

Don Quichotte et le moulin du Chaos

François Sauvageot
Chargé de mission CNRS
Communication mathématique
Animateur IREM
Enseignant-chercheur



Don Quichotte

où La recherche du Chaos ...

- Recherche de sujets : intrigué-e-s par une suite chaotique
- 1ère étude : jeu du Chaos, triangle de Sierpinski
- 2ème étude : suite logistique, erreurs d'arrondi
- 3ème étude : xylophone chaotique
- Ouverture d'un blog et recherche d'une personne ressource
- 4ème étude : du xylophone au billard
- 5ème étude : le moulin du Chaos !

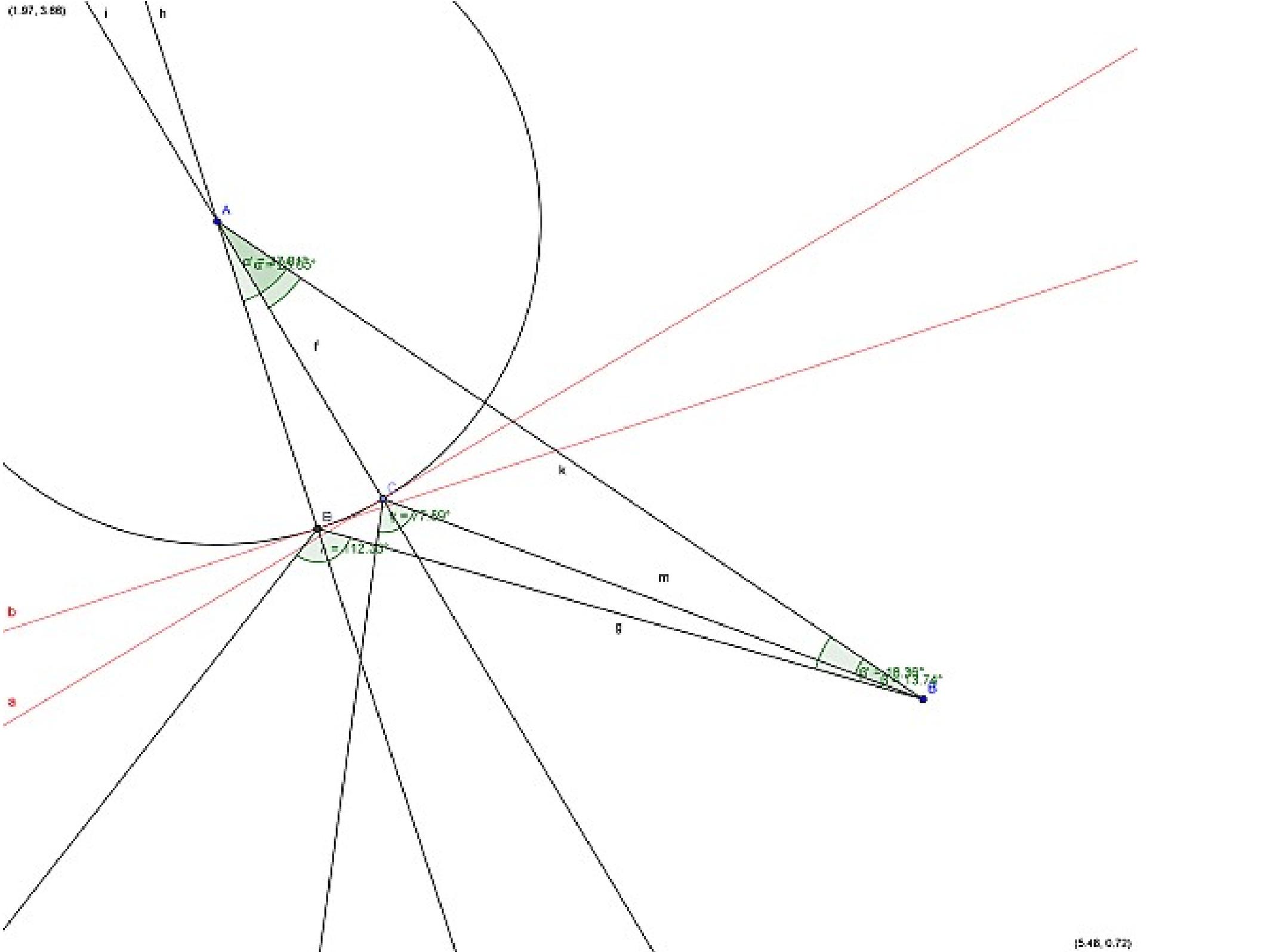
Du xylophone ...

- Après avoir exploré quelques classiques, sans les fouiller, l'idée vient de montrer des variations par rapport au « prévu » rapidement visibles, observables, audibles ... afin de convaincre sans connaissance mathématiques.
- Lâcher une bille dans un escalier musical (en forme de xylophone) : effet sonore du chaos.
- Observation d'une déviation.
- Pour des résultats plus précis, utilisation d'une caméra, pour enregistrer les mouvements de la bille et le son qu'elle produit.

... au billard

- Mais ce n'est pas chaotique : $F_y = 0$ et donc $y(t)$ est une parabole !
- Idée de plusieurs chocs successifs : billard.
- Premier billard : bille sur kaplas.
- Deuxième billard : bille sur billes.
- Troisième billard : bille au milieu d'une planche à clou ... en forme de triangle de Sierpinski.
- Simulation sous Géogèbra.

(1.97, 3.68)



(5.48, 0.72)





Aspects arithmétiques

- Orbite d'un rayon lumineux dans pièce carrée dont les murs sont des miroirs (König-Szücs)
 - soit une trajectoire fermée et périodique
 - soit une trajectoire dense

selon la rationalité de la tangente de l'angle entre un côté du carré et la direction initiale.

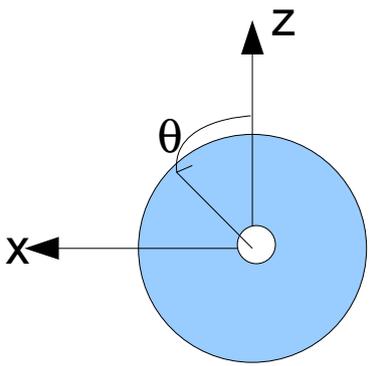
- Lien avec le théorème de Kronecker : si $1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ sont indépendants sur \mathbb{Z} , alors les $((k\theta_1), (k\theta_2), \dots, (k\theta_n))$ sont denses dans le cube unité.

Le moulin du Chaos

- Au départ un article de « Images des maths »
<http://images.math.cnrs.fr/Le-moulin-a-eau-de-Lorenz.html>
- Une idée qui accroche bien les esprits, mais beaucoup de physique : forces, moments, étude de la clepsydre ...
- Un exercice de modélisation ardu.
- Une approche par tableur, et l'envie d'obtenir un bel objet ...







Principe(s)

- Roue : cercle de rayon R , centré en O , dans (zOx)
- Récipients : repérés par θ_i , avec $\theta_i - \theta_j = 2\pi(i-j)/n$.
- Eau : masses m_i , hauteurs h_i , robinet $\mu \text{ kg.s}^{-1}$
- Discrétisation : $\Delta t = 1/25 \text{ s}$
- $\theta_k = \theta_1(k.\Delta t)$, $m_{i,k} = m_i(k.\Delta t)$, $\omega_k = \Delta t.(\theta_k - \theta_{k-1})$
- Poids : $mg \sin(\theta)$ dans la direction tangentielle
- Accélération tangentielle : $r\Delta\omega/\Delta t$

Reformulation

- Moment d'inertie : $I = I_0 + \sum m r_i^2$
- Couple : $C = C_0 + \sum m g r_i \sin(\theta_i)$

$$I \cdot \Delta\omega / \Delta t = C$$

- Ou plutôt, en introduisant la friction, c'est-à-dire le frottement solide de la roue sur son axe

$$I \cdot \Delta\omega = (C - f\omega) \cdot \Delta t$$

- On prend $I_0 = C_0 = 0$ pour la simulation sur tableur.

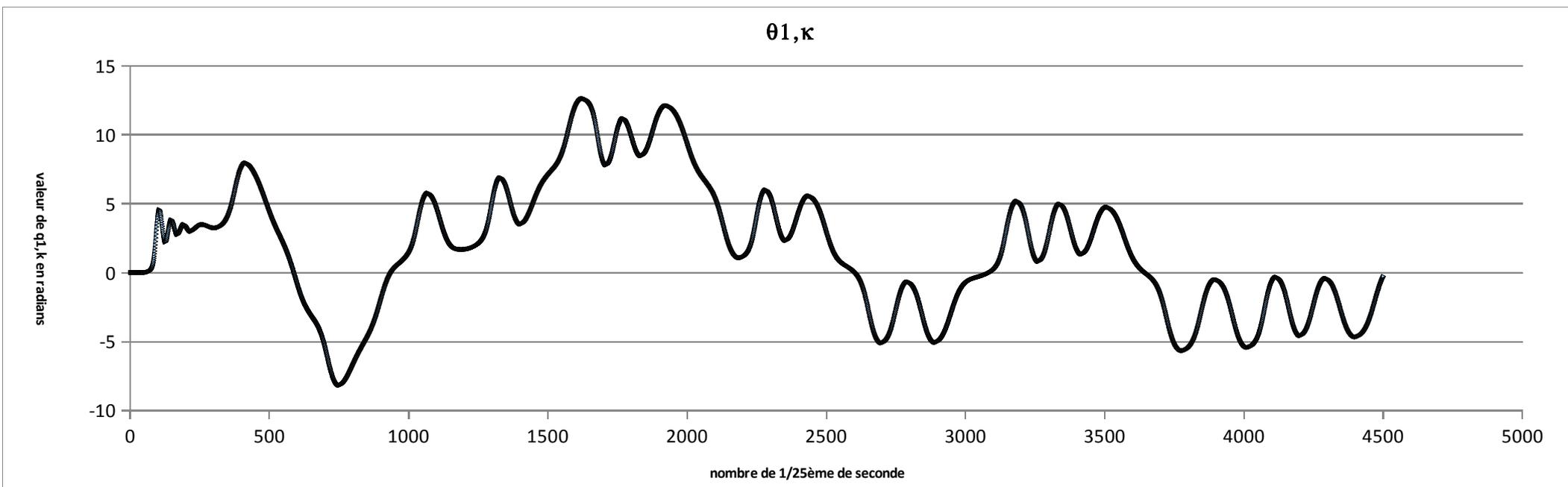
Clepsydre - Loi de Torricelli

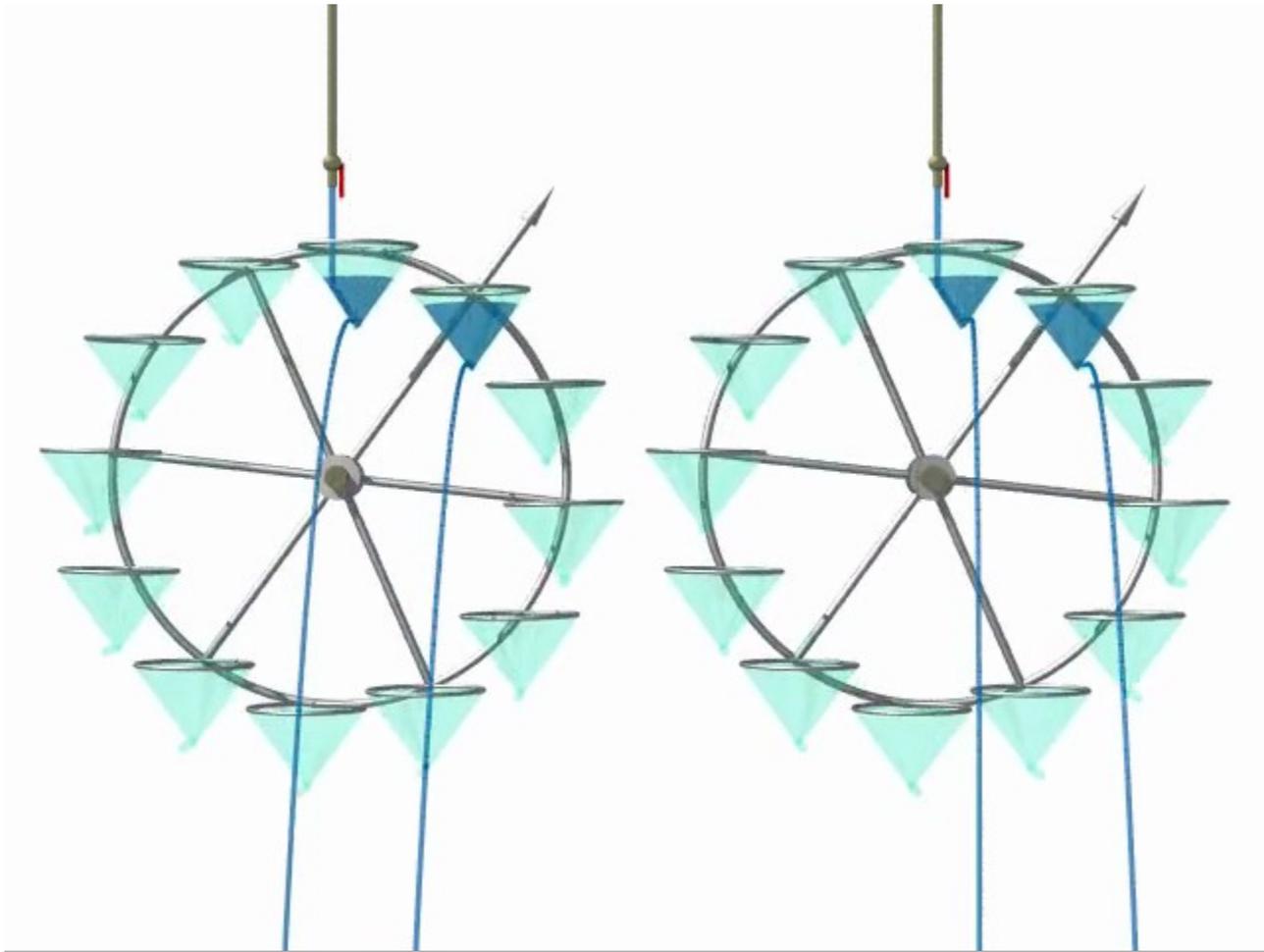
- Si on a une hauteur d'eau h dans un récipient et une fuite, de section σ petite par rapport à la section du récipient, alors en raison de la fuite on a une perte d'énergie potentielle et un gain d'énergie cinétique.
- Si l'eau fuit à raison de δm kg par seconde, à la vitesse v , alors $\Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot \delta m \cdot v^2 = -\Delta E_p = \delta m \cdot gh$.
- D'où $v = \sqrt{2gh}$ et $\delta m = \rho \sigma v = \rho \sigma \sqrt{2gh}$.
- Et, selon la forme du récipient : $\delta m = \lambda \cdot m^\gamma$, avec $\gamma = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{6}$.

Implémentation sur tableur

- $k=0,1,2, \dots$ incrémenté à chaque ligne
- $\Delta t=0,04$: 25 images par seconde !
- $R=1, g=9,8$, arrivée d'eau pour $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$.
- f, α, λ, μ à expérimenter ...
- θ initialisé, puis $\theta_{k+1} = \theta_k + \omega_{k+1} \cdot \Delta t$, et calcul des autres angles à partir de θ .
- m initialisés, puis $m_{k+1} = m_k - \lambda \cdot m_k^\gamma \cdot \Delta t (+ \mu \cdot \Delta t)$, avec des valeurs de seuil.
- Calcul de I et C , et $\Delta \omega$ et $\omega_{k+1} = \omega_k + \Delta \omega_k \cdot \Delta t$

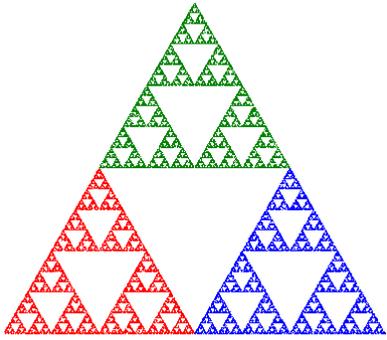
Simulation réalisée par le club





Compléments

Triangle de Sierpinski



- Jeu du chaos : prendre un triangle et un point du plan. Choisir un sommet du triangle et déplacer le point de moitié vers ce sommet. Et recommencer ce déplaçant en choisissant à chaque fois un sommet au hasard.
- Jeu du chaos en ligne : aboutir dans un petit triangle en le moins de coups possible !
<http://math.bu.edu/DYSYS/applets/chaos-game.html>
- Attracteur étrange : calcul barycentrique.
- Variantes : quadrilatère ? Avec des symétries ?

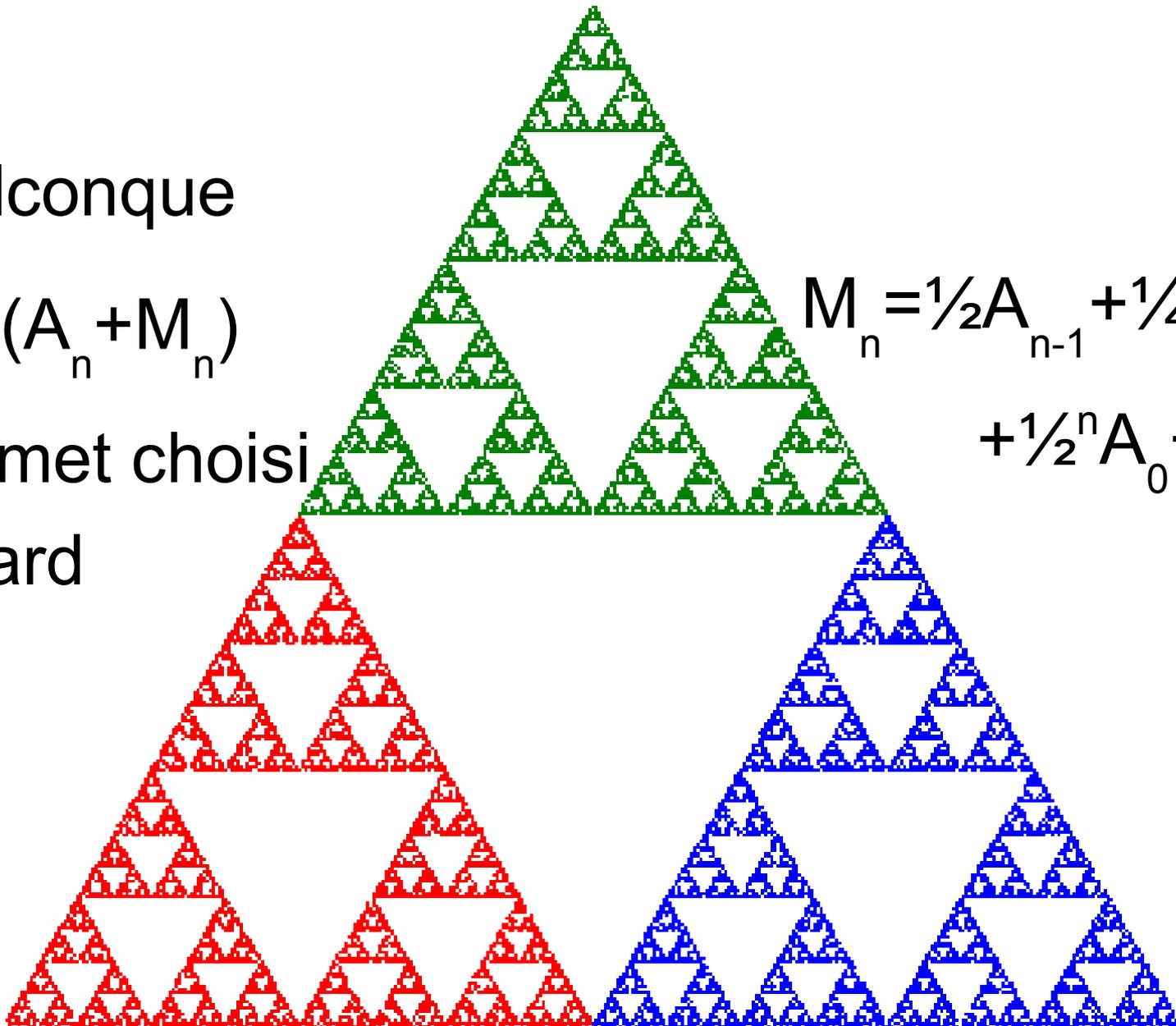
M_0 quelconque

$$M_{n+1} = \frac{1}{2}(A_n + M_n)$$

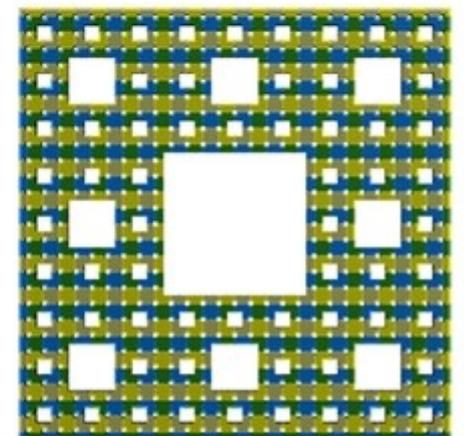
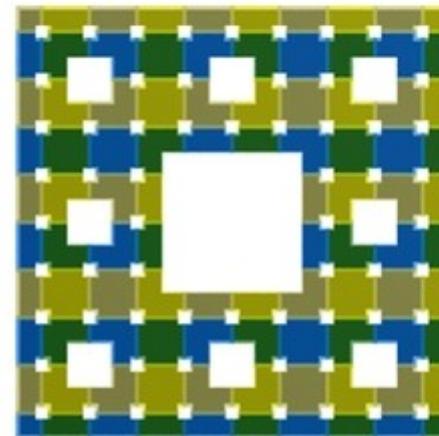
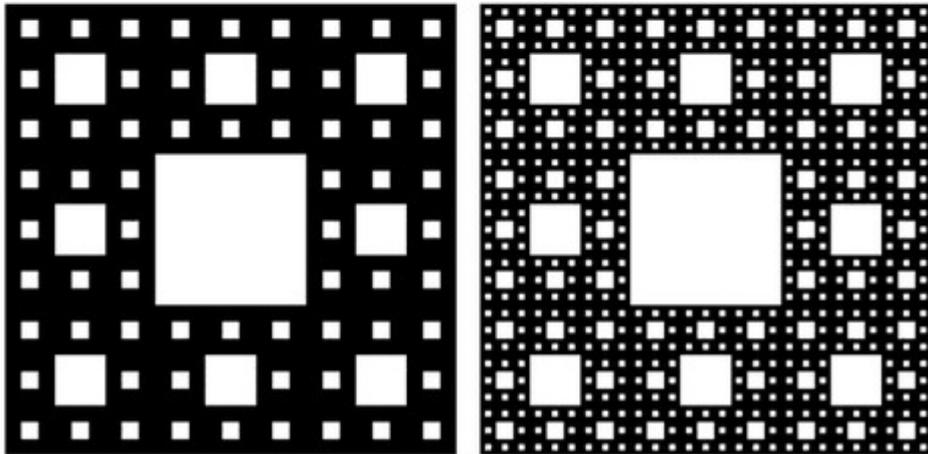
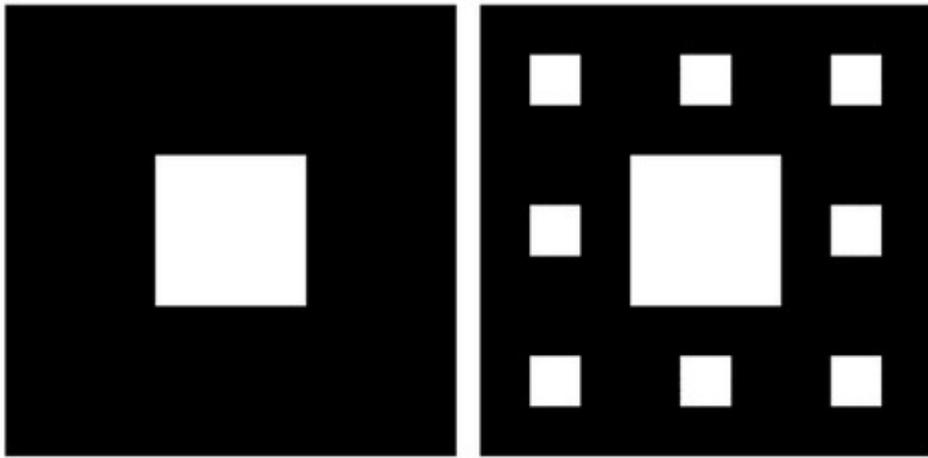
A_n sommet choisi
au hasard

$$M_n = \frac{1}{2}A_{n-1} + \frac{1}{4}A_{n-2} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2^n}A_0 + \frac{1}{2^n}M_0$$

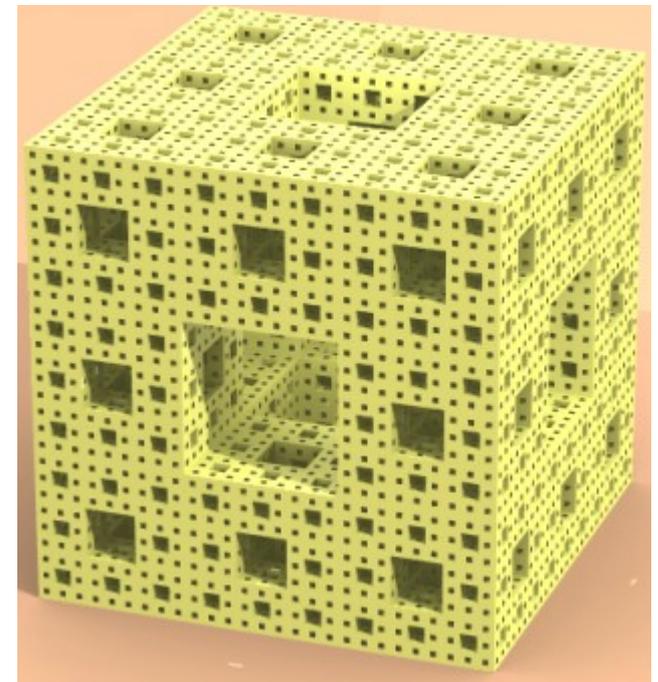
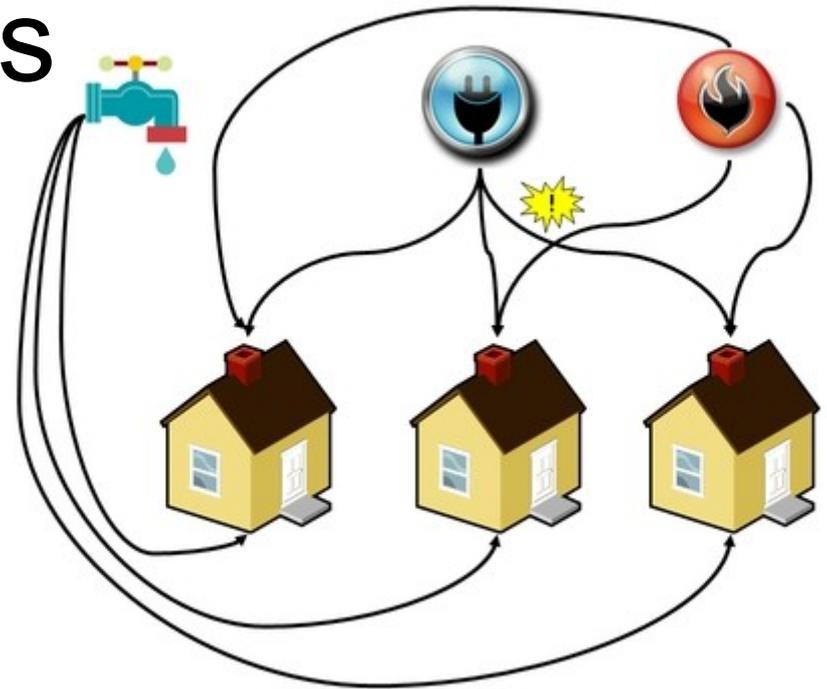


Topologiquement c'est une courbe !
Elle est universelle parmi les courbes planes.



Lien avec les graphes

- Le tapis de Sierpinski ne contient pas tous les graphes, notamment ceux qui ne sont pas planaires.
- Par contre son analogue en dimension 3, la courbe (ou éponge) de Menger est une courbe universelle : approximation d'une courbe par des graphes, puis plongement du graphe dans l'éponge !



Suite logistique

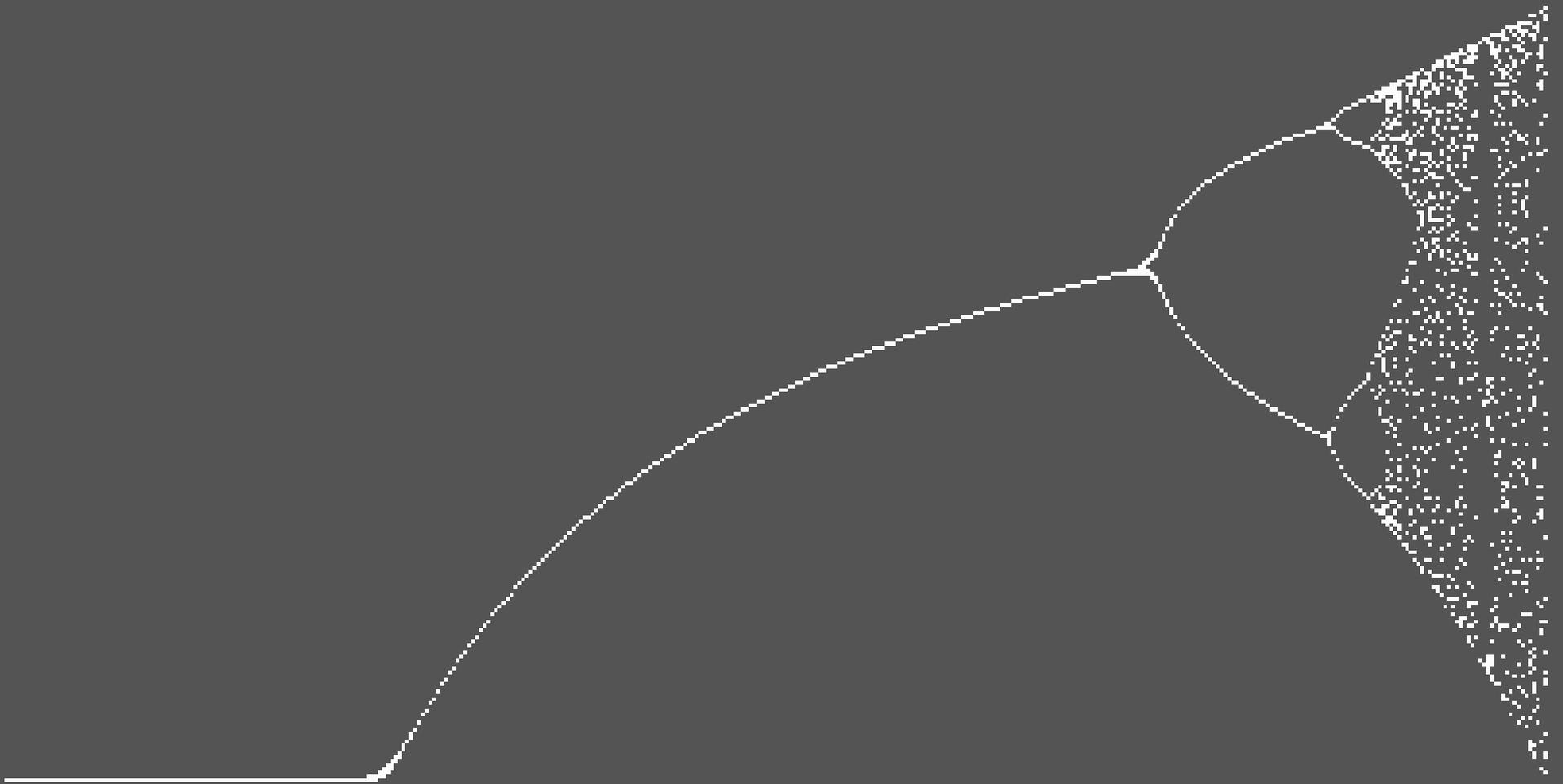
- Erreurs d'arrondis sur tableur :

$$u_{n+1} = 3,99 \cdot (u_n - u_n^2) = 3,99 \cdot u_n - 3,99 \cdot u_n^2$$

- Cas général : $u_{n+1} = \alpha(u_n - u_n^2)$, $1 \leq \alpha \leq 4$, $0 \leq u_0 \leq 1$

- Modèle de dynamique des populations :
 - terme linéaire : naissance, décès
 - terme quadratique : rencontres, compétition

Bifurcations



Merci pour votre attention !

