u\pm v$ modulo $4K$.

***

Partie II

II.1 **II.1.a** On a $P_\phi \neq P_{\phi'}$ si et seulement si $\phi \not\equiv \phi'$ $[\pi]$, ou encore si et seulement si $\sin(\phi-\phi')\neq 0$. Dans ces conditions, la droite $(P_\phi P_{\phi'})$ admet pour équation cartésienne :

$$\begin{aligned}
(\cos(2\phi') - \cos(2\phi))\,(y - R\sin(2\phi)) &= (\sin(2\phi') - \sin(2\phi))\,(x - R\cos(2\phi)) \\
2\sin(\phi'-\phi)\sin(\phi+\phi')\,(y - R\sin(2\phi)) &= -2\sin(\phi'-\phi)\cos(\phi+\phi')\,(x - R\cos(2\phi))
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$x\cos(\phi+\phi') + y\sin(\phi+\phi') - R\cos(\phi-\phi') = 0 .$$

Une droite est tangente au cercle de centre O et de rayon R si et seulement si elle rencontre le cercle en un seul point ou encore si et seulement si la distance de O à la droite est R. La distance du point (x_0,y_0) à la droite d'équation $\lambda x+\mu y+\nu=0$ étant $|\lambda x_0+\mu y_0+\nu|/\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, la condition $(P_\phi P_{\phi'})$ tangente à C s'écrit

$$r = |R\cos(\phi-\phi') + a\cos(\phi+\phi')| = \pm\left((R+a)\cos\phi\cos\phi' + (R-a)\sin\phi\sin\phi'\right) .$$

D'où la condition demandée puisqu'en changeant ϕ' en $\phi'+\pi$ on change le signe de l'expression précédente, mais on ne change pas le point $Q = P_{\phi'}$.

II.1.b On peut trouver k et u tels que

$$(cn(u;k),dn(u;k)) = \left(\frac{R-a}{R+a},\frac{r}{R+a}\right) .$$

En effet, on a bien sûr $0 \leq \frac{R-a}{R+a} < 1$ et $0 \leq \frac{r}{R+a} < 1$ et, d'après $I.6.f$, il suffit donc de prendre

$$k^2 = \frac{1 - \left(\frac{R-a}{R+a}\right)^2}{1 - \left(\frac{r}{R+a}\right)^2} = \frac{4aR}{(R+a)^2 - r^2}$$

pour obtenir le résultat. Il faut donc vérifier $0 < k < 1$, i.e. $4aR < (R+a)^2 - r^2$ ou encore $r^2 < (R-a)^2$, i.e. $r < R-a$, ce qui est vrai par hypothèse.
Dans ces conditions l'équation trouvée à la question précédente se récrit exactement comme l'équation $I.7.b$ et on a donc

$$am_k(\phi') \equiv am_k(\phi) \pm u \ [4K]$$

où le K est celui qui est associé à k .

II.2 **II.2.a** La question précédente nous fournit le cas $i = 0$ (quitte à changer le signe de u) et nous dit que l'équation demandée est vérifiée sauf peut-être au signe près pour u . Il nous faut donc voir que le signe est constant. Mais s'il change entre i et $i+1$, on a

$$am_k(\phi_{i+2}) \equiv am_k(\phi_{i+1}) - u \equiv am_k(\phi_i) \ [4K] \ ,$$

i.e. $P_{\phi_{i+2}} = P_{\phi_i}$, ce qui est exclus. Le signe de u est donc bien constant.

II.2.b Si a est nul, la condition de tangence s'écrit

$$\cos(\phi - \phi') = \frac{r}{R}$$

et on obtient donc

$$\phi_{i+1} \equiv \phi_i + u \ [2\pi] \ ;$$

autrement dit, am_k tend vers l'identité quand k tend vers 0 et K tend vers 2π .

II.2.c La condition $P_{\phi_n} = P_{\phi_0}$ s'écrit donc

$$nu \equiv 0 \ [4K]$$

et est donc indépendante de ϕ_0 .

II.2.d On peut faire le calcul dans le cas où $\phi_0 = 0$, i.e. P est le point $(R,0)$.
La droite $y = \alpha(x-R)$ est tangente à C' si et seulement si

$$\frac{|\alpha(-a-R)|}{\sqrt{1+\alpha^2}} = r$$

i.e. $\alpha^2 = \frac{r^2}{(R+a)^2 - r^2}$.
La droite $y = \alpha(x-R)$ recoupe C en un point M_α tel que

$$0 = x^2 + y^2 - R^2 = x^2 - R^2 + \alpha^2(x-R)^2 = (x-R)(x+R+\alpha^2(x-R))$$

et donc en un point où $x = R\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}$. Si cette droite est tangente à C', il en est de même pour celle obtenue en changeant le signe de α et si on a un triangle comme dans l'énoncé la droite verticale joignant les 2 points M_α et $M_{-\alpha}$ doit être tangente à C', i.e.

$$R\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} = -a \pm r$$

et donc $\alpha^2 + 1 = \frac{2R}{R+a\mp r}$.

Avec la valeur de α trouvée précédemment, cela donne

$$\frac{2R}{R+a\mp r}=\alpha^2+1=\frac{r^2}{(R+a)^2-r^2}+1=\frac{(R+a)^2}{(R+a)^2-r^2}$$

i.e. $2R(R+a\pm r)=(R+a)^2$ ou encore $a^2-R^2=\pm 2rR$. Comme $a<R$, on en déduit que la condition est

$$a^2-R^2=-2rR\ .$$

II.2.e On fait encore une fois le calcul dans le cas où $P=(R{,}0)$. Dans ces conditions, par symétrie, on doit avoir $P_{\phi_2}=(-R{,}0)$.
La condition de tangence d'une doite $y=\beta(x+R)$ passant par $(-R{,}0)$ est celle obtenue en changeant le signe de R dans la condition pour $y=\alpha(x-R)$, i.e. $\beta^2=\frac{r^2}{(R-a)^2-r^2}$ et elle coupe C en un point N_β d'abscisse $x=R\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$.
La condition $N_\beta=M_\alpha$ s'écrit alors

$$\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}$$

i.e. $\alpha^2=\frac{1}{\beta^2}$. D'où

$$\frac{r^2}{(R+a)^2-r^2}=\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}$$

i.e.

$$(R^2-a^2)^2=2r^2(R^2+a^2)\ .$$

***

Partie III

III.1 **III.1.a** Il faut que $y_0+\lambda(p-q)+\mu u$ soit de la forme $(1-\gamma)p+\gamma x$ avec $x\in C$ et $\gamma\in\mathbb{R}$. On trouve d'abord γ faisant $\phi(x)=1$:

$$\phi(y_0)+\lambda(\phi(p)-1)=(1-\gamma)\phi(p)+\gamma$$

et donc

$$\gamma=\frac{\phi(y_0)+\lambda(\phi(p)-1)-\phi(p)}{1-\phi(p)}=\frac{\phi(y_0)-\phi(p)}{1-\phi(p)}-\lambda\ .$$

On peut avoir $\gamma=0$. Dans ce cas il faut $y_0=p-\lambda(p-q)-\mu u$ et la condition s'écrit : y_0 appartient au plan contenant L et p et

$$\lambda=\frac{\phi(y_0)-\phi(p)}{1-\phi(p)}\quad \mu=\frac{\langle p-y_0,u\rangle}{||u||^2}\ .$$

Sinon, on écrit alors la condition pour que x appartienne à C, i.e. $Q(x)=0$:

$$\begin{aligned}
0 &= Q\left(\frac{y_0+\lambda(p-q)+\mu u-(1-\gamma)p}{\gamma}\right)\\
&= Q(y_0+\lambda(p-q)+\mu u-(1-\gamma)p)\\
&= Q\left(y_0+\lambda(p-q)+\mu u+\left(\frac{\phi(y_0)-\phi(p)}{1-\phi(p)}-\lambda-1\right)p\right)\\
&= Q\left(y_0-\lambda q+\mu u+\frac{\phi(y_0)-1}{1-\phi(p)}p\right)\\
&= Q\left(\mu u-\lambda q+y_0+\frac{\phi(y_0)-1}{1-\phi(p)}p\right)
\end{aligned}$$

III.1.b On développe la condition précédente en λ et μ :

$$\lambda^2 Q(q) - 2\lambda\mu B_Q(q,u) + \mu^2 Q(u) + \ldots$$

où ce qui n'est pas écrit sont les termes de degré 1 et 0 en λ et μ . On peut donc trouver y_0 tel que le plan passant par y_0 parallèle au plan passant par p et L (i.e. de direction donnée par le plan vectoriel engendré par les vecteurs $p - q$ et u) satisfaisant à la condition de l'énoncé si et seulement si la forme quadratique $\lambda^2 Q(q) - 2B_Q(q,u) + \mu^2 Q(u)$ est multiple de $\lambda^2 + \mu^2$, i.e.

$$\begin{cases} Q(q) = Q(u) \\ B_Q(q,u) = 0\ . \end{cases}$$

III.2 La condition ${}^tZSZ = 0$ peut se récrire, en décomposant parties réelles et imaginaires :

$$0 = {}^t(X + iY)S(X + iY) = {}^tXSX - {}^tYSY + i({}^tXSY + {}^tYSX)$$

i.e.

$$Q(X) = Q(Y) \qquad \& \qquad B_Q(X,Y) = 0\ .$$

On choisit donc p quelconque en dehors de P et on prend $q = p + X$ et $u = Y$. La question précédente montre que les images des 2 coniques C et C' sont bien des cercles.

III.3 Les notions de tangences entre une droite et une conique étant que leur intersection est formée d'un point (et non deux ou aucun), elle se conserve par une projection comme celle de la question précédente. La projection étant injective de P dans Π, la condition de fermeture est aussi conservée, i.e. $P_{\phi_0} = P_{\phi_n}$ si et seulement si leurs images sont égales. Il en résulte que l'assertion de la question $II.2.c$ est encore valide dans le cas des coniques d'intersection vide.

III.4 Soit $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$. C'est un espace vectoriel complexe de dimension 3 et aussi un espace vectoriel réel de dimension 6. On peut voir E comme sous-espace vectoriel (réel) de $E_{\mathbb{C}}$ de dimension 3.
Soit $\phi_{\mathbb{C}}$ la forme linéaire sur $E_{\mathbb{C}}$ ayant la même matrice que ϕ (ces matrices étant respectivement exprimées dans les bases canoniques de $\mathbb{C}^3$ et $\mathbb{R}^3$). L'équation $\phi_{\mathbb{C}}$ définit donc un plan complexe $P_{\mathbb{C}}$ de $E_{\mathbb{C}}$, qui est aussi un sous-espace vectoriel réel de dimension 4 de $E_{\mathbb{C}}$. En tant qu'espace vectoriel réel, il contient le plan P. De plus si $Z = X + iY$ est un vecteur de $E_{\mathbb{C}}$ écrit de sorte que X et Y sont réels (i.e. X et Y dans E), alors

$$\phi_{\mathbb{C}}(X + iY) = \phi(X) + i\phi(Y)\ .$$

Soit $Q_{\mathbb{C}}$ et $Q'_{\mathbb{C}}$ les formes quadratiques sur $\mathbb{C}^3$ définies par les mêmes matrices que Q et Q' (par rapport toujours aux bases canoniques). On cherche donc $Z = X + iY$ tel que $Q_{\mathbb{C}}(Z) = Q'_{\mathbb{C}}(Z) = 0$ et $\phi_{\mathbb{C}}(Z) = 1$.
Il nous suffit de montrer qu'un tel Z existe puisqu'alors, par hypothèse sur C et C' on devra nécessairement avoir Y non nul (sinon X serait un point d'intersection des deux coniques). On se place donc dans un repère affine de $P_{\mathbb{C}}$, disons donc que tout point Z de $P_{\mathbb{C}}$ s'écrit de façon unique

$$Z = A + x\vec{v} + y\vec{w}$$

avec A, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ fixés (on a donc $\phi_{\mathbb{C}}(A) = 1$ et $\phi_{\mathbb{C}}(\vec{v}) = \phi_{\mathbb{C}}(\vec{w}) = 0$) et x et y complexes. Les équations $Q_{\mathbb{C}}(Z) = Q'_{\mathbb{C}}(Z) = 0$ s'écrivent donc

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0$$

avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $(a',b',c') \neq (0,0,0)$ (puisque les formes quadratiques ne sont pas dégénérées).
Considérons l'équation

$$P_{\lambda,\mu}(x,y) = \lambda(ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f) + \mu(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f') = 0$$

pour $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$. On cherche à trouver des racines communes à $P_{1,0}$ et $P_{0,1}$. Remarquons que $P_{\lambda,\mu} = 0$ définit en général une conique et que celle-ci est dégénérée si et seulement si le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' & \lambda b + \mu b' & \lambda d + \mu d' \\ \lambda b + \mu b' & \lambda c + \mu c' & \lambda e + \mu e' \\ \lambda d + \mu d' & \lambda e + \mu e' & \lambda f + \mu f' \end{pmatrix}$$

est nul. Si on pose $\mu = 1$, ceci est un polynôme de degré au plus trois en λ. Son terme dominant est celui obtenu pour $(\lambda,\mu) = (1,0)$ et est donc non nul. Il existe donc au moins une valeur (et même d'ailleurs au moins une valeur réelle) de λ telle que $P_{\lambda,1}(x,y) = 0$ définisse une conique dégénérée. C'est donc la réunion d'une ou de deux droites.
Remarquons pour conclure que

$$P_{\lambda,1}(x,y) = P_{0,1}(x,y) = 0 \Leftrightarrow P_{1,0}(x,y) = P_{0,1}(x,y) = 0$$

et donc on cherche un point dans l'intersection d'une conique non dégénérée et d'une conique dégénérée. Comme cette intersection contient au moins l'intersection d'une droite et d'une conique non dégénérée, on a bien un point. En effet la droite est donnée par une équation du premier degré non nulle. En particulier on peut exprimer l'une des variables en fonction de la seconde. Disons par exemple $y = \alpha x + \beta$. Ce point appartient à la conique si et seulement si x vérifie une certaine équation du second degré (c'est bien une équation de degré exactement deux parce que la conique n'est pas dégénérée). Un tel x existe puisque l'on est sur $\mathbb{C}$. Contrairement au λ trouvé précédemment, x n'a aucune raison d'être réel.
Remarquons enfin que la conique dégénérée peut-être en fait une seule droite (double) et que cette droite peut être tangente à la conique. Dans ce cas on n'a qu'un seul point d'intersection (mais il est alors réel !).