

Modélisation des crues

François Sauvageot
Maître de conférences à l'Université Paris 7
7
Animateur à l'IREM

Modèle

- Le modèle étudié permet la simulation dynamique des écoulements dans les cours d'eau et les vallées inondables.
- Il intègre des schémas de représentations qui peuvent être différents d'un secteur géographique à l'autre, tout en coexistant dans un même modèle : représentation filaire, découpage en casiers, maillages bidimensionnels.

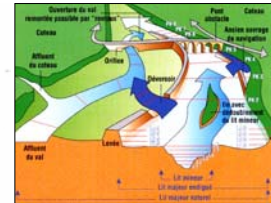
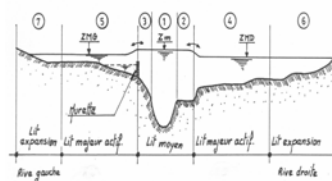


Calage du modèle



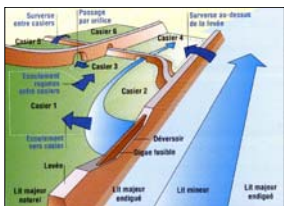
- De Nevers à Angers, ont été modélisés : 450 km de Loire, les principaux affluents, 150 000 ha de zones inondables et 600 km de levées isolant 100 000 ha de val en 33 vals différents.
- Le modèle Loire moyenne est construit à partir d'une topographie précise de 1995, définie, pour le lit du fleuve, par un profil en travers de Loire tous les kilomètres, et, pour les vals, par la cartographie existante, principalement les cartes de l'Institut géographique national au 1/25 000ème, et une série de profils réalisés sur certains axes routiers ou sur des ouvrages pouvant influencer les écoulements (ponts, buses...).
- Le calage du modèle a consisté à retrouver, par le calcul et avec la plus grande précision possible, les niveaux d'eau observés sur le terrain par la DIREN de Bassin pour les crues de novembre 1992, janvier 1994, mai et décembre 1996. Le modèle est capable de bien reproduire la réalité pour ces crues puisqu'il restitue, à plus ou moins 15 centimètres, 87% des 300 niveaux observés par les services de l'Etat lors de ces quatre crues.

Modèle filaire



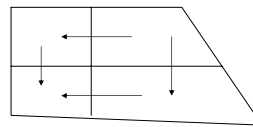
- Le modèle filaire se construit à partir de profils en travers. L'hydraulicien synthétise avec 14 points, les profils en travers levés par le géomètre. Il interpole des profils supplémentaires pour rester fidèle à la géométrie du lit du fleuve.
- Dans un filaire, l'eau coule généralement de l'amont vers l'aval. Toutefois, dans les zones de confluence de deux filaires, l'écoulement peut changer de sens lors des crues, le niveau de l'eau peut monter par « remous ». C'est ce qu'il se produit dans les affluents ou les vals lorsque la montée d'eau en Loire les inonde de l'aval vers l'amont.

Modèle casier



- Le casier est une zone d'expansion du lit majeur caractérisée par des vitesses d'écoulement généralement faibles et dont les contours s'appuient sur la topographie naturelle ou sur des obstacles artificiels de l'écoulement des eaux.
- Chaque casier est défini géographiquement par ses contours qui correspondent, en général à des obstacles physiques influençant l'écoulement : levées, coteaux, routes, talus... puis numériquement par sa superficie et par une courbe $\alpha(Z)$ où α est le pourcentage de la superficie du casier situé sous la cote Z .
- La planimétrie générale du terrain est ainsi entrée dans le modèle ce qui définit le volume d'eau susceptible d'être stocké dans la zone inondée.

Modèle 2D



- Le domaine 2D est formé de casiers élémentaires quadrangulaires, interconnectés par des liaisons internes à chaque segment. La densité et la taille moyenne des mailles sont adaptées en fonction de la cohérence de la précision des levés topographiques et des attendus du projet.
- Le vecteur vitesse d'écoulement peut être calculé en chaque centre de bloc élémentaire à partir des valeurs de cote d'eau et des débits échangés avec les bloc voisins.

Objectifs du modèle

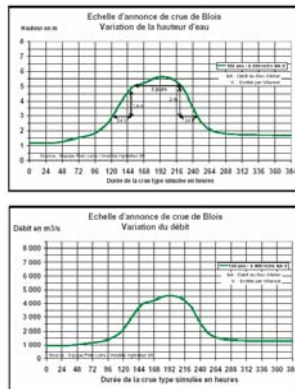
- Le modèle fournit des résultats hydrauliques (hauteurs d'eau, débits) qui doivent être utilisés en tenant compte de la précision liée d'une part au calage et d'autre part à l'élément considéré (filaire ou casier).
- La modélisation doit pouvoir, à l'échelle de la Loire moyenne, décrire avec précision la progression des événements dans le temps et donner ainsi une image dynamique de l'inondation globale.
- Un des buts est d'analyser une crue cinq-centennale, i.e. dont la probabilité d'apparition est de 0.2% par an. C'est une crue extrême dont le risque est élevé : elle est 20 fois plus probable et fréquente que la crue utilisée pour calculer la protection des centrales nucléaires le long de la Loire.

Les questions mathématiques

- Nous venons de décrire comment on compte appliquer les équations de la mécanique des fluides, mais il reste des questions pour calibrer le modèle.
- Quelles sont les quantités observées, et celles que l'on veut prédire ?
- Quelles précision a-t-on ou espère-t-on ?

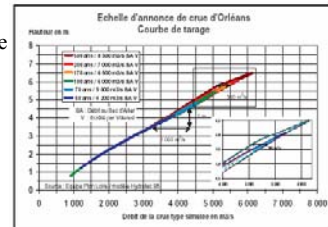
Hauteur et Débit

- La première courbe permet d'analyser l'évolution de la crue en un lieu précis : vitesse de montée et de descente des eaux, nombre de jours où le niveau se maintient au-dessus d'un niveau donné.
- Par exemple, pour la crue centennale à Blois, la vitesse de montée des eaux est de 7 cm/heure à partir de 3 m à l'échelle ; la hauteur à l'échelle se maintient pendant 3 jours au-dessus de 5 m et atteint un maximum de 5,6 m ; et la vitesse de la décrue est de l'ordre de 8 cm/heure lorsque la hauteur à l'échelle passe sous les 5 m.
- La seconde courbe décrit le débit, avec une pointe plus ou moins étalée dans le temps, et donne le maximum atteint en un point donné.



Tarage

- Le modèle a permis de calculer des courbes de tarage au droit des échelles de crue. Il s'agit de courbes qui donnent la relation entre le débit en Loire et la hauteur lue sur l'échelle.
- Usuellement, ces courbes sont construites à partir de jaugeages (mesures de débit du fleuve à l'aide d'un moulinet) réalisées simultanément avec une lecture du niveau d'eau aux échelles hydrologiques.

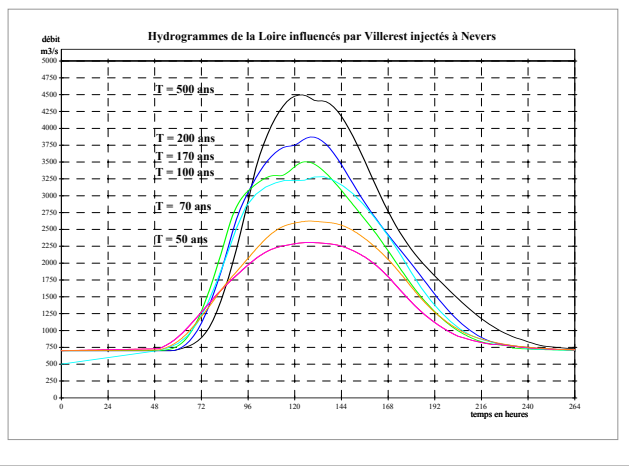


Incertitudes

- Hydrologie : la reconstitution des débits aux échelles à partir des observations de niveaux par l'intermédiaire des courbes de tarage engendre des imprécisions sur les débits injectés dans le modèle.
- Lecture : la lecture de l'échelle n'a pas toujours lieu au moment du passage du maximum, vagues, nuit, accessibilité de l'échelle....
- Position de l'échelle : les échelles situées dans l'extrados d'une courbe ou dans le remous d'un pont induisent une surcote.
- La précision ne peut par conséquent pas dépasser 15 cm. Celle-ci est obtenue à 87% dans ce modèle.

Période de retour

- La notion de période (ou temps) de retour est destinée à caractériser la fréquence d'apparition d'un phénomène. C'est sans doute dans un souci pédagogique qu'on a voulu traduire une probabilité en temps, notion supposée plus compréhensible pour les responsables et le grand public.
- Ce n'était peut être pas une excellente idée, car cette notion, et plus encore celle de période de retour, véhicule un certain nombre d'idées fausses, en particulier celle d'une périodicité des phénomènes extrêmes.
- Définition statistique du temps de retour : si p est la probabilité que le débit d'une rivière dépasse une valeur donnée au cours d'une année donnée, le temps de retour attaché à cet événement est défini comme l'inverse de cette probabilité, $T=1/p$.



Ambiguïté de la notion

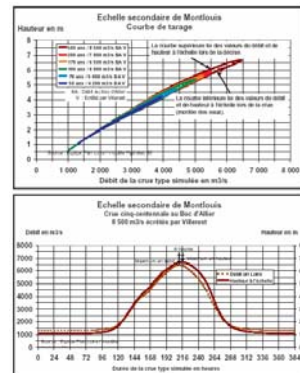
- Le temps de retour n'est donc qu'une autre façon d'exprimer, sous une forme qui se veut plus imagée, la probabilité d'un événement à un moment donné. Malgré son nom **il ne fait référence à aucune notion de régularité ou de périodicité** et peut même s'appliquer à des événements qui ne se sont pas produits et qui ne se produiront peut-être jamais à l'avenir.
- Il est légitime de s'intéresser aux crues millénaire ou décennaire d'une rivière qui n'existait pas il y a cinq mille ans, ou n'existera plus dans dix mille ans, et qui de toute façon s'est transformée au cours des siècles du fait de transformations naturelles et/ou anthropiques.

Difficultés

- « *L'intervalle des très grandes crues mérite une attention particulière. Pour aucun élément de l'Hydrologie, les moyennes ne sont plus difficiles à établir et plus trompeuses. Ces phénomènes peuvent fort bien se grouper au nombre de deux, trois ou quatre dans un temps inférieur à l'intervalle moyen, puis manquer pendant une période bien plus longue. Signalons comme bizarreries de ce genre les trois crues de la Loire en 1846, 1856 et 1866, presque doubles, au Bec d'Allier, de la plus forte survenue depuis lors...* » (Maurice Pardé)
- Remarquons que le hasard avait bien mal fait les choses en espaçant ces événements de dix ans, ce qui n'a pas manqué un temps d'accréditer la thèse de leur périodicité.

Détection du maximum

- La détection et la mesure du maximum de la crue présentent des difficultés liées au fait que le maximum en hauteur ne correspond pas toujours au maximum en débit.
- La relation entre la hauteur d'eau et le débit n'est pas univoque sur un fleuve de l'importance de la Loire. On observe ce phénomène dit d'hystérésis : pour un même débit, la hauteur d'eau est plus forte à la décrue qu'à la montée des eaux.
- La courbe de tarage à l'échelle de Montlouis présente par exemple une hystérésis bien nette pour les six crues simulées : la forme arrondie de la courbe de tarage au moment du maximum implique que le maximum de débit passe avant le maximum en hauteur à l'échelle. Lorsqu'on constate une baisse de niveau à l'échelle, la décrue est donc déjà amorcée depuis quelques heures.



Statistiques de l'extrême



- Comment prévoir ce qui dépasse tout ce que l'on a déjà vu ou qui n'est arrivé qu'une fois en plusieurs siècles ?**
- Y a-t-il une statistique de l'extrême ?**

Quantiles extrêmes

- Les observations x_1, \dots, x_n des hauteurs quotidiennes d'une rivière sont considérées comme des réalisations de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n que l'on suppose indépendantes et identiquement distribuées.
- On note leur fonction de répartition $F : \mathbf{P}(X_i \leq \alpha) = F(\alpha)$.
- On s'intéresse au problème d'estimer les quantiles extrêmes supérieurs q_α définis par
$$1 - F(q_\alpha) = \mathbf{P}(X_i > q_\alpha) = \alpha$$
 avec $0 < \alpha < 1/n$.

Méthode d'estimation

- On choisit un seuil u comme valeur haute de la quantité à observé. Par exemple si on a $n=100$ observations, on prendra la 20^{ème} plus grande. On note $u \leq x_m \leq \dots \leq x_j$ les m valeurs ordonnées au-dessus du seuil. On prendra par exemple $m=n/5$.
- On ajuste des paramètres en prenant comme hypothèse
 - Si $n < 50$, $P(X > u + y | X > u)$ suit une loi exponentielle.
 - Si $n > 100$ et x assez grand, on a $P(X > x) \approx C \cdot x^{1/\tau}$
- On estime alors q_α par la valeur trouvée en supposant que la loi asymptotique est exacte.

Exemples

- Avec une loi exponentielle, l'estimateur est donné par la formule

$$\hat{q}_\alpha = u + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_i - u) \ln \left(\frac{m}{n\alpha} \right)$$

- Avec la seconde forme, l'estimateur devient

$$\hat{q}_\alpha = u \left(\frac{m}{n\alpha} \right)^{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\ln X_i - \ln u)}$$

Records

- On note T_k les instants où X_i bat ses records :

$$T_{k+1} = \inf \{m > T_k \mid X_m > X_{T_k}\}$$

- On note N_x le nombre de records qui sont inférieurs à x .
- On note E_j l'évènement « un record a eu lieu à l'instant j » et ν_n le nombre d'instants de record avant n :

$$(\nu_n \leq k) = (T_{k+1} > n)$$

Quelques résultats

- $T_k^{1/k} \rightarrow e$ presque sûrement.
- $(\ln T_k - k) / \sqrt{k} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ en loi.
- N_x est un processus de Poisson non-homogène d'intensité $\lambda = f(x) / (1 - F(x))$.
- Les E_j sont indépendants et $P(E_j) = 1/j$.
- $\nu_n / \ln n \rightarrow 1$ presque sûrement.
- $(\nu_n - \ln n) / \sqrt{\ln n} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ en loi.

Problèmes mathématiques

- Nous allons maintenant nous concentrer sur des problèmes de nature mathématique accessibles au niveau du lycée.
- Bien que certains phénomènes physiques puissent être étudiés, nous préférons donner des illustrations de nature probabiliste.

Hauteur et débit

- Premier enjeu : le débit.
- Comme on l'a vu la courbe de débit est reconstituée à partir de la courbe de hauteur. C'est la hauteur qui est observée mais c'est le débit qui intervient dans les notions de « temps de retour ».
- D'où un exercice simple : y a-t-il une différence ?!
- On prendra une rivière simplifiée, une loi de probabilité pour, selon les cas, la hauteur ou le débit.

Exemple de calcul en TD

- On prend une rivière en V de pente t et une vitesse d'écoulement fixe v .
- Le débit est donc égal à la vitesse fois la section, soit : $d = v \cdot h^2 / t$.
- Si on prend une loi exponentielle pour d , alors h ne suit pas une telle loi ...
- En fait, dès que le débit n'est pas proportionnel à la hauteur, on a des problèmes.

Evènements rares en probabilités

- Pour illustrer les évènements rares, nous proposons deux réflexions sur
 1. La notion de probabilité conditionnelle
 2. Les fluctuations d'échantillonnage
- On pourra de là proposer des réflexions pour les TPE, mais aussi mener ces calculs en classe ou lors d'un DM.
- Un exemple d'utilisation de classeur Excel en seconde est donné par Michel Henry (Bulletin de l'APMEP 444, p.88) de l'IREM de Franche-Comté.

Vers des TPE « citoyens » Math - ECJS

- Une illustration de l'importance de la probabilité conditionnelle est son impact dans le « sophisme du procureur », paradoxe dont il faut se méfier dès que l'on manipule des probabilités consistant à confondre « la probabilité qu'un événement survienne » avec « la probabilité d'innocence de l'accusé ».
- La fluctuation d'échantillonnage est largement illustrée dans les problèmes de sondages.

Le sophisme du procureur (Math-SVT)

- Prenons l'exemple des tests ADN. La probabilité pour que deux profils ADN soient identiques est environ de 1/10 000. Si maintenant, suite à une affaire de meurtres, on trouve un suspect dont le profil ADN est exactement celui trouvé sur la victime, doit-on en déduire qu'on n'a qu'une chance sur 10 000 de se tromper en l'accusant ? **NON**.
- Faisons le calcul ... Supposons que pour parvenir à trouver le suspect, on ait dû comparer le profil ADN trouvé sur la victime avec 20 000 profils (issus d'un fichier de la police scientifique). Avec la probabilité donnée, il y a en fait **86%** de chances de trouver au moins un profil identique et il y a **27%** de chances de trouver exactement un profil identique.
- En effet ces deux probabilités sont respectivement égales à $1 - (1 - 1/10\ 000)^{20\ 000} \approx 0,86$ et $20\ 000 \times (1 - 1/10\ 000)^{19\ 999} \times 1/10\ 000 \approx 0,27$.
- Il ne faut pas en déduire que les tests ADN ne servent à rien, ni qu'on ne peut rien dire à partir d'eux. Si par exemple la victime reconnaît son agresseur et qu'ensuite on effectue un test ADN qui est positif, alors les calculs précédents ne s'appliquent pas : il faudrait pouvoir remplacer 1/10 000 par la probabilité pour que *simultanément* une victime ait cru reconnaître son agresseur et que le profil des deux, agresseur et faux agresseur, coïncident. Une telle statistique est difficile à établir car le nombre de cas d'étude est très faible. C'est le contexte qui permet d'affiner la suspicion.

Math partout, Justice nulle part ?

- C'est avec un raisonnement aussi absurde que 258 personnes ont été accusées au Royaume-Uni pour infanticide : l'expert en pédiatrie, le Pr Roy Meadow, arrivait à convaincre que la probabilité qu'une mort subite du nourrisson arrive deux fois de suite était égale à la probabilité d'innocence de la mère.
- Et de conclure qu'il y avait autant de chance pour cela que pour un outsider côté à 80 contre 1 de gagner 4 années de suite le Grand Prix National », soit 1/73 000 000. Sally Clark a passé 5 années en prison à cause de cet argument et il y a encore 54 femmes en prison sur les mêmes bases.

Science et conscience ...

- La probabilité d'innocence, $P(I)$, n'est pas la probabilité qu'il y ait eu un accident, $P(A)$, mais plutôt celle qu'il y ait eu un accident sachant qu'il y a eu décès, $P(A|D)$.
- Si l'on se place dans l'hypothèse où seuls l'accident et le meurtre, (M) , sont considérés, la formule de Bayes donne immédiatement : $P(I) = P(A) / (P(A) + P(M))$.
- En particulier il ne faut pas chercher à savoir si un accident est improbable (1/73000000), mais s'il l'est tellement moins qu'une autre hypothèse. Dans le cas de Sally Clark un calcul de cette nature permet d'obtenir $P(I) > 2/3$!

Fluctuations d'échantillons

- Les sondages donnent des soi-disant instantanés de l'opinion de la population, mais force est de constater qu'ils sont bien flous !
- Et leur analyse par les médias sont des plus surréalistes. N'a-t-on pas entendu qu'un candidat aurait gagné 1 point grâce à une gifle ...
- Non seulement cet événement est statistiquement non significatif, mais on peut se demander ce qu'est un « point » : un fourre-tout permettant de ne pas se demander de quoi on parle ?

Espérance

- L'objet des probabilités est de comprendre des phénomènes variables que l'on ne peut pas prédire.
- La première avancée est l'introduction de variable aléatoire, X , qui n'est rien d'autre qu'une fonction.
- L'observation montre qu'elle se distribue d'une certaine manière et ceci permet d'avoir une connaissance de nature statistique, sans pouvoir prédire l'avenir.
- L'idée d'espérance est apparue il y a 300 ans, c'est simplement l'intégrale de X . Jusqu'au XX^{ème} siècle l'espérance et la variance ont été suffisantes pour être satisfaits : on pouvait prédire des valeurs moyennes et les écarts à la moyenne.

Loi des grands nombres

- Soit une suite (X_n) de variables aléatoires **indépendantes**, de mêmes moyenne μ (espérance) et variance, alors (X_n) converge en moyenne vers μ , au sens des probabilités :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

(En fait on a même convergence presque sûre.)

- En particulier, le théorème s'applique lorsque les X_n suivent la même loi (on dit qu'elles sont indépendantes et identiquement distribuées : i.i.d.)
- On prendra garde à ne pas croire que, pour autant, les erreurs se compensent : la probabilité que la moyenne des X_n vaille μ ne tend pas vers 1 !

Théorème Central Limite

- Ce théorème précise la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres : $1/\sqrt{n}$.
- Soit une suite (X_n) de variables aléatoires **indépendantes**, de mêmes moyenne μ (espérance) et variance σ^2 , alors la moyenne des (X_n) , centrée et réduite, admet une limite qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, centrée réduite, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(x \leq \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq y\right) = \int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$$

- En particulier, ce théorème est vrai lorsque les (X_n) sont i.i.d. et admettent des moments d'ordre 1 et 2 (espérance et variance).

Approximations

- Le Théorème Central Limite est un théorème de convergence (en loi), pas d'approximation. Néanmoins on l'utilise comme tel.

- Pour $n \geq 30$, on peut en pratique faire les approximations :

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \approx \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \approx \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- Et même pour $n \geq 10$ lorsque la loi initiale est continue, régulière et symétrique.

Intervalle de confiance

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite et α un nombre compris entre 0 et 1 (typiquement 95%). Il existe deux réels t et u tels que $P(-t \leq X \leq t) = \alpha$ et $P(X \leq u) = P(X \geq -u) = \alpha$
- Ces quantités se trouvent sur des tables de la loi de Gauss, et servent de base à la construction d'intervalles de confiance bilatéraux ou unilatéraux.

- On a par exemple

α	90%	95%	99%
t_α	1.64	1.96	2.57
u_α	1.28	1.64	2.33

Loi de Bernoulli

- Soit X une variable aléatoire qui à un individu associe 1 s'il possède le caractère qualitatif étudié et 0 sinon. Si la proportion d'individus ayant ce caractère est p , alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , notée $\mathcal{B}(p)$.

- On a

$$P(X=0)=1-p \text{ et } P(X=1)=p$$

$$\mu=p \text{ et } \sigma^2=p(1-p).$$

Estimation d'une proportion

- Modélisation du problème. Soit (X_i) une suite de variables aléatoires i.i.d. selon $\mathcal{B}(p)$, et f_n la moyenne des X_i ou « fréquence empirique » :

$$f_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

- D'après la loi des grands nombres f_n tend vers p lorsque n tend vers l'infini. Mais attention ! f_n est une variable aléatoire ...
- De même on peut démontrer que $\left(\hat{\sigma}_n^2\right)^2 = \frac{n}{n-1} f_n(1-f_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - f_n)^2$

tend vers σ^2 . Tout comme f_n , $\hat{\sigma}_n^2$ est une variable aléatoire.

- Un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance α est donné par

$$f_n - t_{\alpha} \sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n-1}} \leq p \leq f_n + t_{\alpha} \sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n-1}}$$

Estimateurs sans biais

- La fréquence empirique f_n est un estimateur de p en ce sens que f_n tend vers p en loi. Mais c'est aussi un estimateur sans biais, en ce sens que, pour tout n , l'espérance de f_n est p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad E(f_n) = p \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = p$$

- C'est l'explication du $n-1$ dans la formule de l'estimateur de la variance. On parle de « correction pour les petites populations »

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad E(\hat{\sigma}_n^2) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{\sigma}_n^2 = \sigma^2$$

- C'est en fait le théorème de Pythagore ! Cette correction s'interprète en termes de degrés de liberté : il en faut 1 pour estimer μ et $n-1$ pour estimer σ^2 .

Application numérique

- Dans un sondage d'opinion, on enregistre 14% des intentions de vote pour A et 17% pour B. En fait il faudrait dire (avec 850 sondés)
 - « Avec une certitude de 95%, les intentions de vote sont, entre 11.7% et 16.3% pour A et entre 14.5% et 19.5% pour B. »
- On ne peut donc pas exclure que A récolte plus de suffrages que B, même si les électeurs ne changent pas d'opinion d'ici les élections ...
- Avec une confiance de 90%, les intervalles deviennent [12%,16%] et [14.9%,19.1%], ce qui laisse encore de la marge. Il faut arriver à 77% de confiance pour que les intervalles soient disjoints : [13.6%,15.4%] et [15.4%,18.6%].

Quel enseignement en tirer ?

- Vouloir ordonner totalement les résultats d'une estimation statistique est sans objet.
- En particulier le classement des lycées donné par les médias est **ridicule** : on peut au mieux donner, disons cinq groupes de lycées et dans chaque groupement les lycées sont **indiscernables** statistiquement parlant.
- Il en va de même du classement des hôpitaux, du classement des candidats à une élection etc.

Markov

- Au début du XXème siècle Markov, en prévoyant l'apparition de voyelles et consonnes dans un texte, s'est aperçu que la mécanique classique peut s'appliquer en probabilité : pour prédire le devenir d'un système, il suffit de savoir son présent et il n'est pas besoin de connaître son passé.
- On pourrait même penser que tout est markovien, au moins approximativement. En effet « ce qui s'est produit avant-hier a beaucoup moins d'influence sur ce qui se passera demain que ce qui s'est passé hier; et finalement ce qui s'est produit il y a dix jours n'a plus aucune importance pour nous ».

Variables aléatoires sans mémoire

- Ce sont les variables aléatoires markoviennes : pour s et t positifs,

$$P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s).$$

- Les seules lois continues vérifiant cela sont les lois exponentielles, dont la densité de probabilité est

$$\lambda e^{-\lambda x} dx.$$

(voir par exemple le problème de CAPES 2001)

- En discret, on tombe sur les lois géométriques, qui donnent l'instant de premier succès d'une loi de Bernoulli : $P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$.

Exemple d'utilisation : loi de Poisson

- Les lois exponentielles modélisent typiquement des temps d'attente.
- Si T_1, \dots, T_n, \dots suivent des lois exponentielles de paramètre λ , notons S_n la durée totale d'attente pour que n événements se produisent et N_t le nombre d'événements qui se sont produits avant le temps t , de sorte que $(S_n \leq t < S_{n+1}) = (N_t = n)$.
- Alors N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt .
- On s'en sert par exemple pour modéliser les files d'attente : si entre deux instants, il y a une probabilité p qu'une nouvelle personne arrive et que chacune doit attendre une durée suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Alors :
 1. Si $\lambda p < 1$, quand le temps augmente indéfiniment la probabilité que la file se résorbe tend vers 1 et l'espérance du nombre de personnes attendant tend vers 0.
 2. Si $\lambda p = 1$, la probabilité que la file se résorbe tend encore vers 1 et l'espérance du nombre de personnes attendant tend vers 1.
 3. Si $\lambda p > 1$, la probabilité que la file se résorbe tend vers une limite strictement inférieure à 1 et l'espérance du nombre de personnes attendant tend vers l'infini.

Mémoire et idées

- La nature a en fait une mémoire d'éléphant ! De la mécanique quantique aux transitions de phase, de nombreux phénomènes reposent sur des interactions à distance infinie.
- Néanmoins on peut voir que dans certains cas, tout se passe comme si le processus était markovien, mais avec un choix aléatoire de paramètres.
- C'est le cas de l'émergence des idées (ou de l'intelligence artificielle) : supposons que l'on hésite entre deux idées, A et B. Au début, on affecte un poids 1 à chacune et on choisit au hasard entre les deux. Le lendemain on recommence mais entre temps on a augmenté le poids de l'idée choisie la veille de 1.

Un devoir à la maison ?

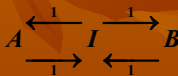
- Soit $\alpha_n = k/n$ la fréquence du choix A durant les n premières itérations.
- Alors α_n est une martingale : en moyenne ce qui se passe demain est égal à ce qui se passe aujourd'hui.
- On a $P(\alpha_n = k/n) = 1/(n+1)$.
- En effet, toutes les façons d'arriver à $\alpha_n = k/n$ ont la même probabilité, à savoir $k!(n-k)/(n+1)!$, et il y a $n!/k!(n-k)!$ telles façons.
- Mais si on choisit α au hasard (uniformément entre 0 et 1) et qu'on affecte la probabilité α à A et $1-\alpha$ à B, alors la probabilité d'une certaine façon d'arriver à k/n est

$$\int_0^1 \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} d\alpha = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

ce qui est bien la même chose que précédemment !

Marches aléatoires

- Le phénomène précédent peut être modélisé par une marche aléatoire renforcée



les poids changeant à chaque itération.

- La marche aléatoire (non renforcée) sur Z illustre la loi des grands nombres.

Math-Physique

Marches aléatoires sur Z

- Ruine du joueur : on gagne 1 avec probabilité p et on perd 1 avec probabilité $q = 1-p$. Chacun des deux joueurs a un capital au départ : c et $a-c$.
- Phénomènes de diffusion : une particule se déplace et s'arrête dans un des états absorbants 0 ou a , en partant de c .
- Cas $a = +\infty$: problème du premier temps de passage en 0.
- Limite miroir : en $x=1/2$ on rebondit. $\frac{q}{1-p} \rightarrow 2$
- Limite élastique : même chose, mais il arrive qu'on soit absorbé en 0.

$$0 \leftarrow \frac{(1-\delta)q}{1-p} \rightarrow 1 \xrightarrow{p} 2$$

Lois de l'arcsinus

- On considère le cas symétrique $p = q = 1/2$.
- La loi du maximum de la marche est décroissante : son maximum est en 0 !
- Le temps du premier maximum et du dernier passage en 0 ont des probabilités maximales en 0 et n, et leurs fonctions de répartition tendent vers un arcsinus.
- Il n'y a pas de retour en 0 avec une probabilité $1/2$: il n'est pas rare que la marche reste de signe constant ! Par conséquent, même si l'espérance de S_n est nulle, cette valeur est prise rarement !

Justifications : un joli TP ?

- A un chemin tel que $M_n \geq m$ et $S_n = k \leq m$ correspond un chemin tel que $S_n = 2m - k$ par réflexion. Il vient $P(M_n \geq m \text{ et } S_n = k \leq m) = P(S_n = 2m - k)$.

- Et donc, par somme télescopique, $P(M_n = m) = P(S_n = m \text{ ou } m+1)$.

$$P(S_n = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$$

$$P(\theta_n = k) = \frac{1}{2} P(S_{k-1} = M_{k-1}) P(M_{n-k} = 0) = \frac{1}{2} P(S_{k-1} = 0) P(M_{n-k} = 0)$$

$$P(\theta_n = k) = \frac{1}{2^n} \binom{k-1}{\frac{k-1}{2}} \binom{n-k}{\frac{n-k}{2}} \approx \frac{1}{2^n} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k(1-\frac{k}{n})}}$$

La mouette et le bateau ivre

- Une mouette perdue n'a aucune chance de retrouver son chemin, sauf si elle suit un bateau qui s'est perdu : en dimension 2 les marches aléatoires sont récurrentes, mais pas en dimension 3 : elles sont transitoires !
- La probabilité de retour en 0 est en $n^{-d/2}$.
- Ainsi en dimension 2 ou plus, on ne distingue pas la marche aléatoire symétrique de celle qui est juste truquée en 0.

Situation avec des graphes

- On peut faire des marches aléatoires renforcées sur des graphes connexes, finis et orientés.
- Quels que soient les poids de départ, on finit par tomber sur une distribution limite. On peut l'expérimenter en Terminale ES et simuler ainsi l'apprentissage d'un robot.

Expérimentations

- Pour pouvoir « jouer » avec les variables aléatoires, il faut savoir les simuler sur une calculatrice.
- Le principe est simple : on tire au hasard un nombre en 0 et 1, selon une loi uniforme, et on utilise la fonction de répartition F pour déterminer une valeur qui, elle suivra la loi qui admet F comme fonction de répartition.
- En termes mathématiques, si $F^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geq t\}$ alors, si U admet une loi uniforme sur $[0, 1]$ et X admet F comme fonction de répartition : $F^{-1}(U) \sim X$ et $F(X) \sim U$

Simulation d'une loi de Poisson

Création d'une liste « loi »

```
poisson(λ,ε)
Prgm
ClrIO
newList(0)→loi
e^(-λ)→p
p→f
O→k
While f<1-ε
k+1→k
floor(f/ε)*ε→loi[k]
p*λ/k→p
f+p→f
EndWhile
1→loi[k+1]
EndPrgm
```

Utilisation pour la simulation d'une v. a.

```
ceiling(1/ε)→pas
rand(pas)/pas→y
O→k
While loi[k+1]y
k+1→k
EndWhile
Disp k
```

• k suit une loi de Poisson de paramètre λ, à ceci près que les valeurs pour lesquelles $P(k \leq n) \leq \varepsilon$ sont « concentrées » en la valeur minimale.

• Exemple : λ=1, ε=0.001

• X prend ses valeurs dans {0,1,2,3,4,5}.

• loi : 0.367, 0.735, 0.919, 0.981, 0.996, 1.

• P(X=0)=0.367, P(X=1)=0.368, P(X=2)=0.184, P(X=3)=0.072, P(X=4)=0.015, P(X=5)=0.004.