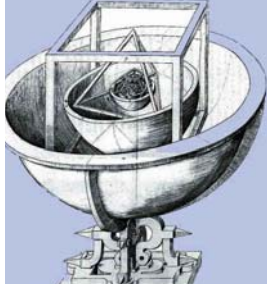


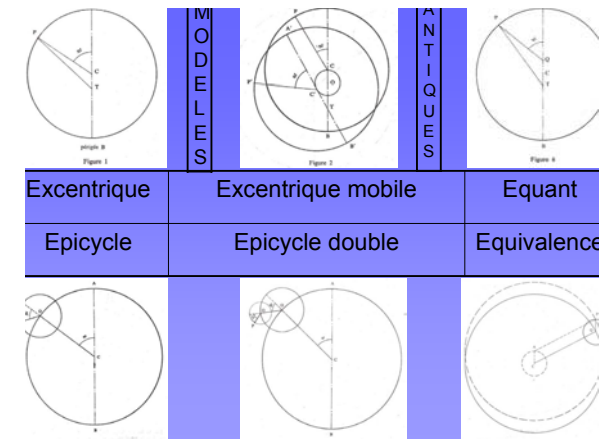
De KEPLER au GPS Choix et impact des modèles Pratiques pluridisciplinaires



François Sauvageot
Université Paris 7
Maître de conférences
Animateur à l'IREM

Plan

1. Etude d'un exemple historique : les modèles du système solaire en 1600.
 - Non équivalence de modèles et tests d'hypothèses
 - Version moderne des calculs
 - Premier rejet d'hypothèse historique
2. Modélisation du GPS
 - Principe
 - Liens au sein de la physique ou des mathématiques
 - Travaux interdisciplinaires connexes
 - Approfondissements



Exemple historique

- Le premier exemple de « rejet d'hypothèse » ou d'invalidation de modèle est très probablement dû à Kepler.
- Johannes Kepler est sans aucun doute le premier Copernicien convaincu, plus même que Copernic lui-même.
- Dans sa quête du « Mystère du Monde », Kepler cherche à obtenir une validation du système héliocentrique en donnant des tables célestes plus précises que toutes celles connues à son époque.
- Ce sera chose faite avec les « Tables Rudolphines » où, grâce à sa théorie de Mars, il obtient une précision inférieure à 2' d'arc. Et pour cela il doit invalider le modèle des orbites circulaires et donner les fameuses trois lois de Kepler dont la plus importante est peut-être celle qui donne le modèle lui-même : les planètes tournent autour du Soleil selon des orbites elliptiques.

Johannes Kepler (1571-1630)

- 1571 : Naissance à Weil der Stadt
- 1589 : Université de théologie de Tübingen
- 1594 : Professeur de mathématiques à l'école protestante de Graz
- 1595 : *Mysterium Cosmographicum*. Il relie les distances des planètes au Soleil aux solides platoniciens ...
« Je ne pourrai jamais décrire avec des mots le plaisir que j'ai eu en faisant cette découverte! »
- 1598 : rencontre avec Tycho Brahé
- 1600 : Mathématicien Impérial à Prague
- 1609 : *Astronomia Nova* (loi des ellipses et loi des aires)
- 1621 : *Epitome Astronomiae Copernicae* (T^2/a^3)
- 1627 : *Tables Rodolphines*. Prévission des conjonctions de Mercure et Vénus avec le Soleil. Précision de 2' d'arc !

Le système copernicien : un choix de modèle !

- C'est parce qu'il répond aux « questions importantes » que Kepler acquiert la conviction que le système copernicien est le seul valable.
 - Pourquoi Mercure et Vénus accompagnent toujours le Soleil, sans s'en écarter trop, alors qu'elles reviennent dans un même position en moins d'un an ?
 - Pourquoi ces mêmes planètes inférieures n'entrent-elles jamais en opposition avec le Soleil alors que les autres oui ?
- Il n'est pas vrai que des hypothèses sont équivalentes : ce n'est pas parce que grâce à deux systèmes différents on obtient la même description d'un phénomène que les deux sont valables ...

Astronomia Nova

- « *L'astre errant qui a le plus éprouvé la sagacité des astronomes, Mars, l'insobservable, vient de mettre bas les armes dans la guerre que le général Kepler a engagée contre lui.* »
- « *Par l'intermédiaire de sa mère la Nature, il a envoyé l'aveu de sa défaite, et l'Arithmétique et la Géométrie l'escortent sans résistance dans le camp de son vainqueur.* »
- C'est parce que Mars a l'excentricité la plus importante, Pluton et Mercure exceptés, que c'est elle qui est au centre des découvertes de Kepler. Tout comme ce sera Mercure qui sera la clef de la relativité générale, pour la même raison.

La « première » des trois

- Historiquement c'est la loi des aires la première que Kepler a établie.
- Pour pouvoir établir avec précision que le système copernicien rend compte de la réalité, Kepler a commencé par étudier le mouvement de la Terre.
- Il le trouve finalement circulaire, le Soleil étant très près du centre. Mais l'excentricité du Soleil le conduit à chercher comment le mouvement s'écarte d'un mouvement uniforme ...
- C'est ainsi que naît la loi des aires, pour la Terre, alors qu'elle y est la plus difficile à déceler.

La recherche de la vérité

- Kepler a écrit la pièce maîtresse de son œuvre comme aucun créateur ne le fit jamais : il confia au livre imprimé les méandres de ses démarches.
- L'itinéraire pour dépasser la situation fut difficile et sinueux. Dans un monde dominé par la philosophie d'Aristote, il ne pouvait en être autrement : la physique céleste ne pouvait naître qu'en s'appuyant sur la métaphysique.
- Tout comme Copernic s'était appuyé sur 7 postulats, Kepler cherche la vérité *a priori*. C'est Tycho Brahé qui le convaincra que seul un travail opéré *a posteriori* est un travail de précision. C'est l'alliance de ces deux points de vue, et le travail de toute une vie, qui permettra à Kepler d'être le premier à percer le secret du monde !

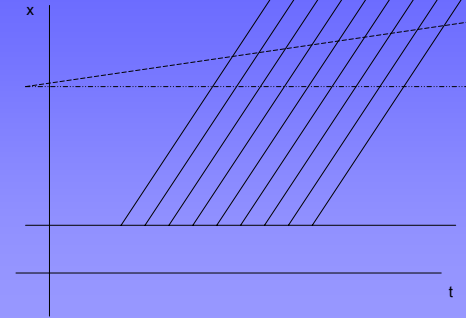
Problème supplémentaire

- Il est difficile de mesurer une distance. La méthode retenue par le GPS est de calculer le temps nécessaire à la lumière pour parcourir la distance. Connaissant la vitesse de la lumière, on en déduit la distance.
- L'utilisateur envoie donc un signal contenant l'instant d'émission. Le satellite renvoie la durée écoulée entre l'instant d'émission et celui de réception.
- Le problème est qu'il faut donc que les horloges soient synchronisées. C'est réalisable en pratique pour les 24 satellites, mais pas pour tous les systèmes GPS, à cause du coût d'une telle précision.

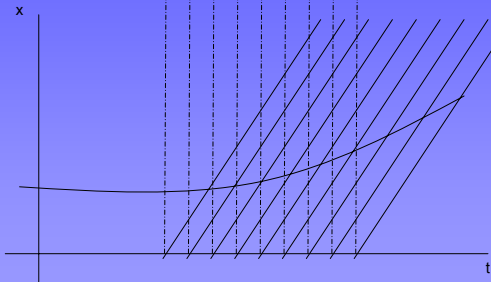
La physique de Kepler au GPS

- Le mouvement des satellites, les lois de Kepler :
 - La nature de la physique (céleste) et de ses modèles
 - Introduction de la gravitation universelle
 - Preuves du mouvement de la Terre
 - Etude des saisons ... des marées (erreurs de Galilée) ?
- Les horloges atomiques.
- Un modèle important : L'espace-temps.
 - Découverte de la vitesse de la lumière par Römer grâce aux satellites de Jupiter.
 - Lien avec les radars : mesures de distance, d'angle ou de vitesse.
 - Présentation de l'effet Doppler, lien avec Römer, mise en garde sur les couplages distance/vitesse.

Effet Doppler



Römer



La géométrie de Kepler au GPS

- La géométrie dans l'espace :
 - les sphères
 - plans tangents, rotations
- La géométrie plane :
 - Les coniques
 - Le modèle espace-temps, étude de l'effet Doppler, étude de la découverte de Römer
 - La trigonométrie
- Cinématique :
 - Les modèles : Hipparque, Ptolémée, Copernic, vicariant, Kepler
 - La composition des mouvements. Formules de trigonométrie, ouverture heuristique vers les séries de Fourier.

Les probas de Kepler au GPS

La désintégration atomique

Les tests d'hypothèse, introduction au χ^2 :

- Rejet des modèles de Copernic et vicariant
- Identification des variables pertinentes pour les tests de χ^2

- Pour un GPS

$$\min_{x,y} \sum_i \left(t + \frac{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}}{c} - t_i \right)^2$$

- Pour un radar

$$\min_{x,y} \left[\sum_i \frac{(\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - d_i)^2}{\sigma_i^2} + \sum_j \frac{(\text{Arctan}(y-y_j, x-x_j) - \theta_j)^2}{\sigma_j^2} \right]$$

Introduction aux intervalles de confiance

Expériences à réaliser « L'astronomie est un jeu d'enfant » éditions Le Pommier Mireille Hartmann, la main à la pâte

- Matériel : mappemonde, lampe, carton percé d'un trou, bâton, feutres, craies.
- Ronde des saisons : différence d'éclairage selon la saison
- Durée du jour et de la nuit
- Cadrons solaires (on pourra également les faire calculer exactement et vérifier avec la pratique)

Pistes pour T.P.E.

- Etude des météorites (Kepler, géologie)
- Etude des comètes : la plupart suivent une orbite elliptique (Kepler, géométrie, probas)
- Risques de collision d'objets célestes avec la Terre (Kepler, probas, atmosphère)
- Etude des exoplanètes (Kepler, Doppler)
- Modèles cosmologiques et « loi » de Titius-Bode (Kepler, régressions, solides platoniciens)

Développements

- Etude locale des fonctions :
 - dérivées première et seconde
 - développement de Taylor à l'ordre 1 ou 2
- Interaction statistiques – géométrie :
 - ellipses de confiance (hessienne)
 - notion de degrés de liberté
- Etude des trajectoires dans le cadre de la relativité générale (approximation au premier ordre = Kepler, avance du périhélie) :

$$d^2/d\theta^2(1/r) + 1/r = GM/\sigma + 3GM/c_0^2 \cdot (1/r)^2$$