

TIPE SUITE LOGISTIQUE & ENSEMBLES DE JULIA

Je vous livre mon dossier de TIPE 1998. Le principe du TIPE (Travail Individuel Personnalisé Encadré) est de faire faire un peu de recherche de documents aux élèves de Math. Spé, de savoir rédiger un rapport et savoir faire un exposé oral. En Mathématiques, le thème de l'année était les systèmes dynamiques.

Je tiens à préciser que la présence de ce TIPE sur Internet est à titre documentatif, ce TIPE ne doit pas être recopié de A à Z pour votre éventuel dossier (et puis de toute façon j'ai détruit la fiche synoptique, na !). Pour plus d'informations sur les TIPE, je vous conseille d'aller voir [là-bas](#) si j'y suis.

Pour les illustrations, le texte contient des liens y référant. Il ne me reste plus qu'à vous souhaiter bonne lecture.

INTRODUCTION

Le but de ce TIPE est d'étudier des suites définies par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ f \in \mathbb{R}_2[X] \text{ ou } f \in \mathbb{C}_2[X] \end{cases}$$

Dans un premier temps, on limitera l'étude à celle des suites à termes réels (Suite Logistique). Dans un second temps, on travaillera avec des suites à termes complexes (Ensembles de Julia).

Cette étude permettra de dégager un certain nombre de propriétés propres aux systèmes dynamiques discrets.

I SUITE LOGISTIQUE

I.A Présentation

Dans les années 1970, plusieurs scientifiques se sont intéressés à la suite dite logistique :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 &\in [0,1] \\ f(x) &= k \cdot x \cdot (1 - x), \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cette suite est un modèle simplifié de population : En effet, pour x petit, c'est à dire une population faible, la croissance est exponentielle. Pour x plus grand, la population est plus importante pour un même espace et une même nourriture, elle aura donc tendance à décroître.

Le biologiste **Robert May** a étudié cette suite en 1976, tandis que le physicien **Feigenbaum** (en 1975) et les mathématiciens **James A. Yorke** (en 1975) et **A.N. Sarkowski** (en 1964) trouvèrent chacun de leur côté des propriétés applicables à cette étude.

I.B Étude analytique

I.B.1 Généralités

I.B.1.a Domaine d'étude

On se limitera à l'étude de la suite pour k compris entre 0 et 4, en effet, pour cet intervalle de valeurs, les termes successifs de la suite restent compris entre 0 et 1:

En effet : $\sup_{x \in [0;1]} (f(x)) = \frac{k}{4}$, donc : $f([0;1]) \subset [0;1] \forall k \in [0;4]$.

$$\inf_{x \in [0;1]} (f(x)) = 0$$

I.B.1.b Définitions

- Une **orbite** de f est l'ensemble des itérés de f sur un x donné : $\{x, f(x), \dots, f^{[p]}(x), \dots\}$
- On dira que f possède un **cycle d'ordre p ou p - cycle** $\{x_1; x_2; \dots; x_p\}$ lorsque :

$$\exists (x_1, p) \in [0;1] \times \mathbb{N} \text{ tq } \begin{cases} f^{[p]}(x_1) = x_1 \\ \forall i \in \mathbb{N} \text{ tq } 1 < i < p, x_i = f^{[i]}(x_1) \neq x_1 \end{cases}$$

- On dira que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers un cycle d'ordre p** , ou qu'un cycle est **attractif** quand f en admet un et que :

$$\forall i \in \mathbb{N} \ 1 < i < p, (u_{n,p+i})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}$$

I.B.1.c Théorèmes

- Pour les graphiques on prendra $\frac{1}{2}$ comme valeur de u_0 , pour être sûr que la suite converge vers le cycle attractif, selon le théorème de **Fatou** :

Si le polynôme $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ possède une orbite attractive, alors $\frac{-b}{2 \cdot a}$ est parmi les valeurs de départ pour lesquelles les valeurs de la suite parcourent cette orbite.

- Enfin, selon le sujet de l'**agrégation 1984** :

$\forall f: I \rightarrow I$, continue sur I fermé borné, si f ne possède pas de 2 - cycle, alors la suite

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ est convergente.}$$

I.B.2 Domaine de convergence

Si : $\exists x \in [0;1] \text{ tq } f(x) = x, |f'(x)| < 1$, alors la suite est convergente, du moins localement.

$$f(x) = x \Leftrightarrow -k \cdot x^2 + (k - 1) \cdot x = 0$$

On résout l'équation :

$$\Leftrightarrow x \cdot \left(x - \frac{k-1}{k} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{k-1}{k} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ u_n, \frac{k-1}{k} \right\}$$

Les deux valeurs possibles pour la limite de la suite sont donc : 0 et $\frac{k-1}{k}$.

I.B.2.a $k \in]0;1[$

On étudie les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
$$\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 1 \\ 0 \leq 1-u_n \leq 1 \Rightarrow u_{n+1} = k \cdot u_n \cdot (1-u_n) \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 1 \end{cases}$$

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée et décroissante, elle converge, et ce vers la seule valeur possible : 0 ([figure 1](#)).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0 \quad \forall u_0 \in]0;1[\\ \forall k \in]0;1[$$

I.B.2.b $k \in]1;3[$

On a alors $f'(0) = k > 1$, donc 0 cesse d'être limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sauf si u_0 est antécédent de 0, c'est à dire si :

$$\begin{cases} \exists x \text{ tq } 0 = k \cdot x \cdot (1-x) \Leftrightarrow x \in \{0;1\} \\ \text{il n'existe pas de } x \text{ tq } f'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow u_0 \in \{0;1\}$$

La seule limite possible si $u_0 \notin \{0;1\}$ est donc $\frac{k-1}{k}$. On a bien : $-1 \leq f'\left(\frac{k-1}{k}\right) = 2-k < 1$. $\frac{k-1}{k}$ est effectivement la limite pour tout u_0 , car la suite, étant bornée et n'ayant pas de 2-cycle possible (voir plus bas), converge ([figure 2](#)).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \frac{k-1}{k} \quad \forall u_0 \in]0;1[\\ \forall k \in]1;3[$$

I.B.3 Domaine des cycles et des comportements imprévisibles

Pour $k > 3$, on a alors : $f'\left(\frac{k-1}{k}\right) < -1$, donc, la suite n'a plus de limite, sauf si u_0 est antécédent de 0, ce qui a été vu plus haut, ou si u_0 est antécédent de $\frac{k-1}{k}$:

$$k \geq 3 \Rightarrow \frac{k-1}{k} \leq \frac{k}{4} \Rightarrow \frac{k-1}{k} \text{ a un antécédent par } f: x \text{ tq } 0 < x < \frac{k-1}{k}, \text{ qui aura lui aussi un antécédent...}$$

Il existe donc une infinité dénombrable d'antécédents de $\frac{k-1}{k}$, et si on prend u_0 parmi eux :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \frac{k-1}{k} \quad \forall k \in]3;4[$$

I.B.3.a $k \in]3; 1 + \sqrt{6}]$ -CYCLE d'ordre 2

On cherche si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ va tendre vers un cycle d'ordre 2, on résout donc l'équation :

$$\begin{cases} f \circ f(x) = x \\ f(x) \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k^3 \cdot x^4 + 2 \cdot k^3 \cdot x^3 - k^2 \cdot x^2 + (k^2 - 1) \cdot x = 0 \\ -k \cdot x^2 + (k - 1) \cdot x \neq 0 \end{cases}$$

On peut diviser la première équation par la deuxième :

$$-k^2 \cdot x^2 + (k^2 + k) \cdot x + (1 + k) = 0$$

$$\Delta = k^2 \cdot (k^2 - 2 \cdot k - 3) > 0 \quad \forall k \in]3; 4]$$

$$x = \frac{k + 1 \pm \sqrt{k^2 - 2 \cdot k - 3}}{2 \cdot k}$$

Comme : $-1 \leq (f \circ f)' \left(\frac{k + 1 \pm \sqrt{k^2 - 2 \cdot k - 3}}{2 \cdot k} \right) < 1 \quad \forall k \in]3; 1 + \sqrt{6}]$, le cycle

$\left\{ \frac{k + 1 + \sqrt{k^2 - 2 \cdot k - 3}}{2 \cdot k}, \frac{k + 1 - \sqrt{k^2 - 2 \cdot k - 3}}{2 \cdot k} \right\}$ est attractif, et comme $f \circ f$ n'admet pas de 2 - cycle (c'est

à dire que f n'admet pas de 4 - cycle), il est même attractif pour toutes les valeurs de u_0 différentes de celles citées plus haut, car ([figures 3](#) et [4](#)).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{u_n, u_{n+1}\} = \left\{ \frac{k + 1 + \sqrt{k^2 - 2 \cdot k - 3}}{2 \cdot k}, \frac{k + 1 - \sqrt{k^2 - 2 \cdot k - 3}}{2 \cdot k} \right\} \quad \forall k \in]3; 1 + \sqrt{6}]$$

I.B.3.b $k \in]1 + \sqrt{6}; 4]$

Le 2 - cycle cesse d'être attractif, car :

$$(f \circ f)' \left(\frac{k + 1 \pm \sqrt{k^2 - 2 \cdot k - 3}}{2 \cdot k} \right) < -1 \quad \forall k \in]1 + \sqrt{6}; 4]$$

On a alors, avec l'augmentation de k , un 4 - cycle comme limite ([figures 5](#) et [6](#)), puis un 8 - cycle, puis 16... Mais à un moment, il n'y a plus de cycle, le comportement de la suite semble imprévisible ([figure 7](#)). Puis, pour une certaine valeur de k , un 5 - cycle ([figures 8](#) et [9](#)) ou un 3 - cycle ([figures 10](#) et [11](#)), qui se dédouble ensuite en un 6 - cycle, puis un 12 - cycle, pour retourner à l'imprévisible ([figure 12](#)). Il est alors nécessaire d'étudier la suite d'une autre manière.

I.C Graphe de la suite logistique

Afin de mieux visualiser le comportement de la suite, en particulier pour $k > 3$, on construit un graphe.

I.C.1 Principe et construction

On porte en abscisse le paramètre k , et en ordonnée les u_n successifs à partir d'un certain rang. Ce graphe permet donc de voir le comportement limite de la suite.

Pour ce faire, on utilise un programme informatique, contenant une boucle faisant varier k de 0 à 4, contenant elle-même une autre boucle faisant varier n de 400 à 600. On trace alors le graphe point par point ([figures 13](#), [14](#) et [15](#)).

I.C.2 Observations et propriétés

I.C.2.a Dédoubléments successifs

On observe tout d'abord des dédoubléments successifs : lorsque k augmente, on passe d'un cycle d'ordre n à un cycle d'ordre $2n$, c'est une **bifurcation**. On constate que la longueur de validité de chaque cycle est décroissante. Ces cycles ne subsistent pas au-delà d'un point dit point d'accumulation.

I.C.2.b Comportement aléatoire

On ne peut plus déceler de périodicité dans le comportement de la suite, ce qui se traduit sur le graphique par une nuée de points, pour une valeur de k donnée. Pourtant, au sein de toute cette complexité, apparaissent des cycles attractifs.

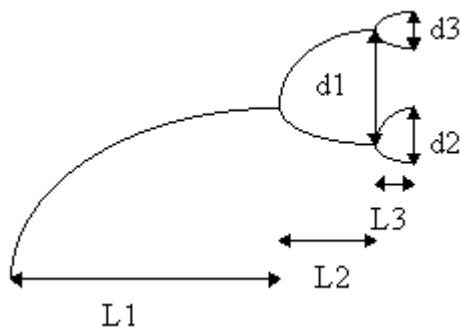
I.C.2.c Fenêtres de stabilité - ordre de Sarkowski

Le mathématicien russe Sarkowski a démontré en 1964 le théorème suivant :

Soit \prec une relation d'ordre dans \mathbb{N} tq $\forall (m;n) \text{ impairs}, (p;q) \in \mathbb{N}^2$
 $2^p \cdot m \prec 2^q \cdot n \Leftrightarrow m > n$
 $2^p \prec 2^q \Leftrightarrow p < q$
 Alors : $1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 7 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \prec \dots \prec 2 \cdot 7 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 3 \prec \dots \prec 7 \prec 5 \prec 3$
 Si une fonction f admet un cycle d'ordre n , elle admet tous ceux d'ordre $m \prec n$.

On peut conjecturer que les fenêtres de stabilité apparaissent dans l'ordre de Sarkowski. On en déduit que si, pour une valeur de k donnée, on observe d'un cycle d'ordre n , alors, tous les cycles d'ordre $\prec n$ existent de manière non attractive, et subsistent lorsque k augmente.

I.C.2.d Constantes de Feigenbaum - renormalisation



En 1975, le physicien Feigenbaum a remarqué que le motif général de la suite se répétait à chaque bifurcation, à un facteur d'échelle près. Il utilisa alors un procédé de **renormalisation** : il s'agit d'agrandir des parties de plus en plus petites du graphe, et de comparer ces grossissements au motif original. Lorsque le motif agrandi reproduit le premier motif, on parle alors d'**autosimilarité** : en agrandissant à l'infini, la structure générale se répète. Si globalement, les dédoubléments ne sont pas les mêmes, ils

gardent de mêmes rapports : La première constante intervient horizontalement : c'est la limite des rapports des longueurs d'existence de deux cycles successifs et sa valeur est d'environ :

$$\frac{L1}{L2} \approx \frac{L2}{L3} \approx 4,67.$$

Il a également constaté qu'un deuxième facteur intervient, verticalement cette fois-ci, le rapport

$$\frac{d1}{d2} \approx \frac{d2}{d3} \approx 2,5.$$

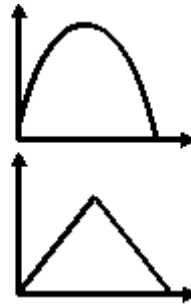
I.C.2.e Universalité

La même suite, mais avec f différente, du type bosse simple, présente les mêmes propriétés : graphes

similaires, mêmes bifurcations, même ordre d'apparition des fenêtres et facteurs d'échelle identiques.

Par exemple, pour :

$$f(x) = \frac{k}{4} \sin(\pi x)$$

$$f(x) = -\frac{k}{2} \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{k}{4}$$


Et ceci pour toute autre fonction du même type.

I.D Chaos

Pour $k=4$, on qualifie le comportement de la suite logistique de chaotique.

I.D.1 Généralités

I.D.1.a Définitions

Une fonction $\forall f: I \rightarrow I$ est **topologiquement transitive** quand :

$$\forall (U; V) \subset I^2 \text{ ouverts, } \exists (x, p) \in U \times \mathbb{N} \text{ tq } f^{[p]}(x) \in V$$

Dans une partie D d'un espace vectoriel normé, f montre une **dépendance sensible aux conditions initiales** lorsque :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in D \text{ tq } \forall \varepsilon > 0, \exists (y, p) \in D \times \mathbb{N} \text{ tq } \begin{cases} \|x - y\| < \varepsilon \\ \|f^{[p]}(x) - f^{[p]}(y)\| > \delta \end{cases}$$

f définie sur D est **chaotique** lorsque :

- L'ensemble des points périodiques est dense dans D ;
- f est topologiquement transitive;
- f montre une dépendance sensible aux conditions initiales.

I.D.1.b Théorème

Soit f définie et à valeurs dans D . f est topologiquement transitive, et l'ensemble des points périodiques de f est dense dans D .

Si D contient un nombre infini d'éléments, alors, f montre une dépendance sensible aux conditions initiales.

I.D.2 Cas de la suite logistique pour $k=4$

Effectuons un changement de variable :

$$x = \sin^2(\pi \alpha), \alpha \in \mathbb{R}, \text{ alors, } f(x) = 4 \cdot \sin^2(\pi \alpha) \cdot \cos^2(\pi \alpha) = \sin^2(2 \cdot \pi \alpha).$$

Par récurrence : $f^{[n]}(x) = \sin^2(2^n \cdot \pi \alpha)$. On se ramène à l'étude de la partie fractionnaire de α (le sinus étant défini modulo 2π). Si l'on écrit α en binaire, itérer f , c'est décaler la virgule de α :
 $0,1011011\dots \rightarrow 0,011011\dots$

On montre alors facilement que f est topologiquement transitive, et que l'ensemble de ses orbites est dense dans $[0;1]$. Comme $[0;1]$ contient un nombre infini d'éléments, elle est de plus sensible aux conditions initiales :

f et la suite logistique sont donc chaotiques pour $k=4$

Cette propriété veut en particulier dire qu'il est totalement impossible de dire quelle est la valeur d'une n ème itérée de f , à moins de calculer toutes les précédentes. Si il existe une infinité de valeurs de u_0 pour lesquelles il y a un cycle, il en existe une autre infinité pour lesquelles la structure des itérées est indescriptible.

II ENSEMBLES DE JULIA

II.A Présentation

Ces ensembles portent le nom du mathématicien français Gaston Julia (1893-1978). L'étude de ces ensembles remonte tout au plus à 20 ans. Les principaux chercheurs ayant travaillé sur ce sujet sont Adrien Douady et Benoît Mandelbrot. Les ensembles de Julia se visualisent exclusivement grâce à l'outil informatique, c'est pourquoi les recherches les concernant n'aboutissent que récemment.

II.A.1 Equation

pour $c \in \mathbb{C}$

On considère la fonction : $f_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto z^2 + c$

On appelle **ensemble de Julia rempli** l'ensemble des points du plan complexe tels que l'ensemble de leurs itérés successifs par f_c soit borné :

$$z \in K_c \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } |f_c^{[n]}(z)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

L'**ensemble de Julia** J_c est la frontière de l'ensemble de Julia rempli K_c .

L'étude des ensembles de Julia dans \mathbb{R} se ramène à celle de la suite logistique par **conjugaison topologique** (f et g conjugués topologiquement $\Leftrightarrow \exists h \text{ tq } f = h^{-1} \circ g \circ h$) :

$$f: x \rightarrow k \cdot x \cdot (1-x); \quad h: x \rightarrow \frac{-x}{k} + \frac{1}{2}$$

$$h^{-1}(x) = -k \cdot x + \frac{k}{2} \quad h^{-1} \circ f \circ h(x) = x^2 + \frac{k \cdot (2-k)}{4} = f_c(x) \text{ pour } c = \frac{k \cdot (2-k)}{4}$$

II.A.2 Méthodes de tracé

Il existe plusieurs façons de tracer les ensembles de Julia. Nous détaillerons les deux plus couramment utilisées.

II.A.2.a Méthode de l'antécédent

On prend un point du plan complexe appartenant à l'ensemble de Julia que l'on veut tracer (ou même un point quelconque). Dans les figures fournies, nous avons utilisé un point fixe (il en existe au moins un) :

$$z \text{ tq } f_c(z) = z^2 + c = z$$

On peut ensuite déterminer les antécédents successifs de ce point de départ :

$$z = \sqrt{f_c(z) - c} \text{ (en prenant note que le symbole } \sqrt{} \text{ est une racine d'un nombre complexe, que l'on multiplie au hasard par } \pm 1)$$

On trace sur l'écran d'un ordinateur ou d'une machine à calculer ces antécédents.

En prenant comme valeur initiale un point de K_c , on s'approche de J_c par l'intérieur. Dans le cas contraire, on s'en approche par l'extérieur.

Cette méthode est rapide, mais elle ne donne que l'ensemble de Julia (non-rempli), et cela d'une manière incomplète ([figures 16](#), [18](#) et [20](#), avec 4000 points tracés).

II.A.2.b Méthode du pixel

Cette méthode consiste à tester tous les points du plan complexe, ce qui est impossible formellement, mais en fait réalisable sur un écran, car un point a une dimension. On itère N fois f_c et si son module dépasse une valeur critique (2), il n'appartient pas à l'ensemble de Julia rempli. Sinon, on dessine ce point sur l'écran, et on passe au suivant :

$$\left(\forall n \leq N \left| f_c^{[n]}(z) \right| \leq 2 \right) \Rightarrow z \in K_c$$

Cette méthode est bien plus lente, mais elle permet d'avoir les détails de l'ensemble de Julia. Elle demande par contre de fixer judicieusement le nombre d'itérations ([figures 17](#), [19](#) et [21](#), avec 30 itérations).

II.B Propriétés

Les ensembles de Julia ont des propriétés fractales, dont celle d'autosimilarité, dont on a déjà parlé pour la Suite Logistique.

II.B.1 L'ensemble de Julia est invariant par f_c

$$\begin{cases} f_c(K_c) = K_c \\ f_c^{-1}(K_c) = K_c \end{cases}$$

II.B.2 Points fixes

Selon les valeurs de c , 2 points (1 point pour $c=1/4$) du plan sont fixes par f_c en tant que solutions de polynômes du second degré.

Trois cas se présentent, selon la valeur de $|f'_c(x)|$.

- Le point est **attractif**, $|f'_c(x)| < 1$: en prenant un point de départ dans un voisinage du point fixe, la suite des itérés tend vers ce point;

- Le point est **répulsif**, $|f'_c(x)| > 1$: en prenant un point de départ dans un voisinage du point fixe, la suite des itérés s'éloigne de ce point;
- Le point est **indifférent** (i.e. ni attractif ni répulsif), $|f'_c(x)| = 1$: et si dans n'importe lequel de ses voisinages, il y a des points qui convergent vers lui et d'autres qui divergent, il est dit **parabolique**.

II.B.3 Connexité

II.B.3.a Cas où K_c est connexe

On dit que K_c est **connexe** lorsqu'il est d'un seul tenant : $\forall O \subset K_c$ O ouvert et fermé, $\begin{cases} O = K_c \\ \text{ou } O = \emptyset \end{cases}$

$$0 \in K_c \Leftrightarrow K_c \text{ est connexe}$$

II.B.3.b Cas où K_c n'est pas connexe

Sinon, K_c est un **ensemble de Cantor** :

- K_c est **compact** (fermé et borné);
- K_c est **parfait** (il n'a aucun point isolé) : $\forall (z, \varepsilon) \in K_c \times \mathbb{R}^+ \exists z' \in K_c$ tq $|z' - z| \leq \varepsilon$
- K_c est **totalement discontinu** : il ne contient aucun connexe non réduit à un singleton.

Un exemple d'ensemble de Cantor dans \mathbb{R} est l'ensemble triadique :

Donc, dans ce cas : $J_c = K_c$ ([figures 3](#) et [38](#))

II.C Ensemble de Mandelbrot

On va alors s'intéresser aux valeurs de c pour lesquelles K_c est connexe.

II.C.1 Principe

On appelle ensemble de Mandelbrot l'ensemble de ces points. L'intérêt de cet ensemble semble d'abord être un simple recensement des valeurs de c pour lesquelles K_c est connexe.

II.C.2 Tracé

On trace l'ensemble de Mandelbrot avec la méthode du pixel ([figure 22](#)) appliquée pour c variable et z fixé à 0 (Si 0 appartient à l'ensemble de Julia associé à c , K_c est connexe). On obtient alors un ensemble qui a des propriétés communes avec les ensembles de Julia (dont celle d'autosimilarité).

L'ensemble de Mandelbrot est à première vue formé de composantes dites connexes reliées par des filaments. Il a été montré très récemment que cet ensemble est connexe.

II.C.3 Composantes connexes

Les composantes connexes de l'intérieur de K_c sont les parties ouvertes disjointes de l'ensemble de Mandelbrot. Les deux plus importantes sont exactement une cardioïde et un disque. Aucune autre n'a une forme géométrique simple (malgré les images trompeuses).

Au "centre" de chaque composante connexe se trouve une valeur de c pour laquelle l'ensemble de Julia correspondant possède un **cycle** contenant 0 (0 est cyclique par f_c).

II.C.4 Greffes

En considérant l'ensemble de Mandelbrot, on peut recopier la structure d'un ensemble de Julia dans un autre.

Par exemple, pour un ensemble de Julia possédant un cycle d'ordre 3 (le fameux lapin), on reporte la valeur de c correspondante vers la composante connexe centrée sur -1. On peut alors dire que l'on "greffe" le lapin dans $K-1$ (la [figure 25](#) dans la [figure 24](#) donne la [figure 26](#)). En effet, le motif du lapin se répète dans la structure de $K-1$. On peut également faire la greffe inverse (la [figure 24](#) dans la [figure 25](#) donne la [figure 27](#)).

II.C.5 Constante de Feigenbaum

Considérons l'axe réel de l'ensemble de Mandelbrot. Les composantes connexes apparaissent avec c décroissant comme les cycles pour la suite logistique avec k croissant. La suite des rapports des "largeurs" des composantes hyperboliques consécutives tend elle aussi vers la constante de Feigenbaum horizontale ([figure 42](#)).

II.D Fonction Potentiel

II.D.1 Vitesse de divergence

On veut savoir à quelle vitesse les points en dehors d'un ensemble de Julia donné divergent.

$$\text{On pose : } \begin{cases} z_n = f^{[n]}(z) \\ u_n = \frac{\ln(|z_n|)}{2^n} \end{cases} \text{ alors } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\left| 1 + \frac{c}{z_n^2} \right| \right) = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Donc : (u_n) converge, on montre alors que $G_c(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(|z|) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\left| 1 + \frac{c}{z_n^2} \right| \right)$

$$\text{On en déduit et on définit : } \begin{cases} |z_n| \sim \exp\{2^n G_c(z)\} \\ \rho_c(z) = \exp\{G_c(z)\} \end{cases}$$

On appelle alors **vitesse de divergence** $\rho_c(z)$. En effet, plus sa valeur est importante, plus vite la suite des itérés diverge à l'infini.

II.D.2 Potentiel

$$G_c \text{ est alors une fonction potentiel : } \begin{cases} G_c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ G_c(z) = 0 \quad \forall z \in K_c \\ G_c(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \ln(|z|) \\ \Delta G_c = 0 \end{cases}$$

On peut alors considérer un condensateur cylindrique dont l'armature interne serait un ensemble de Julia et dont le potentiel en volts serait G_c ([figure 40](#)).

Les lignes de champ d'un tel condensateur seraient alors bien plus faciles à déterminer que celles d'un condensateur à section polygonale ([figure 41](#)).

Cette page est créée et gérée par [Claude-André Cadon](#), qui est aussi l'auteur du texte en collaboration avec Franck Davignon. Dernière révision : 4 mai 2000.