



MODÉLISATION du TRAFIC ROUTIER

Journées régionales de l'APMEP
Institut Henri Poincaré - 3 avril 2004
François Sauvageot

Modélisation des « bouchons »

On souhaite comprendre comment se propage un bouchon et l'effet qu'il a sur le trafic routier (la vitesse des véhicules) en amont et en aval.

En particulier on s'intéresse aux questions suivantes :

- Quelle doit être la vitesse de recul du véhicule prévenant les automobilistes pour qu'ils ralentissent ?
- Quel est le temps de parcours pour aller d'un panneau lumineux jusqu'à un endroit donné ?

Position du problème

- ❖ Modéliser c'est faire des allers-retours incessants entre observation, théorie, prédiction
- ❖ Proposer un modèle c'est identifier différents paramètres, variables et caractéristiques du problème.
- ❖ Un modèle répond en général à une question précise. Changer ou affiner la question nécessite le plus souvent de changer ou d'affiner le modèle.

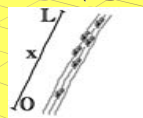
Les variables

- ❖ Ce sont elles qui peuvent être confrontées à l'observation, lors d'une simulation, et dont on peut se servir pour faire des prédictions. Pour valider le modèle, il faut que les prédictions soient consistantes avec les phénomènes observés.
- ❖ En aval de ces prédictions on peut tirer des conséquences sur des variables n'apparaissant pas dans le processus de modélisation. L'observation de ces variables permet également de valider ou invalider le modèle. On parfois de rajouter une hypothèse pour qu'il soit valide.

L'espace et le temps

- ❖ Il faut d'abord modéliser l'espace, c'est-à-dire essentiellement la route. Pour commencer, nous prendrons le cas d'une route à seule voie et x désignera l'abscisse d'un point sur cette route. La variable x peut prendre des valeurs réelles mais nous pourrions la restreindre à prendre des valeurs discrètes, à prendre des valeurs dans un intervalle compact ou encore dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (c'est le cas d'un circuit automobile) :

- $x \in \mathbb{R}$
- $x = 0, 1, 2, \dots$
- $x \in [0; L]$
- $x = \exp(it)$ avec $t \in \mathbb{R}$



- ❖ Il faut également modéliser le temps. Il s'agit d'une variable réelle t que l'on peut restreindre à un intervalle compact ou à un réseau discret.

Les voitures

- ❖ On peut commencer par étudier chaque voiture individuellement. On se donne donc un ensemble d'indices I et pour i dans I des voitures dont l'on peut, par exemple, donner des caractéristiques : la position $x_i(t)$ en fonction du temps, la vitesse $v_i(t)$ en fonction du temps.
- ❖ Il faut alors expliquer comment une voiture se comporte sur la route. Par exemple donner la vitesse « désirée » en fonction de la position, ce qui correspond à retranscrire l'impact de la route (courbure, visibilité, ralentisseurs, déformations etc.) sur les conducteurs. C'est alors amené à écrire v_i en fonction de x_i et donc à étudier une équation différentielle du premier ordre :
$$dx/dt = v(x).$$

Interactions

Mais cela traduit uniquement la « condition d'équilibre », c'est-à-dire l'état de la route si chaque voiture peut rouler à la vitesse qui lui convient, étant donnée la densité du trafic.

On peut affiner la description en rajoutant une description de l'accélération qui tienne compte de la position et de la vitesse relatives de chaque véhicule : autrement dit en modélisant l'interaction entre les véhicules.

Modèle microscopique

« Dans ce modèle, on cherche $x_i(t) \in \mathbb{R}$, $v_i(t) \in [0; v_m]$, $i=1 \dots N$ où v_m est la vitesse maximale.

« Le modèle le plus simple est celui de la file indienne : on ne s'intéresse qu'aux interactions entre véhicules qui se suivent. Un modèle couramment utilisé est

$$d^2x_i(t+T)/dt^2 = a \cdot v_i(t)^m [v_{i+1} - v_i] / [x_{i+1} - x_i]^n$$

où T est le temps de réaction ($T=0.45s$) et a, m, n sont des paramètres à ajuster.

- « Un raffinement tenant compte de facteurs psychophysiologiques consiste à introduire des valeurs de seuil où le conducteur ajuste sa vitesse (selon une équation du format précédent).
- « Concrètement on délimite des régions dans un diagramme $v_{i+1} - v_i$ en fonction $x_{i+1} - x_i$. À l'intérieur des régions, la vitesse est constante (accélération nulle) et, en franchissant une frontière la vitesse est ajustée selon une équation du type précédent. Voici un exemple de régionnement :



Modèle « algorithmique » (automates cellulaires)

- « Dans ce modèle, on discrétise l'espace et le temps : l'espace entre deux points successifs est de l'ordre de la taille d'une voiture et les instants successifs sont espacés d'une durée de l'ordre du temps de réaction d'un conducteur.
- « Une description de l'état du trafic est donnée par une suite de points $[x_i, v_i]$ où x_i et v_i sont des entiers reflétant la position et la vitesse du véhicule i . On suppose $0 \leq x_i < x_{i+1} \leq v_m$ et $0 \leq v_i \leq v_m$ pour i allant de 1 à N .
- « À chaque instant t_k on applique l'algorithme suivant :
 - Si $v_i \geq x_{i+1} - x_i$ alors v_i devient $x_{i+1} - x_i - 1$
 - Si $v_i < x_{i+1} - x_i$ alors v_i devient $v_i + 1$, sauf si $v_i = v_m$
 - Les véhicules avancent : x_i devient $x_i + v_i$
- « Pour modéliser les temps de réaction, le freinage trop important et les fluctuations autour de la vitesse maximale on peut rajouter une étape consistant à diminuer v_i de 1 avec une probabilité p .

Modèle « particulaire » (probabiliste)

On ne retient que les positions $x_i(t)$: l'espace est toujours discret, mais le temps est continu.

Chaque conducteur avance, s'il en a la possibilité, d'une case après avoir attendu un temps aléatoire. Autrement dit on se donne des temps T_i aléatoires (indépendants) et on pose

- $T = \inf T_i$ et j tel que $T_j = T$
- $x_i(u)$ est constante sur $[t, t+T]$ pour $i \neq j$
- $x_j(u)$ est constante sur $[t, t+T]$
- $x_j(t+T) = x_j(t) + 1$ si $x_{j+1}(t) > x_j(t) + 1$ et $x_j(t+T) = x_j(t)$ sinon.

Limite hydrodynamique

- « On suppose, dans le modèle précédent, que $x_i(t)$ est un multiple entier de ε , et on fait tendre ε vers 0 , de sorte que le nombre de « sites » tend vers $+\infty$.
- « La loi des grands nombres permet de démontrer la répartition des $x_i(t)$ admet une limite, qui peut être interprétée comme la « densité » $\rho(x, t)$ de véhicules en un point x et au temps t .
- « Ce genre d'interprétation « macroscopique » d'un phénomène microscopique est très présent en physique. Par exemple l'équation $PV = nRT$ n'est que le reflet d'une « agitation particulaire ». Il en va de même avec les fluides et, pour cette raison, on peut appliquer les méthodes de dynamique des fluides au trafic routier.
- « Notons également que le mouvement Brownien, découvert par le botaniste Brown, est une notion centrale ici et qu'il peut être approché au niveau lycée via les fluctuations d'échantillons et les premières sensibilisations à la Loi des grands nombres.

Modèle macroscopique

- « On peut retrouver cette limite hydrodynamique à partir du modèle microscopique.
- « On se donne la distribution $f(x, v, t)$ donnant le nombre (infinitésimal) de véhicules ayant la position x et la vitesse v au temps t et on obtient les notions suivantes à partir de :
- « La vitesse moyenne $V(x, t)$ au point x et au temps t :

$$V(x, t) = \frac{\int_0^{v_m} v f(x, v, t) dv}{\int_0^{v_m} f(x, v, t) dv} = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_0^{v_m} v f(x, v, t) dv$$

- « La densité $\rho(x, t)$ (nombre de véhicules par unité de longueur) et le flux $q(x, t)$ (nombre de véhicules par unité de temps) au point x et au temps t

$$q(x, t) = \rho(x, t) V(x, t) \quad \rho(x, t) = \int_0^{v_m} f(x, v, t) dv$$

Choix du modèle

Le modèle le plus directement adapté à la compréhension des bouchons est le modèle macroscopique. On va chercher comment décrire $\rho(x,t)$ à partir d'une densité initiale $\rho(x,0)$ donnée par une situation fluide $\rho(x,0)=\rho_*$ pour $x < x_0$ et une situation bouchonnée $\rho(x,0)=\rho_+ > \rho_*$ pour $x > x_0$.

Pour la simulation, il est certainement plus commande d'utiliser un modèle discret comme le modèle probabiliste ou les automates cellulaires.

Flux et densité

- On part donc de

$$q(x,t) = \rho(x,t) v(x,t)$$

ou encore

$$q(x,t) dt = \rho(x,t) dx$$

- Remarque : le flux et la vitesse peuvent s'obtenir par comptage, par exemple grâce à des câbles posés au sol. La densité de véhicules est plus difficile à mesurer directement, mais se déduit de cette relation.

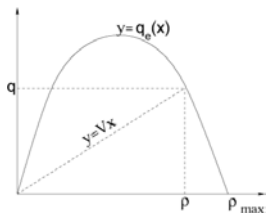
Relation caractéristique

- On cherche maintenant une relation entre flux et densité la forme

$$q = q_e(\rho)$$

- Cette relation explique comment les conducteurs ajustent leur vitesse (q/ρ) en fonction de la densité de trafic. En quelque sorte la route est « décrite » par cette fonction q qui est donc une « caractéristique » du modèle et variera d'une route à l'autre.
- Le graphe de q_e est appelé « graphe fondamental ». On verra qu'il contient toute l'information recherchée !
- La notation q_e indique qu'on s'intéresse à une condition d'équilibre du trafic : comme on l'a vu lors de l'étude du modèle microscopique, cela suppose que toutes les voitures roulent à la vitesse souhaitée, en réponse à la densité du trafic.

Exemple de graphe fondamental



Contraintes

- Dans l'exemple donné on peut constater que le modélisateur a imposé quelques contraintes :
- L'existence d'une densité maximale de véhicules ρ_{max} sur la route
- Le fait que $q_e(0) = q_e(\rho_{max}) = 0$
- La concavité de q_e

Explication des contraintes

- 0 correspond à l'absence de véhicule et donc on doit imposer $q_e(0) = 0$
- ρ_{max} est une densité pour laquelle les véhicules sont pare-chocs contre pare-chocs et donc pour laquelle $q_e(\rho_{max}) = 0$
- La fonction q_e doit évidemment être positive, mais ceci résultera de la concavité ...

Concavité

La vitesse $V=V(x,t)$ représente la pente de la droite joignant un point du graphe fondamental à l'origine et il est naturel de penser que la vitesse adoptée par les conducteurs décroît quand la densité de véhicules augmente.

Comme les fonctions concaves sont celles pour lesquelles les pentes des cordes du graphe décroissent quand l'abscisse du point étudié augmente, la concavité est une bonne garantie pour obtenir ce que l'on veut ...

Modèle affine des vitesses

- Un exemple simple pour assurer la concavité est de prendre un polynôme de degré 2.

$$q_e(\rho) = v_{\max} \cdot \rho (1 - \rho/\rho_{\max})$$

- Autrement dit la vitesse est une fonction affine de la densité $V = V_e = v_{\max}(1 - \rho/\rho_{\max})$

- En fait ce modèle de vitesse est celui que l'on obtient en passant à la limite hydrodynamique lorsque l'on choisit pour les temps aléatoires des temps suivant une loi exponentielle de paramètre $v_{\max}\rho_{\max} = 1/\tau$ et une distance $1/\rho_{\max}$ entre les sites. Le choix d'une loi exponentielle est très raisonnable puisqu'il donne lieu à des processus sans mémoire : on décide du futur uniquement en fonction du présent, et non du passé.

- Par ailleurs en modifiant un peu le modèle probabiliste (on rajoute une vitesse et on autorise plusieurs véhicules sur le même site), on peut montrer que la limite hydrodynamique donne naissance à des fonctions q_e qui décrivent exactement les fonctions de classe C^∞ concaves.

Equation du mouvement

- Le nombre de véhicules dans un tronçon infinitésimal étant ρdx , sa variation durant le temps dt est $\delta\rho/\delta t dx dt$
- Cette quantité représente donc le nombre de véhicules entrés dans le tronçon moins le nombre de véhicules sortis.
- C'est donc aussi $-\delta q/\delta x dx dt$

Equation du mouvement

Il vient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q_e(\rho)}{\partial x} = 0$$

ou encore

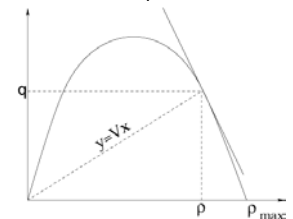
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + q_e'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

Propagation

- Les courbes caractéristiques sont les courbes $(x(t), t)$ le long desquelles ρ est constant.
- Ici il vient $x'(t) = q_e'(\rho)$, ce sont donc des droites de pente $q_e'(\rho)$.
- Autrement dit les «caractéristiques» de densité, débit, vitesse moyenne se propagent à la vitesse $q_e'(\rho)$, qui est distincte de la vitesse moyenne des véhicules $V = q_e(\rho)/\rho$.

Propagation

On peut utiliser le graphe fondamental pour visualiser la différence entre ces deux quantités.



Propagation

Cette remarque permet de déterminer $\rho(x, t)$ à tout instant, connaissant sa valeur en $t=0$, du moins dans une première approche.

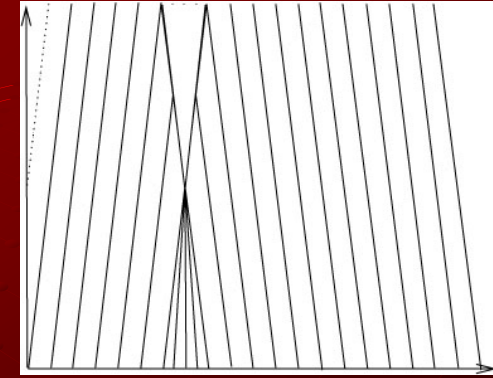
On a

$$\rho(x + q_e'(\rho(x, 0))t, t) = \rho(x, 0)$$

Chocs

Néanmoins, dans le plan (x, t) , ces droites caractéristiques ne sont parallèles entre elles que si $q_e'(\rho(x, 0))$ est constant, ce qui revient essentiellement à dire que $\rho(x, 0)$ l'est. On peut ainsi rencontrer deux types de difficultés :

- Un point (x, t) est atteint pas au moins deux caractéristiques, correspondant donc à des valeurs distinctes ρ .
- Un point (x, t) n'est atteint par aucune caractéristique et on ne peut donc pas calculer $\rho(x, t)$ par cette méthode.



Bouchons

Une façon d'étudier les bouchons est donc d'étudier les chocs. En effet un bouchon est par exemple modélisé par le passage d'une densité ρ_- faible à une densité ρ_+ élevée.

À la limite on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle vérifiant $\rho = \rho_-$ avant une certaine abscisse et $\rho = \rho_+$ après.

L'abscisse pour laquelle s'effectue cette rupture est, en fonction du temps, une « onde de choc ».

Ondes de choc

- De toute façon, le calcul précédent indique qu'il ne peut exister de solutions continues, même avec des conditions initiales continues, que dans un intervalle de temps petit.
- Au-delà, on est en présence d'une « onde de choc », i.e. une courbe paramétrée

$$\Omega = \{(x_c(t); t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

telle qu'il existe une solution ρ en dehors de Ω admettant des limites à gauche et à droite de Ω .

Condition de saut

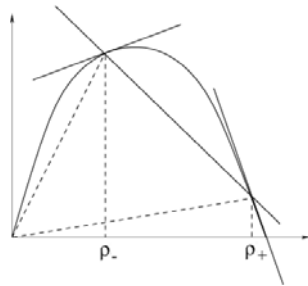
- La conservation du nombre de véhicules impose une condition de saut sur les limites à gauche et à droite de Ω :

$$\frac{q_e(\rho_+) - q_e(\rho_-)}{\rho_+ - \rho_-} = x_c'(t)$$

- On comprend ici la dénomination d'« onde de choc » : à sa traversée, les conditions du trafic sont brutalement modifiées. L'onde de choc se propage à la vitesse x_c' , vitesse que l'on vient de relier à la quantification de la discontinuité ρ .

Interprétation géométrique

L'onde de choc, c'est-à-dire le bouchon, se propage à une vitesse égale à la pente reliant les points du diagramme fondamental attachés aux valeurs limites à gauche et à droite.



Etude d'un bouchon

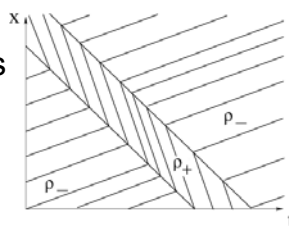
- Ainsi le diagramme fondamental permet de comprendre quelle est la vitesse à laquelle se « propage » un bouchon.
- Si un trafic fluide (par exemple $\rho_- = 40$), rencontre un bouchon (par exemple $\rho_+ = 100$), il y a un phénomène de « recul » du bouchon (concrétisé par le recul de la voiture de sécurité alertant les automobilistes).

Utilisation du graphe fondamental

- Sur le graphe fondamental, on lit (si $v_{max} = 110 \text{ km/h}$ et $\rho_{max} = 110 \text{ véh/km}$) :
 - la vitesse de propagation des courbes caractéristiques $q_e'(40) = 30 \text{ km/h}$ et $q_e'(100) = -90 \text{ km/h}$,
 - la vitesse de propagation de l'onde de choc $(q_e(100) - q_e(40)) / (100 - 40) = -30 \text{ km/h}$,
 - la vitesse de déplacement d'un véhicule soumis à une densité de trafic $\rho = 40$ ou $\rho = 100$: $q_e(40)/40 = 70 \text{ km/h}$ et $q_e(100)/100 = 10 \text{ km/h}$.

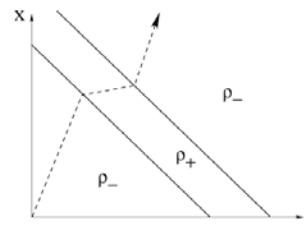
Ondes de choc

On en déduit les courbes caractéristiques (en supposant que le trafic redevient fluide après le bouchon).



Trajet d'un véhicule

- Et le déplacement d'un véhicule, le temps de parcours etc.



Simulations probabilistes

$\rho_- = 20, \rho_+ = 80, \rho_- = 20$ et $\rho_- = 40, \rho_+ = 80, \rho_- = 40$

