Analyse numérique avec Géoplan : une présentation de "la" suite logistique

(modélisation démographique inventée par le mathématicien Pierre François Verlhust en 1838 et réexplorée à l'aide d'une simple calculatrice par le physicien Feigenbaum dans les années 1970)

Ce document nécessite que les contrôles ActiveX de l'AID- CREEM soient installés sur votre ordinateur.
Cliquez ici pour savoir comment les installer

Soit a un paramètre dans [0,4]. On considère sur [0,1] les fonctions polynomiales de degré deux qui à x associent

$$f(x) = a(1- x)x$$

Pour X_0 Î [0,1], on note (X_p) la suite définie par $X_{p+1} = f(X_p) = f^{p+1}(X_0)$ pour tout p entier.

NB: f^n (x) désigne ici l'**itéré** n$^{\text{ième}}$ de x par f : f^n (x) = $f(f(...f(x)...))$.

Pour tout a dans [0,4], $f(0) = f(1) = 0$; il est de plus élémentaire de démontrer que f ([0,1]) Ì [0,1] (propriété fondamentale que l'on perd si a > 4) et que f ( ] - ¥, 0[U] 1 , +¥[ ) Ì] - ¥, 0[. L'intervalle compact [0,1] contenant tous les termes de la suite (X_p), on peut extraire de cette suite des suites convergentes (Bolzano-Weierstrass). En prospectant quelque possibilité d'extractions effectives, nous allons constater des phénomènes remarquables, qui font intervenir la suite des fonctions (f^{2n}). Les quelques propriétés déjà énoncées ont pour conséquences que tous les points fixes d'une itérée f^k sont dans [0,1] et que tous les changements de variations de f^k ont lieu dans [0,1].

La **première figure pour observer...** On constate par un affichage escalier/colimaçon standard que pour a fixé, et pour X_0 dans le "bassin d'attraction" (voir définition en Annexe), la suite semble "souvent" se stabiliser sur un unique cycle asymptotique. Il sera donc simple d'extraire de (X_p) des suites convergentes par une fonction d'indexation explicite. Mais il y a plus étonnant...	**...et pour tester des conjectures** Plus le paramètre positif a est grand, plus le cycle asymptotique de la suite semble long. Une condition nécessaire pour que la suite admette un cycle d'ordre n est que f^n admette un point fixe attractif. Mais cette condition est-elle suffisante ? En manipulant les variables de la figure 1, tentez de mettre en défaut la réciproque.

Un algorithme d'analyse numérique permet d'évaluer, lorsqu'il existe, le plus petit point fixe attractif non nul de f^n , que l'on baptise x_{0n} ; si l'algorithme ne permet pas d'en détecter, le bandeau de la **figure 1** affiche une astérisque *.
Cet algorithme est détaillé dans les commentaires de la **figure 1** (clic sur le cadre de la figure, puis touche **F3**)
Pour changer la valeur de a : utilisez la souris pour déplacer le curseur à droite ; lorsque vous pilotez a , observez les conditions d'existence/non existence de points fixes attractifs, et faites le lien avec les pentes observables (Î [-1,1] ou non). Pour piloter dans la **figure 1** l'indice d'arrêt d'affichage de la suite : **touche P** du clavier puis **flèches** ; pour changer la valeur initiale de la suite, utilisez la souris; il peut être intéressant, afin d'observer plus clairement les cycles de longueur k éventuels, de faire coïncider la valeur initiale X(0) avec x_{01}(**touche 1** du pavé numérique), avec x_{02} (**touche 2**), x_{03} (**touche 3**), x_{04} (**touche 4**), ou avec x_{08} (**touche 8**)
Pour faire afficher un tableau de valeurs des suites extraites (X_p) , (X_{2p}) , (X_{4p}) , (X_{8p}) et (X_{3p}) : **touche T**.

figure 1

La **figure 2** est le **diagramme de Feigenbaum**, qui met en évidence , disons sur l'intervalle [0; 3.55], le processus de dédoublements en cascade des valeurs d'adhérence; a est en abscisse et les valeurs d'adhérence de la suite (X_n) en ordonnée. Au delà de 3.55, c'est surtout grâce aux rares "zones blanches" que l'on peut détecter de nouveaux cycles. Méthode pour approcher des valeurs d'adhérence: clic sur le cadre de la figure 2, puis touche **F3**.

La **figure 3** permet de voir le comportement des premières fonctions de la suite (f^{2n}) en fonction de a. Comme f^{2n} est un polynôme de degré 2^{2n} , il devient illusoire, pour n>1, de tenter d'évaluer tous les points fixes attractifs et les points de discontinuité par des méthodes purement algébriques. On "entrevoit" le chaos lorsque a se rapproche de 4; inversement, comment se comporte la suite lorsque apparaît une fonction en créneau(x) ?

Soit la fonction L, de [0; 4] dans R U {+¥} qui à a associe le nombre de valeurs d'adhérences de la suite logistique. En toute rigueur, L est fonction de deux variables, dont la seconde est X_0 ; nous renonçons à cette rigueur pour alléger l'écriture. La restriction de L à [0; 3.55] (borne supérieure approximative) semble être une fonction croissante en escalier, puisqu'elle associe alors à a la longueur du cycle asymptotique. Plus précisément, chaque nouvelle discontinuité semble doubler la longueur. Nous désignons par a_n, les points de discontinuité successifs.
En utilisant la relation

,

on peut démontrer que les points d’une même orbite sont **de même nature** (soit tous stables, soit tous instables...). Il est donc légitime de parler d’orbite stable ou instable, et par voie de conséquence, la suite admet un cycle d'ordre k **si et seulement si** f^k admet un point fixe attractif, ce que nous étions tentés de conjecturer après de multiples tests sur la figure 1. Lorsque a augmente depuis a_n et atteint a_{n+1}, les points fixes attractifs de la fonction f^{2n} deviennent simultanément solutions de $(f^{2n})'(x) = -1$. Autrement dit , ces points fixes deviennent simultanément répulsifs et ce faisant, chacun d'entre eux "donnent naissance" à deux nouveaux points jumeaux, qui sont des points fixes attractifs de $f^{2(n+1)}$. Juste après le $n^{ième}$ dédoublement, on a un cycle attractif d’ordre $k=2^n$, et (f^k)’vaut **1** pour chacun des points du cycle. Tout ceci est une extrapolation de nos observations. Expérimentalement, nous pouvons situer a_1 aux alentours de 3, a_2 aux alentours de 3.45..., a_3 aux alentours de 3.54...Mais l'extrapolation a ses limites; vous trouverez en bibliographie des justifications du fait qu'au voisinage de 3.57 et au delà, lorsque a s'approche de 4, le bel ordonnancement prévisible des dédoublements laisse place à un “**chaos**” imprévisible : on ne parvient plus à observer de cycles asymptotiques, ou seulement "par chance", car l'escalier/colimaçon “remplit” en général tout l'espace. Cependant, le diagramme de Feigenbaum fait apparaître des “**fenêtres**” au milieu du chaos, où l’on a de nouveau convergence: le diagramme rend repérable d'autres plages intéressantes pour a non étudiées ici, dont certaines valeurs expérimentales permettent de conjecturer, pour X_0 bien choisi : 3.62847 Î L^{-1}(6), 3.6625 Î L^{-1}(8), 3.742148 Î L^{-1}(10), 3.82842 Î L^{-1}(3), etc...
Il est possible de trouver algébriquement quelques résultats exacts qui valident notre étude numérique (cf. [Le] , [F]) :

.

Un résultat formel permet d'appréhender le caractère chaotique de la suite lorsque a = 4. Il est en effet possible de récupérer une expression **explicite** de la suite, moyennant un peu de trigonométrie élémentaire. Puisque X_0 Î [0,1], il existe un unique
t Î [0,p/2], tel que $X_0 = \sin^2(t)$; on vérifie alors que pour a = 4, $f(X_0) = f(\sin^2(t)) = 4 \sin^2(t) (1-\sin^2(t)) = \sin^2(2t)$

Quitte à poser , on obtient, par une récurrence immédiate, $X_n = \sin^2(2^n t)$. Cette formule a un intérêt théorique majeur, celui de démontrer l'hypersensibilité aux conditions initiales.
L'analyse numérique doit donc renoncer à traiter de manière fiable le cas a = 4.

<u>Digression:</u> Dans la **figure 3**, pour a = 2, on constate que la suite tend vers la fonction constamment égale à 0.5 sur]0,1[. Par le biais de cette suite, on peut donner une version plus forte du théorème de Weierstrass, qui affirme que toute fonction numérique continue sur un compact peut être approchée uniformément par un suite de polynômes de **R**[X]. On peut démontrer que toute fonction numérique continue sur un compact peut être approchée uniformément par un suite de polynômes de **Z**[X].

Détail des diverses notions analytiques qui émergent avec ce problème:

¨ **a Î [0,1[= [**a_0 **,**a_1**[:** le seul point fixe de f sur [0,1] est 0, et il est **attractif**. En effet on a $f'(0) = a < 1$

¨ **a =** a_1 **=1**: 0 est quasi-stable. (X_n) converge encore, mais de façon “lente” : $X_n \sim 1/n$

¨ **a Î]1,3[=]**a_1 **,**a_2**[:** On a deux points fixes : 0 qui est **répulsif** car $f'(0) = a$ et $l(a) = 1-1/a$ qui est **attractif** puisque $f'(l(a)) = 2-a$

¨ **a = 2:** On a $f'(l(2)) = 0$: on dit alors que $l(2) = 1/2$ est un point fixe **hyperstable**: ceci correspond également au palier identifié dans la figure 3. Le bassin d'attraction est maximal, puisqu'il s'étend sur tout l'intervalle ouvert] 0 ; 1 [. Cette figure 3 permet de repérer les cycles hyperstables suivants : il n'y plus unicité du palier, mais fonctions qui à la limite sont discontinues et ne prennent plus que deux valeurs, pour présenter des créneaux d'autant plus resserrés que l'on est proche des bornes 0 ou 1. On pourra par exemple visualiser un bassin d'attraction presque maximal pour a = 3.854629, pour une longueur de cycle importante.

· Dans le cas habituel d'un point fixe x vérifiant $0<|f'(x)|<1$, il existe alors K>0 tel que

$|X_n-x| \sim K\,|f'(x)|^n$: on a **convergence géométrique**.

· Si maintenant x est **hyperstable** (ie $f'(x) = 0$), on peut alors obtenir K>0 et dÎ]0,1[tels que $|X_n-x| \sim$ K d^(2^n) : la convergence est très rapide.
Ici on a même l'expression des termes de la suite (X_n) pour tout X_0 dans [0,1], X_n = (1-(1-2X_0)^(2^n))/2 .

¨ **a = 3 =** a_2: l(a) = 2/3 est quasi-stable. (X_n) converge, mais lentement: $X_n-2/3 \sim \pm (-1)^n/(3n)$

¨ **a Î]**a_1 **,**a_2**[:** les points fixes 0 et l sont répulsifs. Par contre, on a un **cycle attracteur d'ordre 2** :

Entre a_1 et a_2 , on a hyperstabilité pour , soit environ 3.236, et

la figure 3 met alors en évidence une fonction dont les créneaux se resserrent d'autant plus qu'on est proche des bornes 0 ou 1.

¨ **a = 4** : il y a alors hypersensibilité aux conditions initiales et, en conséquence, horizon prédictif très court.

<u>Annexe</u> : Définitions

- x est un **point fixe** d'une fonction *h* si et seulement si $h(x) = x$

- Un point fixe x de *h* est dit **stable, quasi stable ou instable** selon que $|h'(x)|$ est inférieur, égal ou supérieur à 1. Si x est stable, alors il est **attractif**: il existe un voisinage V de x tel que "x'ÎV, f^n(x') ® x lorsque n®+¥. Si x est instable, alors il est **répulsif** : il existe un voisinage V de x dont les points distincts de x "sortent" de ce voisinage lorsqu'on les itère par *f*.

- Un point x est dit **périodique** de période première n si $f^n(x) = x$ et "kÎ{1,..,n-1}, f^k (x)¹x.

- Pour x périodique de période n, l'**orbite** (ou le **cycle**) O(x) est l'ensemble des itérés de x. On a Card O(x) = n
et O(x) = {x, *f*(x),..., f^{n-1} (x)}. On parle aussi de point périodique stable, quasi-stable, instable: un point périodique de *f* de période n est un point fixe de f^n.

- Le **bassin d'attraction** $W_s(x)$ d'un point périodique x de période k est l'ensemble des points x' tels que f^{nk}(x') ® x lorsque n ® +¥. Le bassin d'attraction d'un cycle tout entier est l'union des différents bassins des points du cycle.

- Pour une définition rigoureuse du chaos, et d'autres développements intéressants, on recommande la lecture de [Le] .

Bibliographie

[Le] **Letouzey P** , *Sujet de TIPE,* 1997, http://www.lri.fr/~letouzey/work.fr.html

[Ca-Da] **Cadon C.-A**, **Davignon F**, *Sujet de TIPE,* 1997, http://www.kad.fr.st/Tipe

[Fe] **Feigenbaum M**, *Universal behavior in nonlinear systems*, Los Alamos Science,1980

[D] **Durand R**, *Problèmes de mathématiques résolus avec Maple et Mathematica*, Ellipses, 1998

[F] **Ferrard J.-M**, *Maths et Maple*, Dunod, 1998