

Exercices traités en cours avant de donner le problème

Appariement aléatoire en génétique

On se place dans les cas simples où un gène peut prendre dans une population deux formes (allèles) A et a. On admet que la formation des couples se fait au hasard (on dit qu'il y a appariement aléatoire) et que chaque enfant d'une génération hérite, lors de sa naissance, d'un allèle de chaque parent, chacun d'eux étant choisi au hasard.

Un individu peut donc présenter l'un des trois génotypes suivants AA, Aa , aa

EX1 Soit une population dont les proportions respectives des allèles A et a sont p et q avec $p + q = 1$ ($0 < p < 1$) . Démontrer que le génotype d'un individu peut se modéliser par la loi de probabilité suivante

Génotype	AA	Aa	aa
Probabilité	p^2	$2pq$	q^2

EX2 Inversement ,on observe dans une population que les fréquences des trois génotypes AA, Aa, aa sont respectivement u, v et w ($u + v + w = 1$) Retrouver la loi de probabilité des allèles

Allèle	A	a
Probabilité		

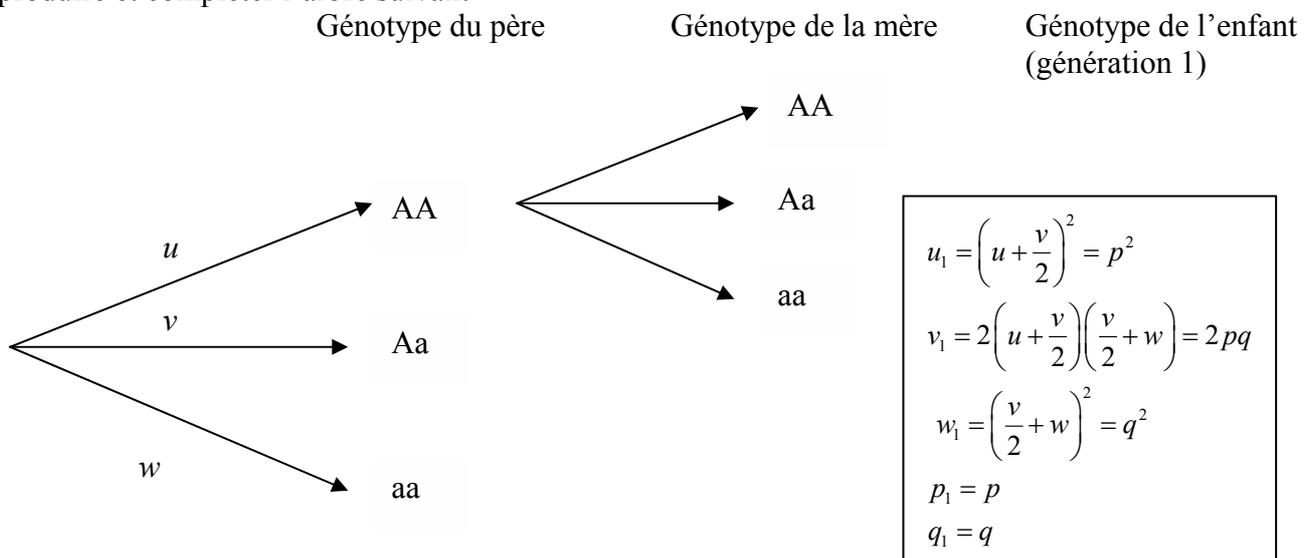
EX3 On se propose d'étudier l'évolution des fréquences des génotypes A et a au cours des générations, sous l'hypothèse d'appariement aléatoire dans une population idéale

Considérons une population (génération 0) dont les proportions respectives des génotypes AA, Aa, et aa sont u, v, w et les fréquences respectives des allèles A et a sont p et q

Nous proposons de trouver comment évoluent u, v, w, p, q d'une génération à l'autre .On note u_n, v_n, w_n, p_n, q_n les fréquences à la génération n . On a donc $u_0 = u, v_0 = v, w_0 = w, p_0 = p$ et $q_0 = q$

On suppose que le mariage est aléatoire : le partenaire fait son choix sans tenir compte de son propre génotype. C'est-à-dire la probabilité d'épouser tel partenaire est indépendante de son génotype

Reproduire et compléter l'arbre suivant



La loi de Hardy-Weinberg (1908) établie par un mathématicien anglais Hardy et un biologiste allemand Weinberg

Exercice 4

Chez l'homme, le gène a est récessif par rapport au gène A de la pigmentation de la peau. Des recherches montrent que la fréquence relative de l'albinisme aa vaut $0,00005$.

Quelle est la fréquence relative des hétérozygotes Aa , porteurs du caractère d'albinisme ?

Exercice 5

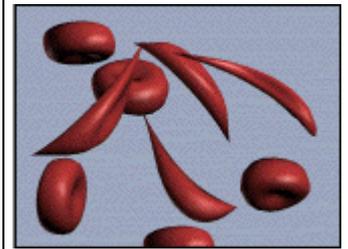
La mucoviscidose est une maladie qui frappe un **enfant sur 2500**. L'étude de sa transmission a montré qu'elle est due à l'état homozygote d'un certain gène que nous désignerons par m ; les individus hétérozygotes Nm où N désigne le gène normal sont indemnes; il est même impossible de détecter chez eux le gène délétère, totalement camouflé par le gène normal.

Quelle est la fréquence de l'allèle pathogène et celle des porteurs sains ?

On se propose d'étudier l'évolution des fréquences des gènes d'une génération à une autre

L'anémie falciforme est une très grave maladie génétique, souvent mortelle, due à la présence chez un individu de deux exemplaires d'un gène mutant, chacun hérité d'un parent. Les personnes qui portent un gène mutant et un gène normal, sont statistiquement plus résistantes au paludisme que les individus sans gène mutant. Ainsi en Afrique et en Asie où sévit une forme grave de paludisme, ces personnes ont plus de chances que les autres d'avoir une descendance nombreuse. La sélection naturelle qui les favorise est de ce fait responsable du maintien du gène dans les populations et de la permanence de l'anémie falciforme. L'anémie falciforme peut atteindre jusqu'à 4 % des individus de certaines populations vivant dans des régions d'Afrique et d'Asie où sévit une forme grave de paludisme, la "fièvre tierce maligne"

<http://cimnts.mnhn.fr/evolution>



www.ac-bordeaux.fr

Partie A : Elaboration d'un modèle

On se place dans les cas simples où un gène peut prendre dans une population deux formes (allèles) A et a de fréquence p et q ($p + q = 1$)

On admet que la formation des couples se fait au hasard (on dit qu'il y a appariement aléatoire) et que chaque enfant d'une génération hérite, lors de sa naissance, d'un allèle de chaque parent, chacun d'eux étant choisi au hasard .Un individu peut donc présenter l'un des trois génotypes suivants AA, Aa , aa avec des fréquences respectives p^2 , $2pq$, q^2

On étudie le cas d'un gène pour lequel **les individus dont le génotype est aa ne peuvent pas se reproduire et pour lequel t % d'individus dont le génotype est AA et s % d'individus dont le génotype est Aa ont pu se reproduire**

On désigne par AA l'évènement indiquant qu'un individu a un génotype AA , de même pour Aa et aa. Pour tout entier naturel n non nul, p_n et q_n comme les fréquences respectives des allèles A et a à la n ème génération .

On définit une probabilité sur la génération n par $P(AA) = p_n^2$, $P(Aa) = 2p_nq_n$ et $P(aa) = q_n^2$

- 1) Calculer la probabilité $P(R_n)$ qu'un individu de la n ème génération participe à la reproduction de la génération suivante
- 2) Pour tout n entier naturel non nul, p_{n+1} est la probabilité qu'un enfant naisse à la génération $n+1$ porteur du gène A sachant que ses parents font partie de la génération n ayant pu se reproduire

Vérifier que
$$p_{n+1} = \frac{tp_n + sq_n}{tp_n + 2sq_n}$$

Premier exemple :

On pose $t = s$ c'est-à-dire qu'autant d'individus de génotype AA que de génotype Aa ont pu se reproduire

Vérifier que, dans ce cas, pour tout entier naturel non nul n , $p_{n+1} = \frac{1}{2 - p_n}$.

Deuxième exemple :

On pose $t = rs$ avec $0 < r < 1$

Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n , $p_{n+1} = \frac{rp_n + q_n}{rp_n + 2q_n}$ et que $p_{n+1} = \frac{(r-1)p_n + 1}{(r-2)p_n + 2}$.

En conclusion :

Soit les fonctions numériques f_r définies sur $[0,1]$ par $f_r(x) = \frac{(r-1)x + 1}{(r-2)x + 2}$ où r appartient à $]0,1[$.

La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où p_n est la fréquence de l'allèle A à la génération n obéit à la relation $p_{n+1} = f_r(p_n)$

PARTIE B : Etude de la suite (p_n) dans les deux exemples

Question 1 : Etude du premier exemple

Supposons que $r = 1$ et $0 < p_0 < 1$, premier exemple de la partie A, on a alors,

pour tout entier naturel non nul n , $p_{n+1} = \frac{1}{2 - p_n}$

1. Etude de la fonction f_1 :

Le plan, étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , tracer la courbe (H) de la fonction f_1 définie sur $[0, 1]$ par $f_1(x) = \frac{1}{2-x}$, ainsi que la droite D d'équation $y = x$.

Etudier la position relative de (H) et de (D)

2. Etude de la convergence de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p_n \leq 1$ et que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

2.b. En déduire que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite. Interpréter ce résultat en termes biologiques

2.c. On pourrait penser que l'anémie falciforme humaine entre dans le modèle étudié ci-dessus. Pourquoi n'en est-il rien en fait ?

Question 2 : Etude du deuxième exemple :

Supposons $0 < r < 1$ et $0 < p_0 < 1$

1. Etude de la fonction f_r

Le plan, étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a tracé quelques courbes (H_r) représentant les fonctions f_r définies sur $[0, 1]$ par $f_r(x) = \frac{(r-1)x+1}{(r-2)x+2}$, ainsi que la droite D d'équation $y = x$.

1.a. Etudier les variations des fonctions f_r sur $[0, 1]$

1.b. Calculer les abscisses des points d'intersection de (H_r) et de (D)

1.c. En utilisant la position relative de (H_r) et de (D), démontrer que si $0 \leq x \leq \frac{1}{2-r}$ alors $f(x) \geq x$

et que si $\frac{1}{2-r} \leq x \leq 1$ alors $f(x) \leq x$

2. Etude de la convergence de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Utiliser une courbe (H_r) pour faire vos constructions. Vous pouvez refaire des courbes en utilisant un logiciel (Géoplan par exemple qui est téléchargeable sur le site du lycée)

2.a. Choisir une valeur de p_0 comprise entre 0 et $\frac{1}{2-r}$. Construire graphiquement les premiers termes de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et

2.b. Démontrer que si $0 \leq p_0 \leq \frac{1}{2-r}$, la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et que, pour tout entier n , $0 \leq p_n \leq \frac{1}{2-r}$

2.c. Choisir une valeur de p_0 comprise entre $\frac{1}{2-r}$ et 1. Construire graphiquement les premiers termes de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2.d. Démontrer que si $\frac{1}{2-r} \leq p_0 \leq 1$ la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et que pour tout entier n , $\frac{1}{2-r} \leq p_n \leq p_0$

2.e. En déduire que, pour toute valeur de p_0 $0 < p_0 < 1$, la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite dépendant de r et non de p_0

2.f. Ce modèle peut-il mieux convenir à comprendre l'anémie falciforme ? N'hésitez pas à utiliser vos connaissances en SVT

