

Les maths ... en forme !



François Sauvageot
Animateur IREM (Nantes)

Quelques activités

- Géométrie des bulles de savon
- Découpages et aires
- Calculs d'aire
- Découpage et recollement de polygones convexes
- Démonstrations par les aires

Bulles de savon

- Est-ce qu'on peut faire une bulle sans savon ?
- Quelle est la forme d'une bulle ?
- Et si on part d'un mur carré de savon et qu'on souffle, la bulle est-elle carrée ?
- Et si on ne part pas d'une forme plate, est-ce qu'on a toujours un mur de savon ?
- À partir d'une pyramide, où seront les murs de savon ?

Bulles de savon

- Et peut-on avoir plus que des murs ? une bulle coincée ? plusieurs ?
- Et à partir d'un cube ?
- Il y a une paroi au milieu du cube ... et si on souffle dessus ?
- Alors, quand peut-on créer une bulle au milieu d'une forme ?

Objectifs

- Travail éventuellement en liaison avec la physique (tension de surface), la chimie (savon).
- Questionnement sur les plans médiateurs ou les médiatrices (entre deux plaques).
- Volumes fermés : liens entre surface et volume.
- A la recherche de polyèdres convexes.

Problématiques contemporaines



Empilements de sphères

- Conjecture de Kepler (Thomas Hales, 1998).
- Codes correcteurs d'erreurs : exemple des codes Hamming
- Pensez à un nombre entre 0 et 15.
- Répondez aux questions suivantes : (Vous pouvez mentir une fois.)

Codes de Hamming

- 1) Est-il 8 ?
- 2) Est-il dans $\{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$?
- 3) Est-il dans $\{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}$?
- 4) Est-il impair ?
- 5) Est-il dans $\{1, 2, 4, 7, 9, 10, 12, 15\}$?
- 6) Est-il dans $\{1, 2, 5, 6, 8, 11, 12, 15\}$?
- 7) Est-il dans $\{1, 3, 4, 6, 8, 10, 13, 15\}$?

Correction d'erreur

- Notons $m = (m_1, \dots, m_7)$ la réponse.
- Soit k l'entier dont la représentation binaire est abc , avec
 - $a = m_4 + m_5 + m_6 + m_7 \pmod{2}$
 - $b = m_2 + m_3 + m_6 + m_7 \pmod{2}$
 - $c = m_1 + m_3 + m_5 + m_7 \pmod{2}$
- Si $k = 0$, il n'y a pas eu de mensonge.
- Sinon, la k -ième réponse est fausse.
- On la corrige et le nombre est $m_1 m_2 m_3 m_4$.

Empilement ?

- Il fallait au moins sept questions :
 - Six questions donnent en effet 2^6 choix, alors qu'on a $16 \times (6 + 1) = 112$ possibilités; comme $112 > 64$, six questions ne suffisent donc pas.
 - Par contre, le même calcul avec 7 questions donne $2^7 = 16 \times (7 + 1)$: non seulement on a pu calculer la réponse correcte, mais il n'y a aucune information superflue.

Problème de Kelvin (1887)

- Remplir l'espace par des domaines de volume prescrit et une aire des frontières la plus petite possible.
- Structure de Weaire et Phelan
- Le cube d'eau des J.O. de Pékin.



Problème de la reine Didon

- Rapporté par Virgile (Énéide)
- Cette princesse phénicienne, débarquant de Tyr, demanda une terre pour s'établir au seigneur local qui ne lui concéda qu'« autant qu'il en pourrait tenir dans la peau d'un bœuf ».
- Elle choisit alors une péninsule et fit découper une peau de bœuf en très fines lanières. Mises bout à bout, elles délimitèrent l'emplacement de la future Carthage.
- Liens troubles unissant les notions d'aire et de périmètre ... fractales etc.

Situations optimales

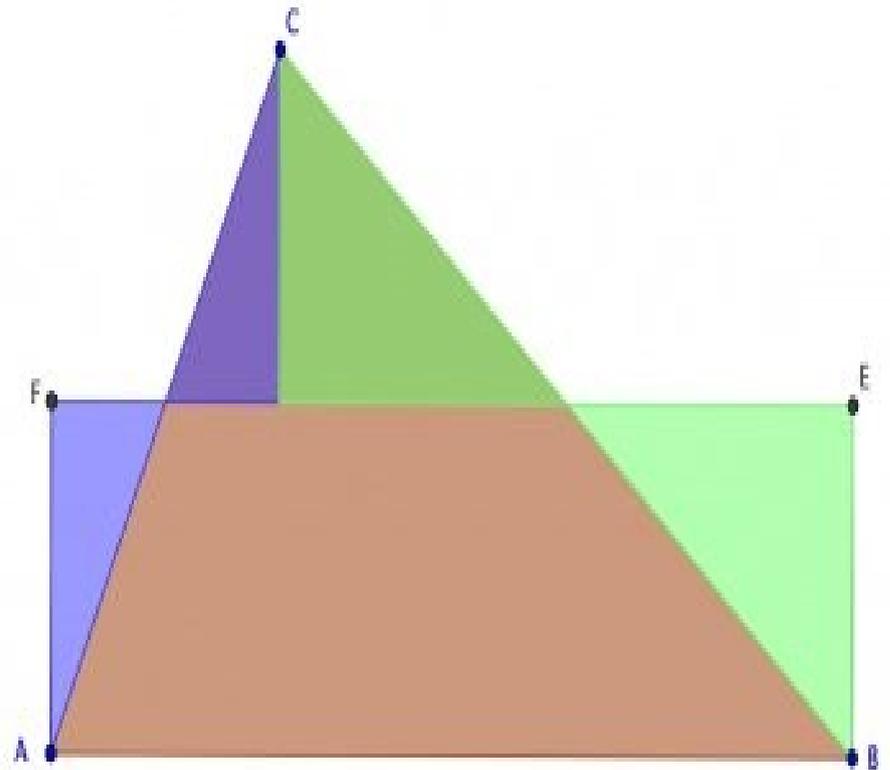
- **Problème** : Des points sont placés dans un plan. Chacun représente un commutateur téléphonique pouvant atteindre un certain nombre d'abonnés. La demande augmente dans la zone. **Où ajouter un ou plusieurs commutateurs?**
- On suppose que les zones d'influence sont circulaires, on cherche les centres des zones, les plus grandes possibles, sans commutateur à l'intérieur. Cela revient **à trouver les centres des plus grands cercle vides** entre ces points.

Mesurer les aires

- Utilisation du papier millimétré ...
 - Compter pour approcher ... une construction de l'intégrale (et interprétation physique si on pèse plutôt que de compter).
 - Une formule exacte en comptant des points ?
 - Modélisation par un réseau de points : exemple de la propagation des feux de forêt. Problèmes liés à la percolation en général.

Découpage et recollement

- Propriétés de l'aire et du Tangram :
 - additive
 - invariante par déplacement ou par isométrie
- Aire du rectangle : un passage à la limite !
- Aire du triangle ...



Découpage du triangle ABC donnant le rectangle ABEF.

On montre ainsi la formule : aire du triangle = base x hauteur/2

La base est AB et la largeur du rectangle est la moitié de la hauteur du triangle .

Problèmes

- Banach : Peut-on mesurer toutes les parties bornées du plan, de l'espace ... ?
 - Oui dans le plan !
 - Non dans l'espace à partir de la dimension 3.
- Bolyai-Hilbert-Tarski : Deux parties ayant même aire (ou même volume) sont-elles équivalentes par découpage et recollement ?
 - Oui pour les polygones dans le plan !
 - Non dans l'espace à partir de la dimension 3.

Géométrie de collège

- La diagonale d'un parallélogramme $ABCD$ le partage en deux triangles de même aire.
- Si M est sur CD , l'aire de AMB est la moitié de celle de $ABCD$.
- (Lemme du trapèze) La médiane partage un triangle en deux triangles de même aire.

Théorème de Thalès

- Si $(AD) \parallel (BC)$, ABC et DBC ont même aire.
- (Proportion) Si $(BC) = (B'C')$, alors $\text{aire}(ABC) / \text{aire}(AB'C') = BC / B'C'$.
- On en déduit le théorème de Thalès.
- (Chevron) Si (AM) coupe (BC) en A' , alors $\text{aire}(AMB) / \text{aire}(AMC) = A'B / A'C$.
- On en déduit la concourance des médianes, les théorèmes de Céva & de Ménélaus etc.

Polygones et rectangles

- On découpe un polygone en triangles.
- On transforme un triangle en parallélogramme.
- On peut supposer une longueur rationnelle, et même entière, et même égale à 1.
- On transforme alors ce parallélogramme en rectangle.
- Donc un polygone est équivalent, par puzzle, à un rectangle dont l'un des côtés est 1.

Invariant de Dehn

- Dans l'espace c'est différent : par exemple un cube et un tétraèdre de même volume ne sont pas équivalents par puzzle.
- Il faut un invariant supplémentaire : l'invariant de Dehn (1965).
- Dans l'espace il y a d'autres paradoxes comme Hausdorff-Banach-Tarski (1924).
- Mais dans le plan on peut réaliser la quadrature du cercle (Laczkovich, 1990) !

Faire disparaître des segments !

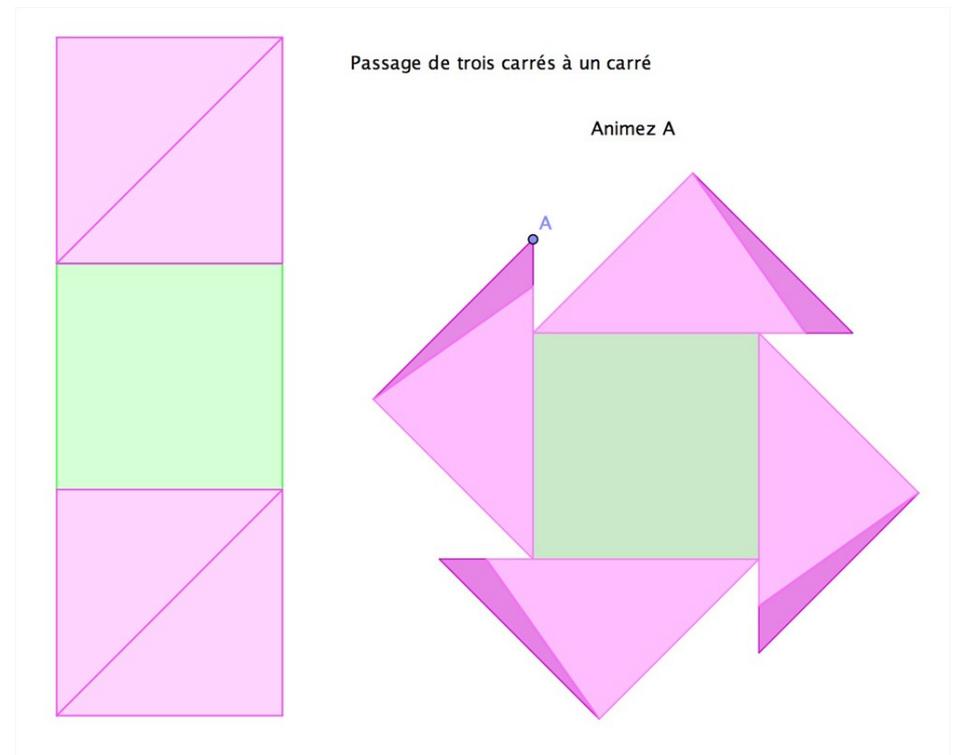
- On peut découper un disque D de rayon r et un segment I (disjoint de D) de longueur strictement inférieure à r de sorte qu'en recollant on retrouve D et I a disparu.
- Démonstration ? N et N^* sont en bijection ... et on prend les transformés d'un morceau de rayon de D de même longueur que I ainsi que ses images par rotation d'angle non commensurable à π .

Notion d'aire en terminale

- Sommes de Riemann
 - Définir l'aire ou l'intégrale ?
 - Calculer l'aire ou l'intégrale ?
 - Approcher les aires ou les intégrales !
 - Modéliser des situations physiques.
- Existence et calcul ?
 - L'axiomatique, oui, mais la construction ?
 - Additivité, invariance par isométrie, homogénéité !
 - Théorème fondamental de Newton-Leibniz.

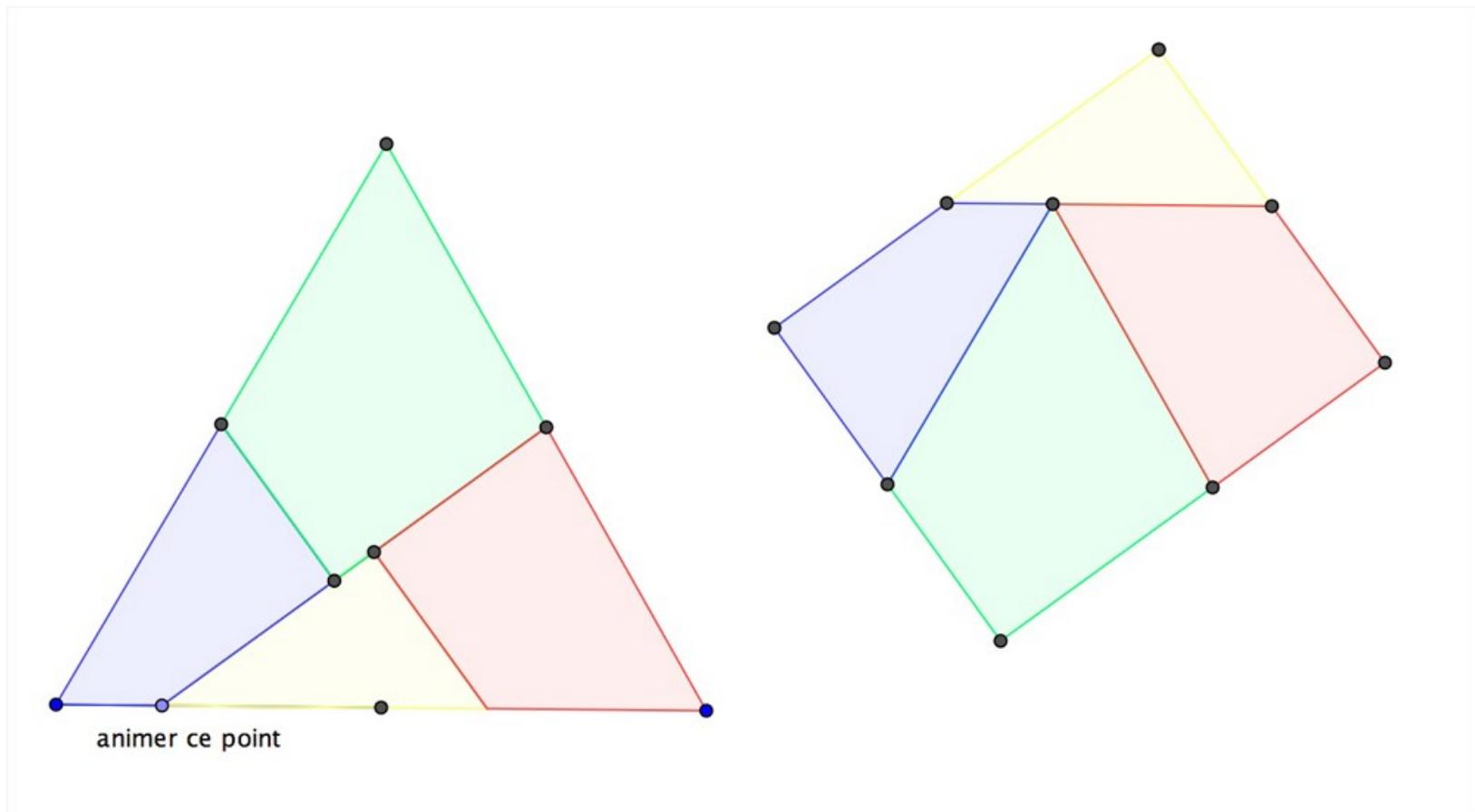
Découper des carrés

- On se donne un carré. Produire un puzzle pour le transformer en deux carrés de même aire (c'est facile), en trois carrés de même aire (c'est plus difficile, il y a notamment la méthode d'Abul-Wafa).



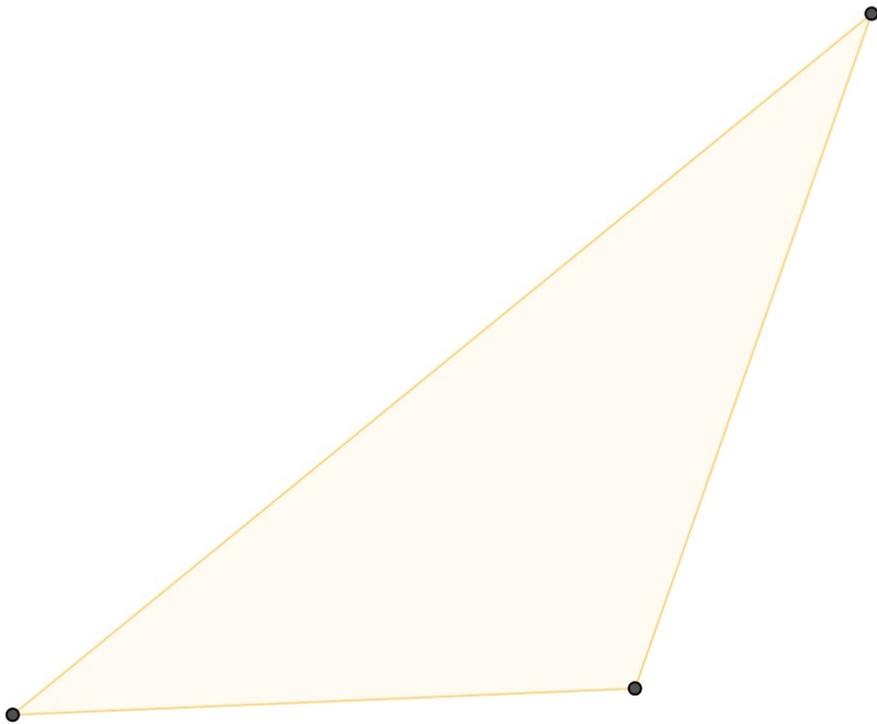
Découper un triangle

- On se donne un triangle équilatéral : produire un puzzle qui le transforme en un carré (c'est le célèbre découpage de Dudeney).

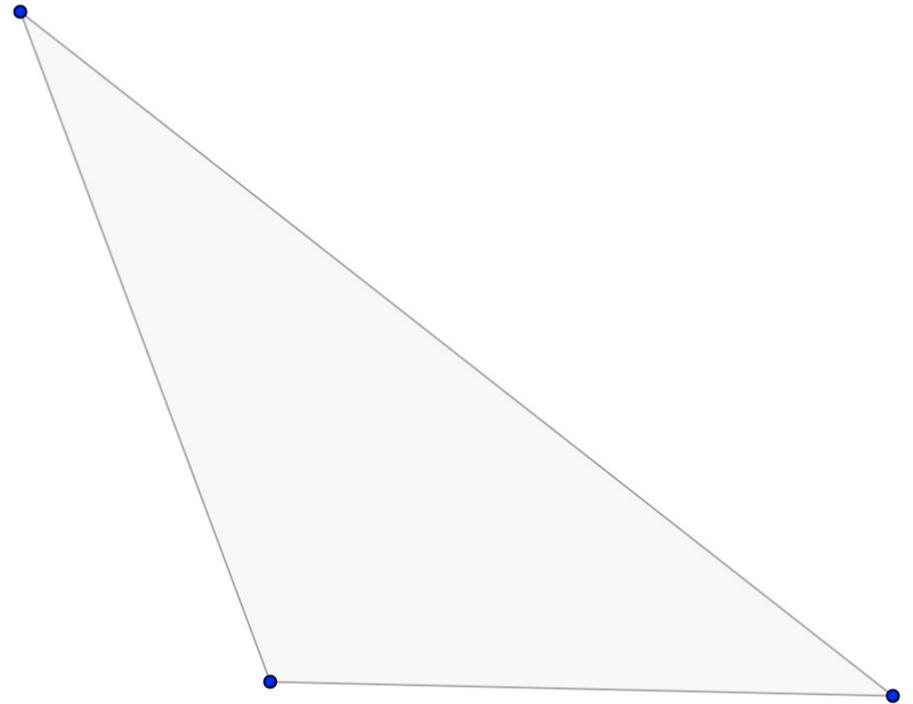


Problème du pâtissier

Le problème du pâtissier



La tarte



Le moule

Quelques références

- Daniel Perrin (www.math.u-psud.fr/~perrin)
 - Aires et volumes
 - Aires, intégrales et primitives
 - <http://images.math.cnrs.fr/Aires-et-volumes-decoupage-et.html>
- Accromath (<http://accromath.uqam.ca>)
 - Formule de Pick (Eté-Automne 2010)
 - Pavages, bulles ... (Hiver-Printemps 2010)
 - Des ponts d'Euler à la grippe aviaire (2009)

Quelques références

- Master de didactique des disciplines (université Paris 7, www.irem.univ-paris-diderot.fr)
 - Feux de forêt (www.irem.univ-paris-diderot.fr/sections/groupe_modelisation)
 - Réseau téléphonique (non accessible en ligne)
- Ian Stewart
 - Mon cabinet de curiosités mathématiques
 - La chasse aux trésors mathématiques
 - Visions géométriques ...

Des sites auxquels je participe

- Images des maths : images.math.cnrs.fr
- Mon site professionnel : <http://www.mathom.fr>
- <http://www.mathom.fr/mathom/FeteDeLaScience/FS2008/index.html>
- <http://www.mathom.fr/mathom/FeteDeLaScience/FS2008/references.html>