TIPE Math 97 (Version 5 pages) Letouzey Pierre

La fonction logistique $f : x \mapsto rx(1-x)$

Quelques résultats sur les suites récurrentes associées $\begin{cases} x_0 & \in [0,1] \\ x_{n+1} & = f(x_n) \end{cases}$

1/ Pourquoi cette fonction ?

C'est dans le domaine de la démographie que l'on rencontre pour la première fois la fonction logistique f: à l'origine il s'agit d'un modèle d'évolution d'une population naturelle (d'où le nom de logistique), proposé par le mathématicien belge **Pierre-François Verhulst**
vers 1840. Ses idées de base:

- l'effectif N de la population ne peut dépasser un maximum N_m, et N_m-N s'interprète comme la « place libre » dans le milieu
- l'accroissement naturel $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ est alors proportionnel à la place libre: $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k(N_m - N)$. En

normalisant par $x=N/N_m$ et $r=kN_m$, on obtient **dx/dt = *f*(x)** (1)

Lorsqu'on résout cette équation différentielle, on trouve que $x \to 1$ pour $t \to +\infty$: l'effectif se stabilise à N_m, qui est donc une sorte d'effectif optimal. Ce modèle **continu** a son interêt, mais une convergence toute simple n'est pas passionnante...

Par contre lorsque l'on utilise f dans un modèle **discret**[1] du type $\mathbf{x_{n+1} = f(x_n)}$ (2), alors on voit apparaître toute une dynamique inattendue. Mitchell Feigenbaum (cf [Fe] dans la bibliographie), grâce à une calculatrice, vers 1970, découvre l'apparition du **chaos** dans ce système dynamique. Le modèle discret se révèle donc être plus riche que le modèle continu, et aussi plus réaliste: les biologistes observent souvent chez les animaux d'importantes variations d'effectifs d'une année sur l'autre (cf. [S] ch. 13).

Pour r dans[2] [0,4],et I=[0,1] on pose donc $f : \begin{matrix} I \to I \\ x \mapsto r\,x(1-x) \end{matrix}$

et pour $x_0 \in I$, on appelle (x_n) la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$ pour tout n.
(NB: $f^n(x)$ désigne ici l'**itéré** n-ième de x par f : $f^n(x) = f(f(...f(x)...)))$.
Pour les définitions et les notations, voir Annexe A.

---

[1] Au passage (2) n'est pas la forme discrète de (1): si $x_n = x(t_n)$ et $\tau = t_{n+1}-t_n$ alors (2) donne $x_{n+1} \approx x_n + \tau\, dx/dt \approx x_n + \tau f(x_n)$. Mais on itère encore un trinôme du 2nd degré et la conjugaison topologique nous assure qu'on aura une dynamique similaire (cf Annexe B).

[2] On se limite ici à $r \in [0,4]$ pour que $f(I) \subset I$. L'étude pour r > 4 est une autre histoire...

2/ Présentation générale

2.1) Les petites valeurs de r : jusqu'ici tout va bien

- ♦ **$r \in [0,1[$:** Le seul point fixe de f dans I est 0, et il est **attractif**. En effet on a $f'(0) = r < 1$
- ♦ **$r = 1$**: 0 est quasi-stable. (x_n) converge encore, mais de façon « lente » : $x_n \sim 1/n$
- ♦ **$r \in]1,3[$:** On a deux points fixes : 0 qui est **répulsif** car $f'(0) = r$ et $\lambda(r) = 1-1/r$ qui est **attractif** puisque $f'(\lambda(r)) = 2-r$
- ♦ **$r = 2$:** On a $f'(\lambda(2)) = 0$: on dit alors que $\lambda(2) = 1/2$ est un point fixe **hyperstable**:
  - Dans le cas habituel d'un point fixe p vérifiant $0<|f'(p)|<1$, il existe alors K>0 tel que $|x_n-p| \sim K\,|f'(p)|^n$: on a **convergence géométrique**.
  - Si maintenant p est **hyperstable** (ie $f'(p) = 0$), on peut alors obtenir K>0 et $\delta\in]0,1[$ tels que $|x_n-p| \sim K\,\delta\hat{}(2^n)$: la convergence est très rapide.Ici on a même l'expression des termes de la suite (x_n) pour tout x_0 dans I, ce qui est exceptionnel : $x_n = (1-(1-2x_0)\hat{}(2^n))/2$
- ♦ **$r = 3$**: $\lambda(r) = 2/3$ est quasi-stable. (x_n) converge, mais lentement: $x_n-2/3 \sim \pm(-1)^n/(3n)$
- ♦ **$r \in]3,\ 1+\sqrt{6}\,[$:** les points fixes 0 et λ sont répulsifs. Par contre, on a un **cycle attracteur d'ordre 2** : $\{h_-,h_+\} = \left\{\dfrac{r+1\pm\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}\right\}$. Son domaine de stabilité est $]3,\ 1+\sqrt{6}\,[$. Et on a hyperstabilité pour $r = 1+\sqrt{5}$. Il y a eu pour r = 3 une **bifurcation** vers un cycle de période double: on parle de **doublement de période** (cf fig. 1).
- ♦ **Après $1+\sqrt{6}$:** on observe numériquement l'apparition d'un cycle d'ordre 4, mais impossible de calculer les valeurs exactes: les points de ce cycle sont racines de f^4, polynôme de degré 16.

2.2) Le diagramme de Feigenbaum

On obtient la fig. 2 à partir des résultats précédents en plaçant r en abscisse et les valeurs d'adhérence de (x_n) en ordonné. L'idée est alors de continuer pour $r > 1+\sqrt{6}$. L'ordinateur prend alors le relais: pour estimer les valeurs d'adhérence (ou au moins celles qui sont « attractives »), on calcule les 200 premières valeurs de la suite, et pour ne garder que le comportement à long terme, on n'affiche que, disons, de x_{100} à x_{200} (cf. fig. 3 et 4.)

Au passage, pour faire ce diagramme de Feigenbaum, on prend toujours $x_0 = 1/2$. Ce n'est pas un hasard: le théorème de la partie 3 assure en effet que s'il existe un cycle attractif, 1/2 sera dans son bassin d'attraction. D'où l'interêt de ce point comme valeur initiale.

Revenons à la fig. 4: après $r = 1+\sqrt{6}$, on observe dans un premier temps une répétition du phénomène de bifurcation. On parle alors de **cascade** de doublements de période. Et à chaque fois le même processus:

- Après la n-ième bifurcation, on a un cycle attractif d'ordre $k=2^n$, et $(f^k)'$ vaut **1** sur ce cycle
- Puis lorsque r croît encore, on passe par un cycle hyperstable (dérivée **0**), dont 1/2 fait partie
- Enfin lorsque la dérivée arrive à **-1**, on a une nouvelle bifurcation.

La distance entre deux bifurcations décroît très vite (en fait le quotient des distances successives tend vers la constante de Feigenbaum $\delta = 4.66920...$). Après r = 3.568..., les bifurcations laissent place au **chaos**: il n'y a plus convergence vers un cycle, et graphiquement les points x_{100} à x_{200} « remplissent » les intervalles où ils sont concentrés. On remarque aussi des « **fenêtres** » au milieu du chaos, où l'on a de nouveau convergence. Voir par exemple la partie 4.1 sur la fenêtre correspondant à $r = 1+\sqrt{8}$.

3/ Un théorème sur les orbites stables

Il est dû à Pierre Fatou (cf. [H] p. 106). On le trouve dans deux sujets de concours, ENS Ulm 87 et ENSAE 91, et aussi dans [D]. Il s'agit de démontrer que pour toute valeur de r, **la suite (x_n) associée ne peut avoir plus d'une orbite stable**. Le sujet d'Ulm est même plus complet, puisqu'il établit que le résulat reste vrai même en cas de quasi stabilité.

En fait, les fonctions étudiées sont tantôt *f,* tantôt $x \to 1-\lambda x^2$, tantôt $x \to x^2+c$. Mais ces trois fonctions sont conjuguées topologiquement (cf. Annexe B). Pour une démonstration détaillée, on peut se reporter aux corrigés des deux sujets, ou encore à [D], chap. 1.11. Mais la démarche, commune à toutes les preuves, vaut d'être exposée:

- Toutes utilisent, implicitement ou explicitement, la **dérivée schwarzienne**:

$$Sf(x) = \frac{f^{(3)}(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

définie pour toute application *f* de I dans I et de classe C^3 et pour tout x de I tel que $f'(x) \neq 0$ (si $f'(x) = 0$ on parle de point critique).

- On remarque ensuite que la fonction logistique *f* appartient à l'ensemble E des applications dont la **dérivée schwarzienne est négative** (lorsque celle-ci est définie).
- E est stable par composition : si *f* et *g* sont dans E, alors $f \circ g$ aussi.
- Pour $f \in E$, si $|f'|$ admet un minimum local en x alors $f'(x) = 0$.
- On en déduit que si *f'* ne s'annule pas sur]a,b[, alors $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| > \inf(|f'(a)|, |f'(b)|)$.

En particulier, si de plus a < x < c sont trois points fixes, le théorème des accroissements finis donne deux points de dérivée 1 de part et d'autre de x, et donc $f'(x) > 1$: x est instable.

- Puis pour $f \in E$, et p point périodique stable (ou même quasi stable, cf. Ulm) de période n, on montre que:

  soit $[\inf(I),p] \in Ws(p)$
  soit $[p,\sup(I)] \in Ws(p)$
  soit il existe un point critique y dans Ws(O(p)).

- Enfin dans le cas de la fonction logistique *f* on montre que le troisième cas est en fait toujours réalisé. Or cette fonction n'a qu'un point critique, 1/2. Donc **s'il existe une orbite stable, alors son bassin d'attraction contient le point critique 1/2.**
- Le théorème d'unicité découle aisément de ce résultat: si on a deux orbites stables O et O', de périodes k et k', on prend $k_0 = \mathrm{pgcd}(k, k')$, et d'après ce qui précède, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f^{nk}(\frac{1}{2}) \in O, \quad \lim_{n\to+\infty} f^{nk'}(\frac{1}{2}) \in O', \text{et} \lim_{n\to+\infty} f^{nk}(\frac{1}{2}) = \lim_{n\to+\infty} f^{nk_0}(\frac{1}{2}) = \lim_{n\to+\infty} f^{nk'}(\frac{1}{2})$$

Il existe donc un point commun aux deux orbites : elles sont par conséquent égales.

4/ Deux cas particuliers

4.1) Les cycles d'ordre trois

La recherche de cycles d'ordre trois est particulièrement intéressante : le théorème de Sarkovskii ([H] chap. 5) affirme en effet, dans sa version faible, que si une fonction continue a un point périodique de période première trois, alors elle a des points périodiques avec n'importe quelle période. Si on tient un cycle d'ordre trois, on est alors dans une situation étrange: il existe des cycles d'ordre quelconque, mais un seul au plus de ces cycles est attracteur.

Pour trouver les cycles d'ordre trois, on doit résoudre $f^3(x)=x$, équation polynômiale de degré huit, avec les racines évidentes 0 et λ. On peut résoudre explicitement en passant par le sytème $\{y = x^2+c \; ; \; z = y^2+c \; ; \; x = z^2+c\}$ (la forme g: $x \to x^2+c$ simplifie un peu les calculs...cf Annexe B). On utilise alors les fonctions symétriques $s = x+y+z$, $d = xy+xz+yz$ (ou $c = x^2+y^2+z^2$, ce qui revient au même) et $p = xyz$. Après calculs ([Fr] Ap. 1), on arrive à $s_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{-7-4c})/2$ ou $s = 3/2$. Les points x,y et z sont alors les racines (éventuelles) de X^3-sX^2+dX-p, avec d(s) et p(s). Encore un peu de calcul (vive Maple !): $s = 3/2$ ne donne rien, mais par contre, pour $c \leq -7/4$ (soit $r \geq 1+\sqrt{8}$), les deux solutions s_1 et s_2 donnent bien deux cycles distincts O_1 et O_2 (cf fig. 5). Et pour ce qui est de la stabilité de ces deux cycles, on calcule $(g^3)'(x)=g'(x).g'(y).g'(z)=8+4c \pm 4c\sqrt{7-4c}$. En $c = -7/4$ (soit $r = 1+\sqrt{8}$) on a une dérivée 1 pour O_1 et O_2 , mais pour $c < -7/4$, O_1 est instable, tandis que O_2 est stable jusqu'à $c = -1.768..$ ($r = 3.8415...$). Ce cycle O_2 se transforme alors en un cycle d'ordre six, puis douze... : on retrouve une cascade de doublements de période, comme on peut le voir sur la fig. 4. C'est la fin de cette « fenêtre » de stabilité.

4.2) Le chaos pour r = 4

Dans ce cas particulier, on peut facilement montrer que f est chaotique pour r=4 , au sens de la définition suivante ([D] chap. 1.8): pour f :I→I, on dit que f est **chaotique sur I** ssi

(i) f est topologiquement transitive

(ii) f est sensible aux conditions initiales

(iii) les points périodiques de f sont denses dans I.

Avec:

- f est **topologiquement transitive** ssi quels que soient les ouverts U et V de I, il existe k tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$: les itérés se « promènent » dans tout l'intervalle I.
- f présente une **sensibilité aux conditions initiales** ssi il existe $\delta>0$ tel que $\forall x \in I, \forall \varepsilon>0, \exists y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[, \exists n, |f^n(x)-f^n(y)|>\delta$. Deux points proches peuvent donc s'éloigner lors de l'itération par f: Les calculs approchés perdent toute valeur...

Pour r = 4, on peut relier f à l'application **g: θ → 2θ** du cercle unité S^1 (ie modulo 2π). Posons pour cela $h(\theta) = (1-\cos\theta)/2$. On a alors:

$$(h \circ g)(\theta) = (1-\cos 2\theta)/2 = 1-\cos^2\theta = 4\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos\theta}{2}\right) = (f \circ h)(\theta)$$

h n'est pas une conjugaison (cf Annexe B) , car il lui manque l'injectivité, mais c'est une sorte de « semi-conjugaison », qui garde des proriétés intéressantes. On prouve facilement que g est chaotique (cf. [D]), puis on transpose vers f. Par exemple si U et V sont deux ouverts de I, on peut choisir deux ouverts U' et V' de S^1 dont les images par h sont U et V. Et comme il existe k tel que $g^k(U') \cap V' \neq \emptyset$ alors $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

5/ Conclusion

Il reste beaucoup à dire sur cette fonction et ses liens avec la physique. Ainsi, le chaos n'existe pas que pour r =4 ! Les constantes de Feigenbaum, juste évoquées ici, méritent une étude complète, ainsi que le domaine r > 4. Des théorèmes et des outils plus puissants existent, comme par exemple la renormalisation. Mais on ne peut que s'étonner de la diversité des questions qu'a pu susciter une simple parabole !

Annexes

A/ Définitions

- p est un **point fixe** de f ssi $f(p) = p$
- Un point fixe p de f est dit **stable, quasi stable ou instable** selon que $|f'(p)|$ est inférieur, égal ou supérieur à 1. Si p est stable, alors il est **attractif**: il existe un voisinage V de p tel que $\forall x \in V, f^n(x) \to p$ lorsque $n \to +\infty$. Si p est instable, alors il est **répulsif**: il existe un voisinage V de p dont les points distincts de p « sortent » de ce voisinage lorsqu'on les itère par f.
- Un point p est dit **périodique** de période première n si $f^n(p)=p$ et $\forall k \in \{1,..,n\text{-}1\}, f^k(p) \neq p$.
- Pour p périodique de période n, l'**orbite** (ou le **cycle**) O(p) est l'ensemble des itérés de p. On a Card O(p) = n et $O(p) = \{p, f(p),..., f^{n-1}(p)\}$. On parle aussi de point périodique stable, quasi-stable, instable: un point périodique de f de période n est un point fixe de f^n.
- En utilisant la relation $(f^n)'(p) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(p))$ on démontre facilement que tous les points d'une même orbite sont des points périodiques de même période, et surtout **de même nature** (stable, instable...). Il est donc légitime de parler d'orbite stable ou instable.
- Le **bassin d'attraction** $W_s(p)$ d'un point périodique p de période k est l'ensemble des points x tels que $f^{nk}(x) \to p$ lorsque $n \to +\infty$. Le bassin d'attraction d'un cycle tout entier est l'union des différents bassins des points du cycle.

B/ La conjugaison topologique

Donnons tout d'abord la définition: pour f: $I \to I$ et g: $J \to J$, on dit que f et g sont conjuguées topologiquement s'il existe un **homéomorphisme** t: $I \to J$ tel que **(t o f) = (g o t)**. Et alors:
- pour tout n, $t \circ f^n = g^n \circ t$
- p est un point périodique de f de période n ssi t(p) est un point périodique de g de période n.
- si p est un point périodique de bassin d'attraction Ws(p), alors le bassin de t(p) est t(Ws(p)).
- Si f,g et t sont C^1, t' ne s'annulant pas (t est alors un **C^1-difféomorphisme**), pour p point périodique de f de période n, on a $(f^n)'(p) = (g^n)'(t(p))$: p et t(p) sont donc de même nature.

<u>La conjuguaison traduit donc le fait que f et g on la même dynamique</u>. Il est alors équivalent d'étudier l'une ou l'autre des formes suivantes, qui appartiennent toutes à la famille quadratique: $x \to rx(1-x)$, $x \to 1-\lambda x^2$, $x \to x^2+c$, ou encore $x \to 2\mu x+2x^2$...
En effet il existe toujours une fonction affine reliant deux formes données.

C/ Bibliographie

[Fe] **Feigenbaum** M, *Universal behavior in nonlinear systems*, Los Alamos Science,1980
[S] **Stewart** I, *Does God Play Dices ?: the mathematics of chaos*, Penguin, 1989
[D] **Devaney** R, *An Introduction to Chaotic Dynamical System*, Addison-Wesley,1989
[Fr] **Frøyland** J, *Intoduction to Chaos and Coherence*, IOP Publishing, 1992
[H] **Homlgren** R, *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Springer-Verlag,1994