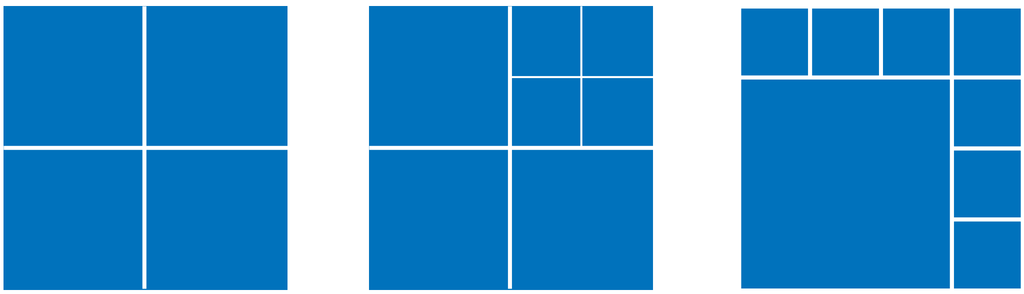
Les défis du Kangourou

Partager un carré en carrés

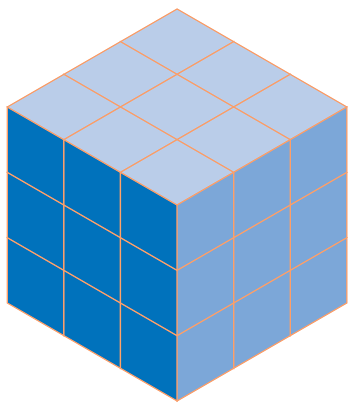
On peut partager un carré en 4 carrés :



On peut aussi partager un carré en 7 carrés.
En réfléchissant un peu, on peut aussi partager un carré en 8 carrés.

Est-il possible de partager un carré en 9 carrés ?
en 6 carrés ? en 5 carrés ? 10 carrés ?
11 carrés ? 12 carrés ? 20 carrés ?

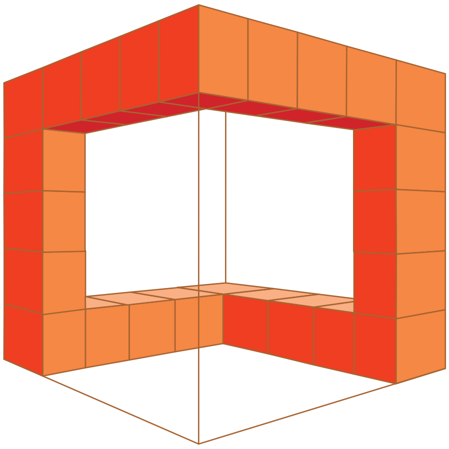
Peinture de cubes



On peint l'extérieur d'un cube formé de 3 petits cubes de côté.
Puis on "défait" ce cube : il y a alors 27 petits cubes ($3 \times 3 \times 3$).

Combien de petits cubes ne sont pas du tout coloriés ?
Combien de petits cubes sont coloriés sur exactement une face ?
Combien de petits cubes sont coloriés sur exactement deux faces ?
Combien de petits cubes sont coloriés sur exactement trois faces ?
Répondre aux mêmes questions avec un cube $5 \times 5 \times 5$.

Un serpent de cubes



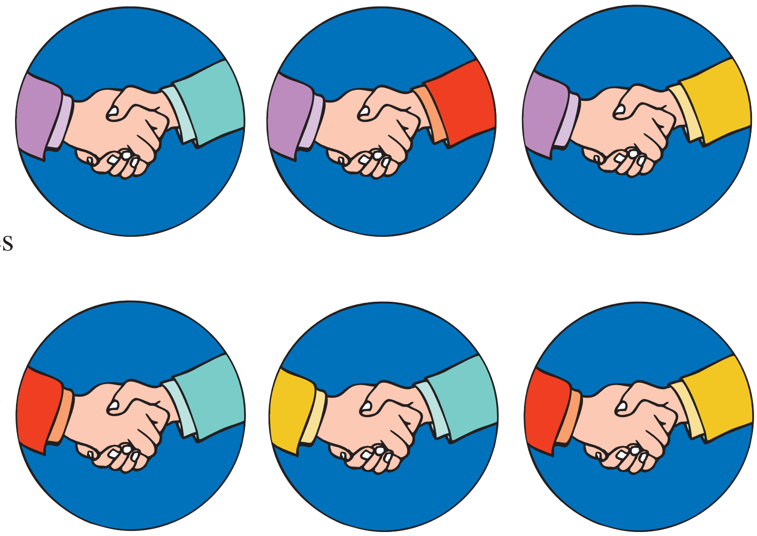
Un cube est formé de petits cubes, à raison de 5 par côtés.
On ne garde que ceux qui sont dessinés ci-contre et qui forment une sorte de serpents longeant 6 arêtes du cube.

De combien de cubes est composé le serpent ?
De combien de cubes serait composé un serpent formé à partir d'un cube de 6 de côté ?

Les poignées de mains

4 personnes se saluent : elles peuvent échanger 6 poignées de mains. (Voir le dessin.)
5 personnes peuvent échanger 10 poignées de mains.

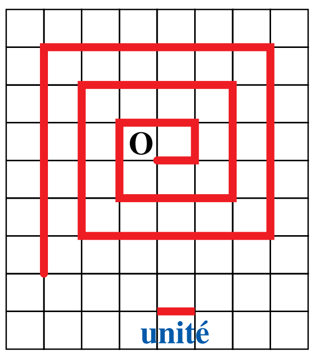
Combien de poignées de mains peuvent s'échanger 6 personnes, 7 personnes, 8 personnes ?



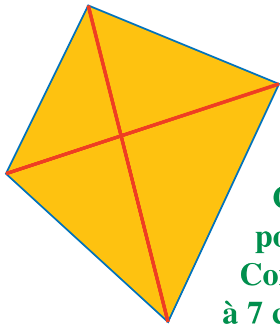
La spirale

En suivant les lignes d'un quadrillage, à partir d'un point O, on trace une espèce de spirale, la plus serrée possible comme sur ce dessin :
Ici on a dessiné 12 traits ; et la longueur de la spirale est de 42 unités.

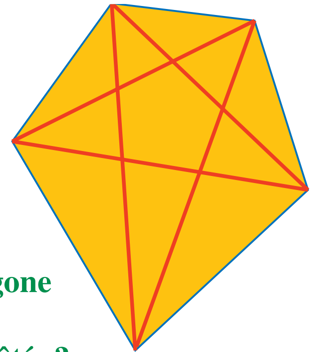
Quelle est la longueur de la spirale après avoir dessiné 4 traits seulement ? 6 traits ?
Quelle sera-t-elle après 10 traits ?
Une spirale mesure 36 unités. Combien a-t-on tracé de traits ?



Diagonales d'un polygone



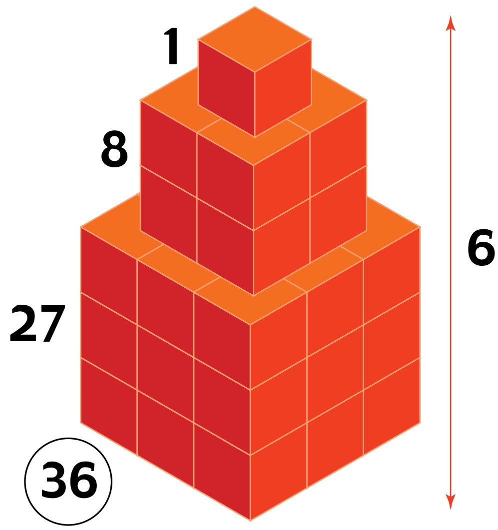
Un polygone à 4 côtés possède 2 diagonales.
Un polygone à 5 côtés possède 5 diagonales.



Combien de diagonales a un polygone à 6 côtés ?
Combien de diagonales a un polygone à 7 côtés ?
Combien de diagonales a un polygone à 8 côtés ? à 9 côtés ?
Combien de diagonales a un polygone à 10 côtés ?

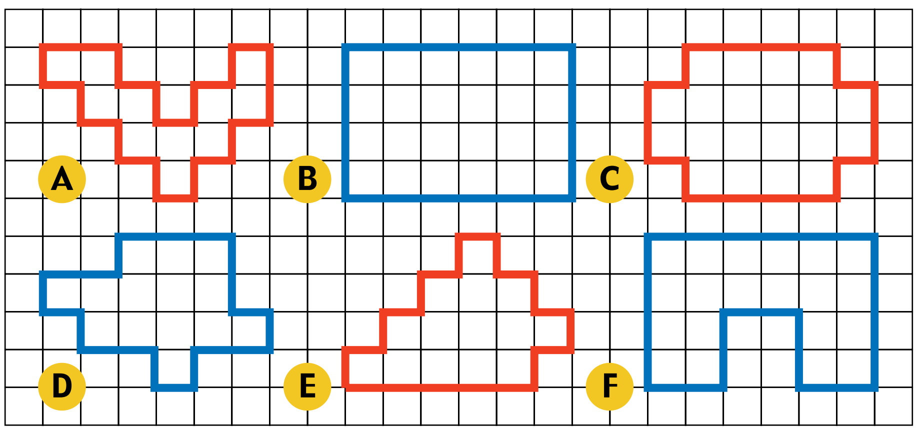
Pyramide de cubes

Une pyramide est fabriquée en plaçant un cube de 1 de côté sur un cube de 2 de côté, qui est lui-même placé sur un cube de 3 de côté, et ainsi de suite.
Au total, la pyramide dessinée utilise 36 cubes et sa hauteur est 6.
Si la base d'une autre pyramide analogue est un cube de 4 de côté, on compte 100 cubes et sa hauteur est 10.
Combien compterait de cubes une pyramide ayant pour base un cube de 5 de côté ? Quelle serait sa hauteur ?



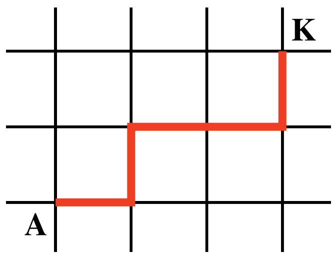
Hétéro-périmètres

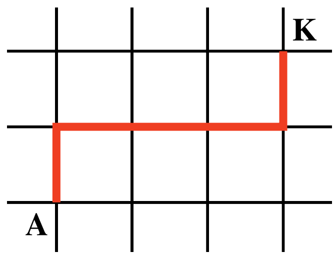
Lesquels de ces polygones (tracés sur du papier à mailles carrées) ont le même périmètre ?



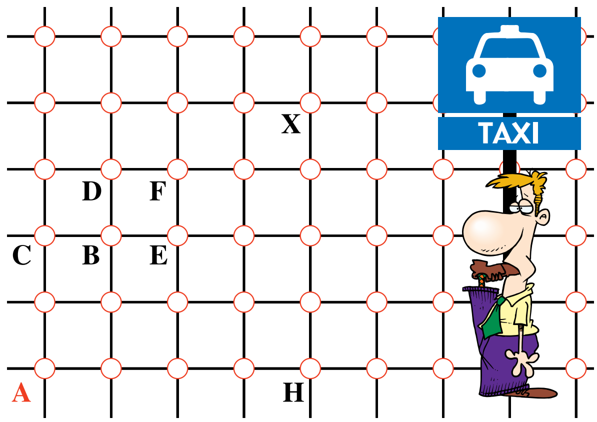
Les déplacements du taxi

Dans une ville dont les rues forment un quadrillage (Carcassonne ou Caracas, par exemple), les taxis choisissent toujours le chemin le plus court et ne font que les déplacements suivants : vers la droite, vers le haut. Voici deux chemins différents, parmi les plus courts, pour aller du carrefour A au carrefour K.



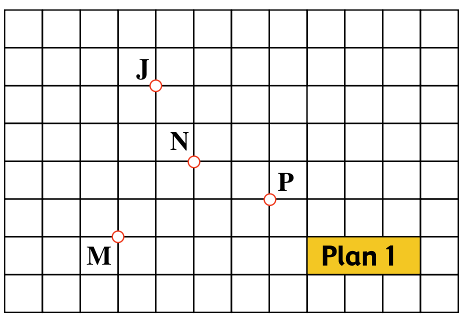


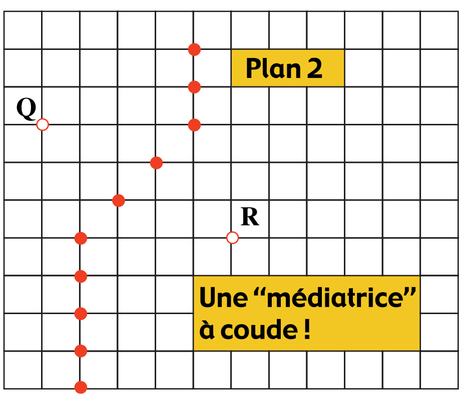
Dans le plan ci-contre, combien y a-t-il de plus courts chemins pour aller de A à B ? de A à C ? de A à D ? de A à E ? de A à H ? de A à un point de (AH) ? Connaissant le nombre de chemins plus courts pour aller de A à D et pour aller de A à E, peut-on connaître le nombre de plus courts chemins pour aller de A à F ? Et pour aller de A à X ?



Taxi, suivez cette médiatrice !

Toujours à Carcassonne, Jean habite en J et Pascal en P.
En taxi, le point M est à égale distance de J et de P (à 5 unités). Le point N aussi (à 3 unités).





Sur la figure de gauche, on a marqué beaucoup de points à égale distance de Q et de R.
À votre tour, marquez, sur une feuille quadrillée représentant le plan 1, tous les points à égale distance de J et P.
Si vous n’en oubliez pas, vous aurez une belle surprise !

Palindrome sur autodrome

Un coup d'œil au compteur de ma voiture montre le kilométrage suivant :

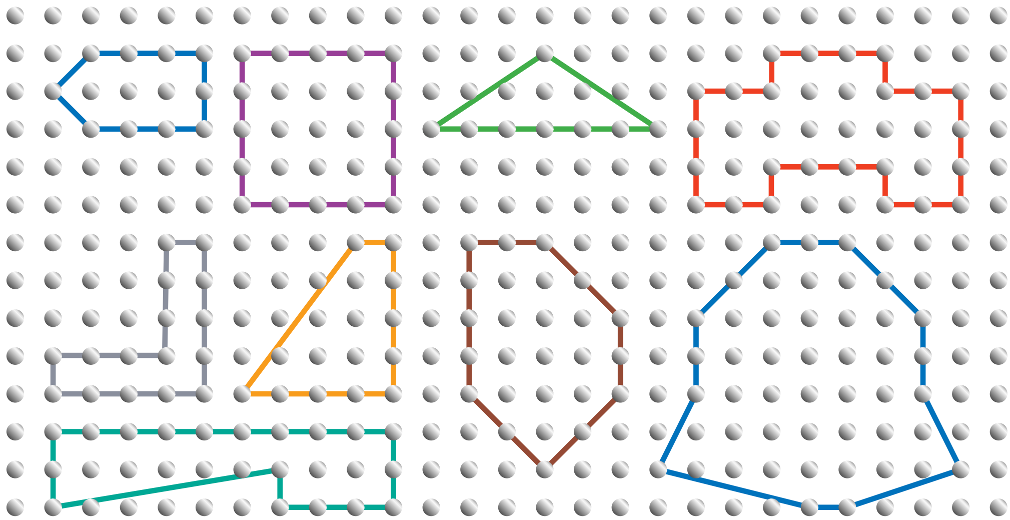
9 8 7 8 9

Ce nombre se lit, à la fois, comme d'habitude de gauche à droite, mais aussi dans l'autre sens, de droite à gauche (c'est un nombre “palindrome”, comme on dit).

Combien de fois cela arrivera-t-il encore avant de passer aux 100 000 km ?

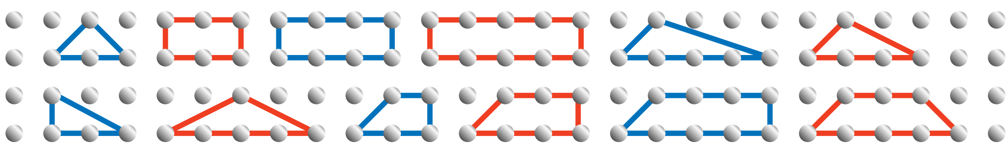
Le théorème de Monsieur Pick (pour les plus âgés)

Des clous sont disposés sur une planche et forment un quadrillage à mailles carrées. À l'aide d'élastiques, il est très facile de faire apparaître des polygones.



Georg Pick était professeur de mathématiques. Il fit paraître, à Prague, en 1899, un livre intitulé ***De la géométrie à la théorie des nombres*** (GEOMETRISCHES ZUR ZÄHLENTHEORIE). Il y propose une formule donnant l'aire du polygone entouré par l'élastique, uniquement calculée en comptant certains points du quadrillage.
Saurez-vous découvrir cette formule de Monsieur Pick ?

1)



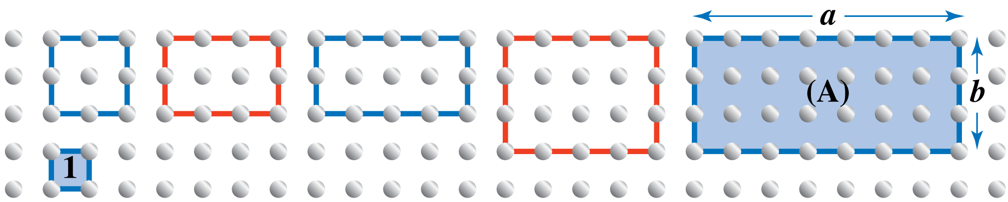
Sur les exemples du dessin 1, aucun polygone n'a de clou à l'intérieur. Pour chacun d'entre eux, comptez le nombre de clous (C) touchés par l'élastique et calculez l'aire A entourée (l'aire unité est celle de la maille carrée).

Trouvez une relation entre A et C.

C	A
4	1
6	2
8	3

2)

Voici maintenant des rectangles :



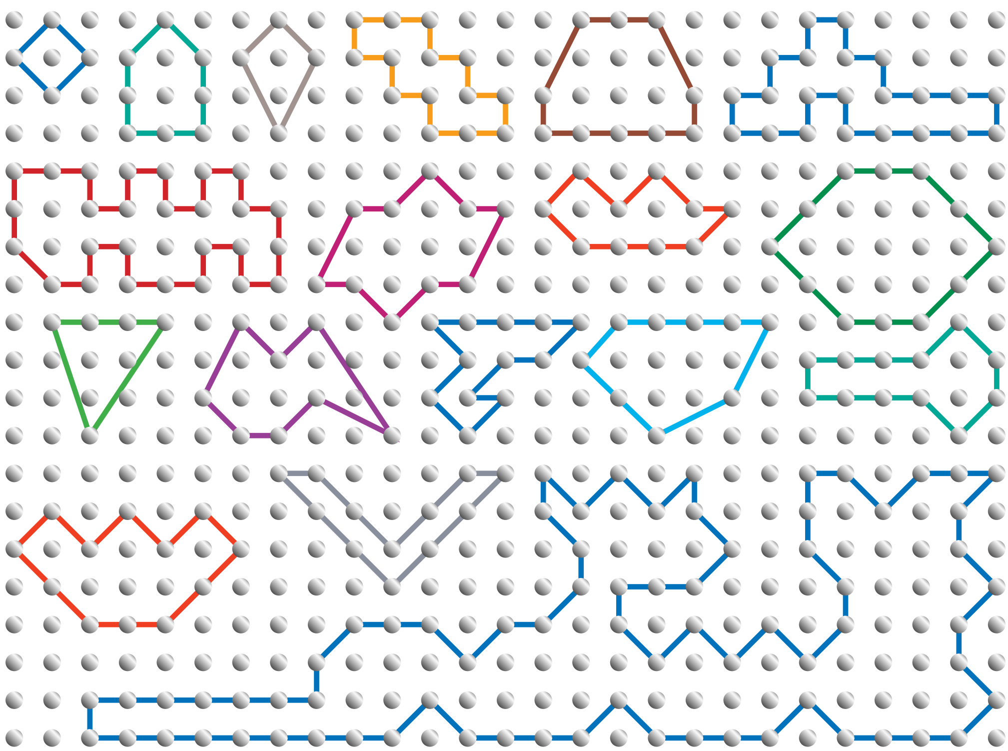
Si un rectangle a pour côtés *a* et *b*, combien y a-t-il de clous à l'intérieur (I) ? Combien y a-t-il de clous sur le pourtour (C) ? Quelle est son aire (A) ?

I	C	A
1	8	4
2	10	6

Trouvez une relation qui semble vérifiée par I, C et A.

3)

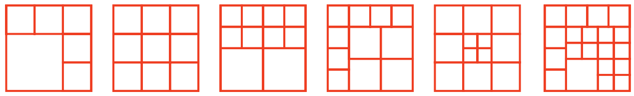
Tracez des polygones plus compliqués.
Par exemple :



Pensez-vous avoir découvert la formule de Monsieur Pick ?

Solutions des défis

1. Il est possible de partager un carré en 6 carrés, 9 carrés, 10 carrés, 11 carrés, 12 carrés et, d'ailleurs, en n'importe quel nombre de carrés sauf 2, 3 ou 5 !



2. Les réponses sont successivement (1, 6, 12, 8) pour $3 \times 3 \times 3 = 27$; et (27, 54, 36, 8) pour $5 \times 5 \times 5 = 125$.

3. Le serpent est composé de 24 petits cubes Et sur un cube mesurant 6 petits cubes de côté, le serpent est formé de 30 petits cubes.

4. 4 personnes : $1 + 2 + 3 = 6$ poignées de mains.
5 personnes : $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ poignées de mains.
6 personnes : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ poignées de mains.
7 personnes : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ poignées de mains.
8 personnes : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ poignées de mains.
Quand une $n^{\text{ième}}$ personne arrive, elle en salue $n - 1$.

5. Les traits mesurent successivement 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, …
Après $2n$ traits, la longueur de la spirale est $2 \times (1 + 2 + \ldots + n)$, soit :
6 pour 4 traits, 12 pour 6 traits, 20 pour 8 traits, 30 pour 10 traits, 36 pour 11 traits.

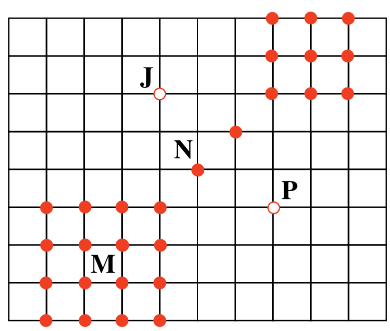
6. Les réponses sont (2, 5, 9, 14, 20, 27, 35) pour (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) côtés.
La formule pour un polygone à n côtés est $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

7. La somme des cubes est toujours égale au carré de la somme des hauteurs. Un cube de 5 de côté comporte 225 cubes et sa hauteur est 15.

8. B, C, D et E ont même périmètre (tout morceau parallèle à l'une des deux directions du quadrillage ne se retrouve qu'une fois). A et F ont un périmètre de 4 unités de plus.

9. Chemins de A à B : 3 ; de A à C : 1 ; de A à D : 4 ; de A à E : 6 ; de A à H : 1 ; de A à F : 10. Finalement (de proche en proche), de a à X : 70.

10. La « médiatrice » est dessinée ci-contre.



11. Après réflexion (c'est le cas de le dire), on s'aperçoit que tout nombre de 987 à 999 donne un nombre palindrome (992 par exemple donne 99299). Cela fait 12 palindromes, après 98789 jusqu'à 99999.

12. La justification peut se faire en remarquant que tout polygone peut se découper en triangles particuliers et en regardant ce qui se passe pour ces triangles lorsqu'on les unit.

1) $I = 0$. $A = \dfrac{C}{2} - 1$.

2) $I = (a - 1) \times (b - 1)$. $C = 2 \times (a + b - 1)$. Donc $A = a \times b = I + \dfrac{C}{2} - 1$.

3) La formule générale de Pick est : $A = I + \dfrac{C}{2} - 1$.