Master de Formation des Formateurs
Groupe Modélisation

Séance du 19 septembre 2003

Modélisation du trafic routier

François Sauvageot

Position du problème

- Modéliser le trafic routier c'est tenter de prédire des données quantifiées comme la vitesse des véhicules, la densité de trafic, le flux de voitures etc.
- Pour cela il faut identifier les différents paramètres, variables et caractéristiques du problème.

Les variables

- Ce sont elles qui peuvent être confrontées à l'observation, lors d'une simulation, et dont on peut se servir pour faire des prédictions.
- En aval de ces prédictions on peut tirer des conséquences sur des variables n'apparaissant pas dans le processus de modélisation.

Exemple

- On part d’une route sans intersection, modélisée par un intervalle [0;L]. Les variables étudiées sont
  - $v(x,t)$ la vitesse moyenne du véhicule situé en x au temps t
  - $\chi(x,t)$ la densité de véhicules par unité de longueur
  - $\phi(x,t)$ le flux de véhicules par unité de temps

Exemple

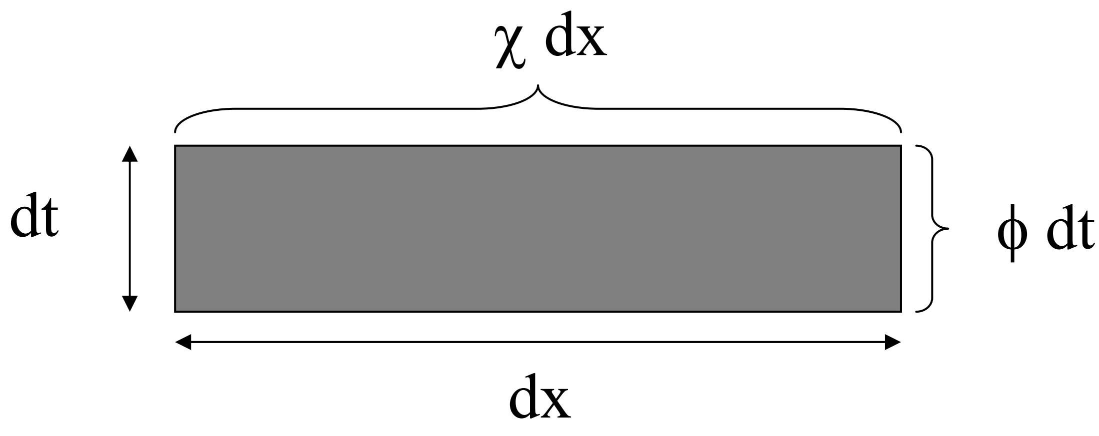
- Si on arrive à prédire ces quantités, on peut aussi s'intéresser
  - aux émissions de CO_2
  - au bruit du trafic
  - aux émotions ressenties par les conducteurs
- Ces dernières variables n'apparaîtront que dans l'analyse finale et non dans le corps de la modélisation …

Les caractéristiques

- Une fois les variables identifiées, il faut trouver des relations entre elles qui permettent de décrire l’évolution de la situation.
- Variant d’une situation à l’autre, il faudra donc les mesurer pour pouvoir étudier le problème et effectuer une simulation.

Exemple

- Dans l'exemple, une première relation purement formelle est obtenue à partir du nombre de véhicules par unité de longueur et par unité de temps.



Exemple

- On a donc $\phi(x,t)\, dt = \chi(x,t)\, dx$
- Ou encore $\phi(x,t) = \chi(x,t)\, v(x,t)$
- Comme le flux et la vitesse peuvent s'obtenir par comptage, par exemple grâce à des câbles posés au sol, cette relation permet de calculer la densité de véhicules, ce qui est plus difficile à mesurer directement …

Exemple

- On cherche maintenant une relation entre flux et densité de la forme

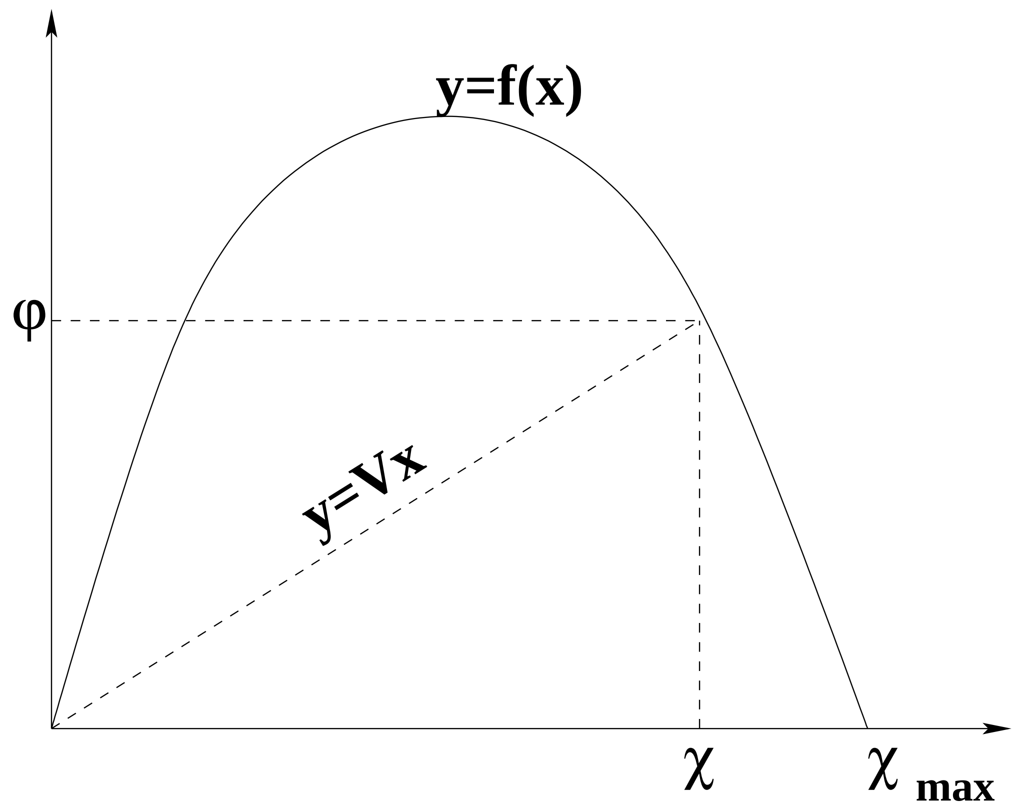
$$\phi = f(\chi)$$

- En quelque sorte la route est « décrite » par cette fonction f, qui est donc une «caractéristique » du modèle et variera d'une route à l'autre.
- Le graphe de f est appelé « graphe fondamental ».

Exemple

- Quand on cherche à « mesurer » une fonction se pose la question de la méthode puisque les observations fourniront au mieux quelques relations entre des flux et des densités observées.
- Idéalement le mathématicien espère obtenir une fonction …

Exemple de graphe fondamental



Contraintes

- Dans l’exemple donné on peut constater que le modélisateur a imposé quelques contraintes:
- L’existence d’une densité maximale de véhicules χ_{max} sur la route
- Le fait que $f(0)=f(\chi_{max})=0$
- La concavité de f

Explication des contraintes

- 0 correspond à l'absence de véhicule et donc on doit imposer f(0)=0
- χ_{max} est une densité pour laquelle les véhicules sont pare-chocs contre pare-chocs et donc pour laquelle $f(\chi_{max})=0$
- La fonction f doit évidemment être positive, mais ceci résultera de la concavité …

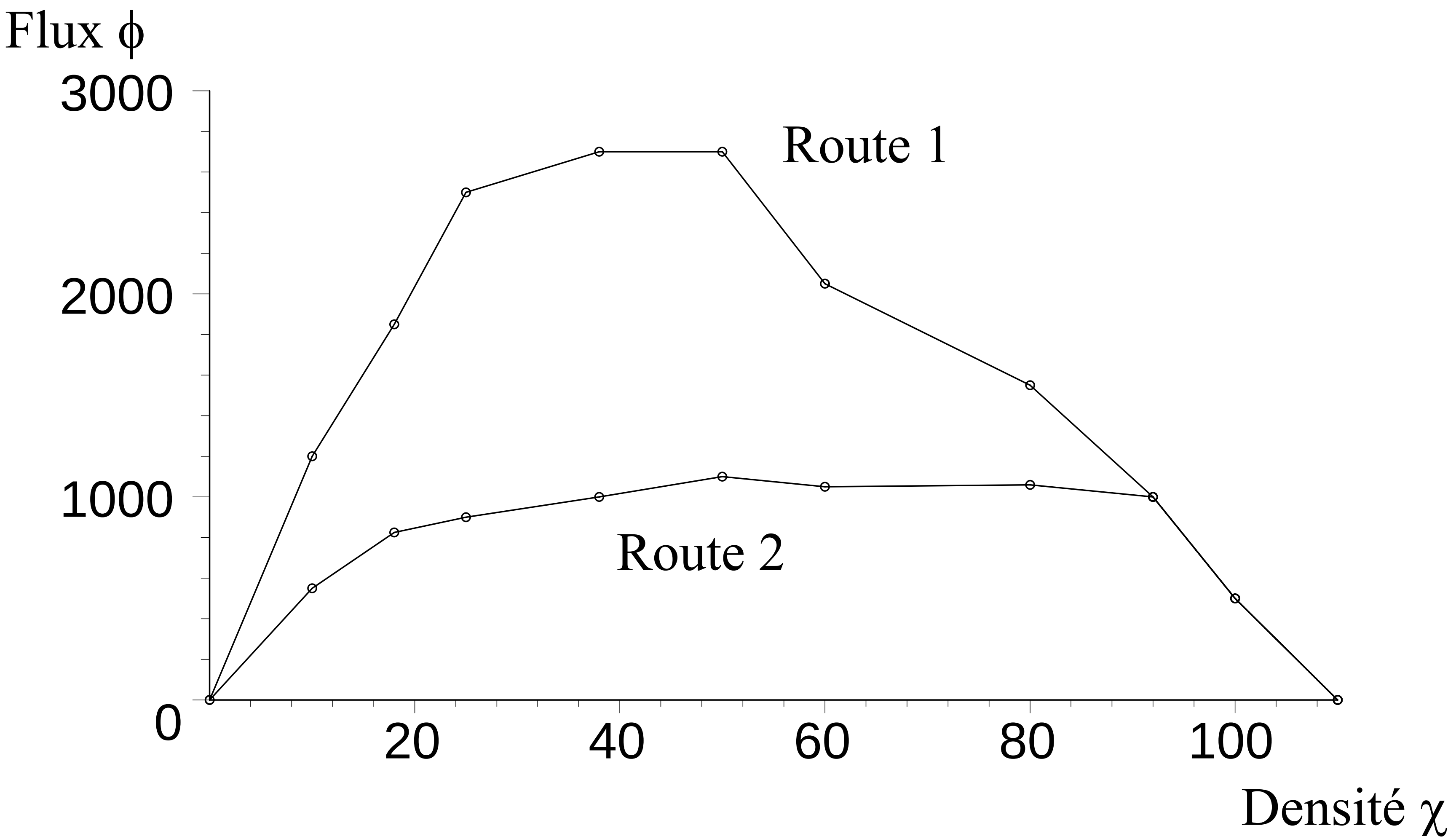
Concavité

- La vitesse v représente la pente de la droite joignant un point du graphe fondamental à l’origine et il est naturel de penser que la vitesse adoptée par les conducteurs décroît quand la densité de véhicules augmente.
- Comme les fonctions concaves sont celles pour lesquelles les pentes des cordes du graphe décroissent quand l’abscisse du point étudié augmente, la concavité est une bonne garantie pour obtenir ce que l’on veut …

Modélisation et réalité

- Dans la pratique on obtient pas facilement de fonction concave par des nuages de points ou des approximations par morceaux.
- Par exemple une approximation linéaire par morceaux a très peu de chances d'être concave dès que l'on s'autorise des erreurs d'observation

Exemples d'observations



Interpolation polynomiale

- L'interpolation polynomiale consiste à choisir n+1 points consécutifs du graphe et à trouver l'unique polynôme de degré au plus n dont le graphe passe par ces points
- On peut aussi, par exemple, demander de passer par 2 points mais en « recollant » les dérivées. On obtient alors 4 contraintes et donc des polynômes de degré en général 3

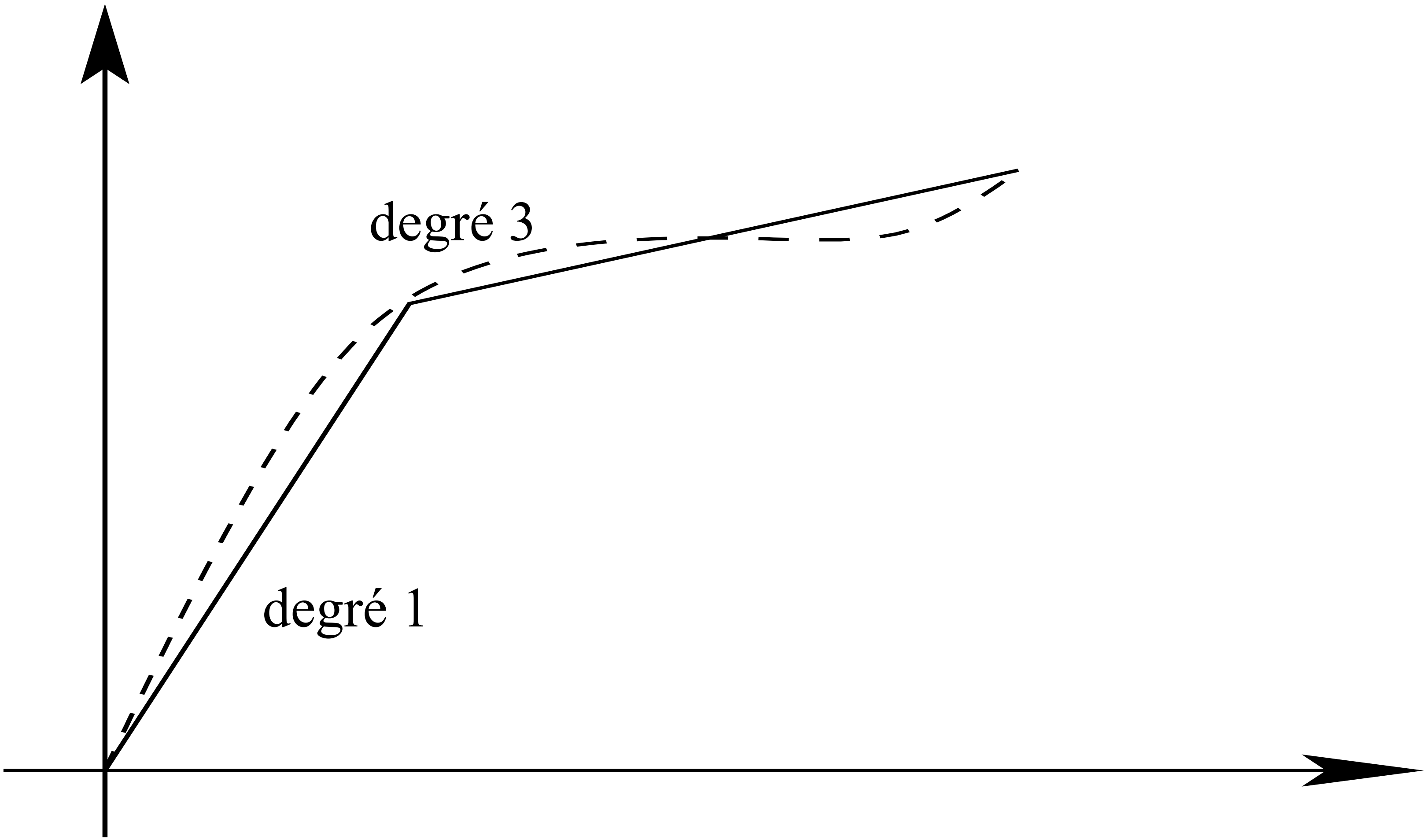
Interpolation polynomiale

- L'inconvénient des polynômes de bas degré (comme 1) est que l'on se retrouve avec des fonctions peu régulières (tout au plus continues) et que les schémas numériques qui les utilisent vont souffrir de cette faible régularité, donnant des simulations des plus folkloriques …

Interpolation polynomiale

- L’inconvénient des polynômes de haut degré (dès que l’on dépasse 3 en fait) est qu’ils sont en général tout sauf concaves !
- La concavité revient en fait à rajouter 2 conditions puisque c’est une condition sur la négativité de la dérivée seconde.

Illustration du problème



Stratégie

- Comme on l’a vu, c’est en degré 2 que l’on a le plus de chances de s’en sortir et, au vu des autres contraintes, le plus simple est de choisir comme modélisation

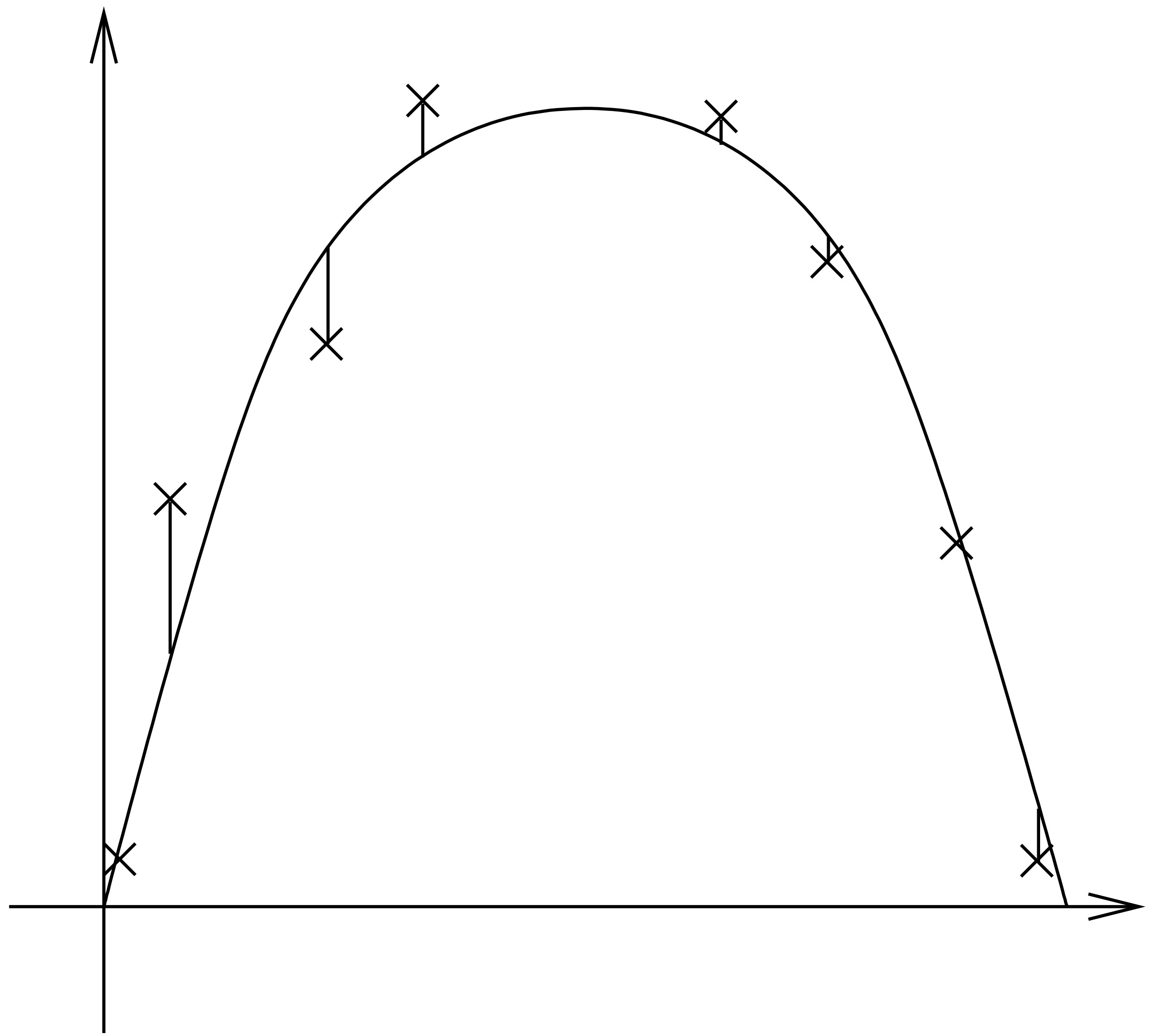
$$\phi = a\chi(\chi_{max}-\chi)$$

- Ce qui revient à dire que la vitesse est une fonction affine décroissante de la densité.

Une autre stratégie?

- Si l’on veut jouer un peu plus avec les contraintes, on peut chercher une approximation au sens des moindres carrés, autrement dit minimiser la somme des carrés des écarts « verticaux » entre les points du graphe observés et ceux d’un polynôme approximateur

Méthode des moindres carrés



Remarque

- Si on cherche a dans la relation

$$\phi = a\chi(\chi_{max}-\chi)$$

on peut le trouver en minimisant une certaine quantité, par exemple la somme des carrés des écarts verticaux au graphe observé …mais on peut aussi ajuster la vitesse maximale, le flux moyen etc.

Obtention d'un schéma numérique

- Le nombre de véhicules dans un tronçon infinitésimal étant χdx, sa variation durant le temps dt est $\delta\chi/\delta t \, dxdt$
- Cette quantité représente donc le nombre de véhicules entrés dans le tronçon moins le nombre de véhicules sortis.
- C'est donc aussi $-\delta\phi/\delta x \, dxdt$

Obtention d'un schéma numérique

Il vient

$$\delta\chi/\delta t + \delta f(\chi)/\delta x = 0$$

ou encore

$$\delta\chi/\delta t + f'(\chi)\, \delta\chi/\delta x = 0$$

Discrétisation

- Pour implémenter un schéma numérique on fait un maillage en espace et en temps, autrement dit on cherche à calculer

$$\chi^n_j = \chi(j\Delta x, n\Delta t)$$

- Où Δx représente une longueur élémentaire et Δt un temps élémentaire

Discrétisation

On approxime la dérivée par la pente

$$\delta\chi/\delta t(j\Delta x, n\Delta t) = (\chi^{n+1}{}_j - \chi^n{}_j)/\Delta t$$

ou encore, pour plus de stabilité numérique

$$\delta\chi/\delta t(j\Delta x, n\Delta t) = (\chi^{n+1}{}_j - \chi^{n-1}{}_j)/2\Delta t$$

Discrétisation

De même

$$\Delta f(\chi)/\delta x(j\Delta x,n\Delta t)=(\chi^n{}_{j+1}-\chi^n{}_j)/\Delta x$$

ou encore, pour plus de stabilité numérique

$$\Delta f(\chi)/\delta x(j\Delta x,n\Delta t)=(f(\chi^n{}_{j+1})-f(\chi^n{}_{j-1}))/2\Delta x$$

Discrétisation

D'où le schéma numérique

$$(\chi^{n+1}{}_{j}-\chi^{n-1}{}_{j})\Delta x+(f(\chi^{n}{}_{j+1})-f(\chi^{n}{}_{j-1}))\Delta t=0$$

Paramètres

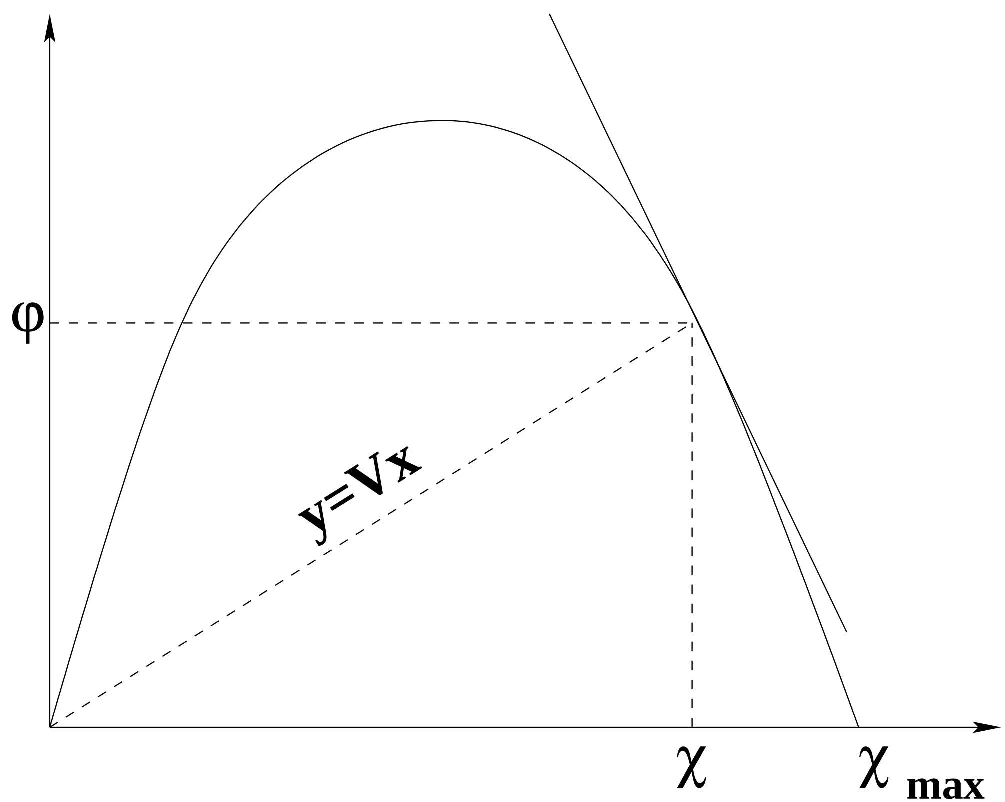
- Avec un tel schéma numérique on peut effectuer des simulations, il suffit de se donner les paramètres du problème :
  - La densité initiale (χ^0_j)
  - Le trafic entrant (χ^n_0)

Propagation

- Les courbes caractéristiques sont les courbes $(x(t),t)$ le long desquelles χ est constant.
- Ici il vient $x'(t)=f'(\chi)$, ce sont donc des droites de pente $f'(\chi)$.
- Autrement dit les «caractéristiques» de densité, débit, vitesse moyenne se propagent à la vitesse $f'(\chi)$, qui est distincte de la vitesse moyenne des véhicules $v=f(\chi)/\chi$.

Propagation

On peut utiliser le graphe fondamental pour visualiser la différence entre ces deux quantités.



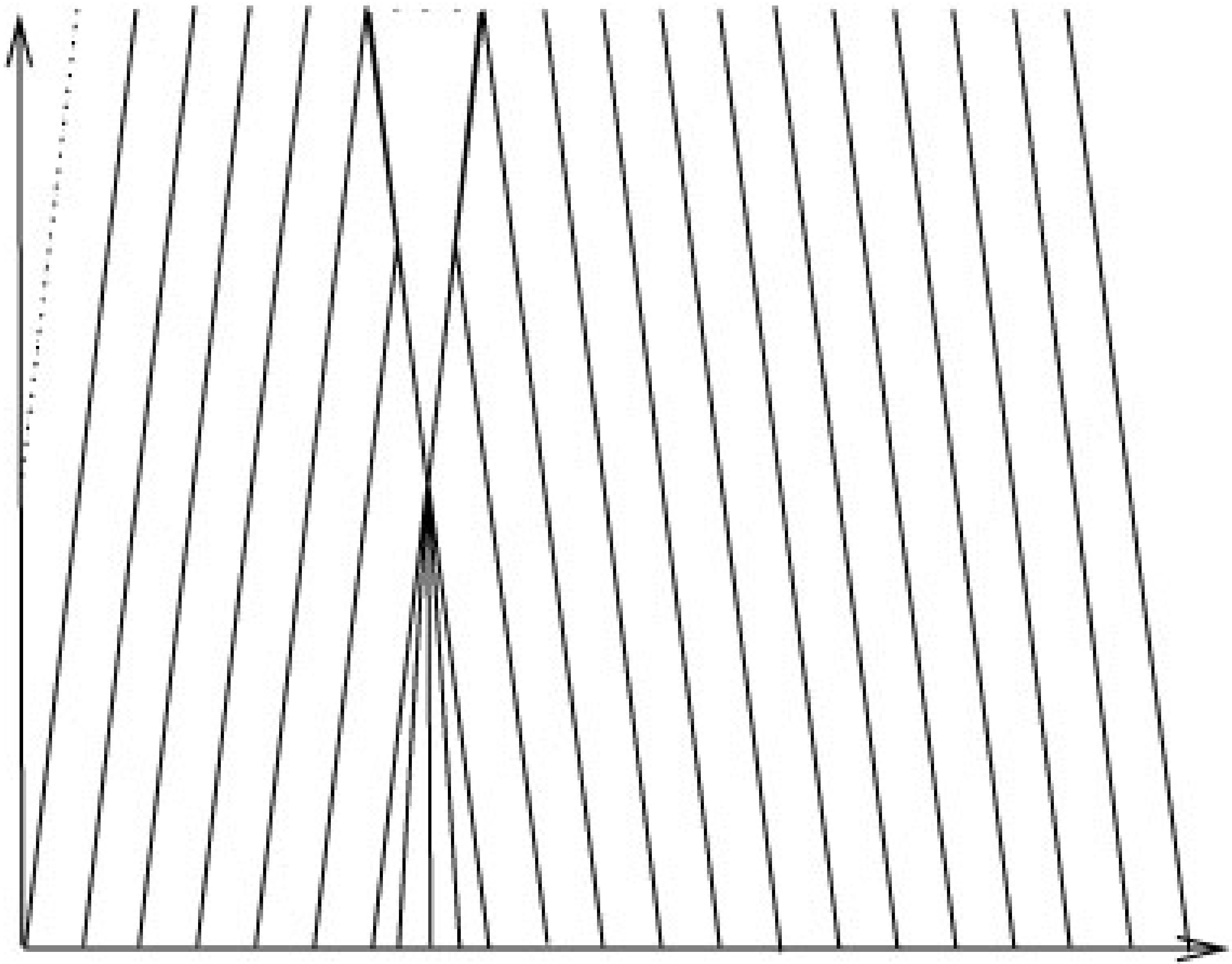
Propagation

- Cette remarque permet de déterminer χ à tout instant, connaissant sa valeur en t=0, du moins dans une première approche : on a

$$\chi(x+f''(\chi(x,0))t,t)=\chi(x,0)$$

Chocs

- Néanmoins, dans le plan (x,t), ces droites caractéristiques ont peu de chances de recouvrir le carré [0;L]x[0,T]. On peut rencontrer deux difficultés :
  - Un point (x,t) est atteint pas au moins deux caractéristiques, correspondant donc à des valeurs distinctes χ.
  - Un point (x;t) n'est atteint par aucune caractéristique.



Ondes de choc

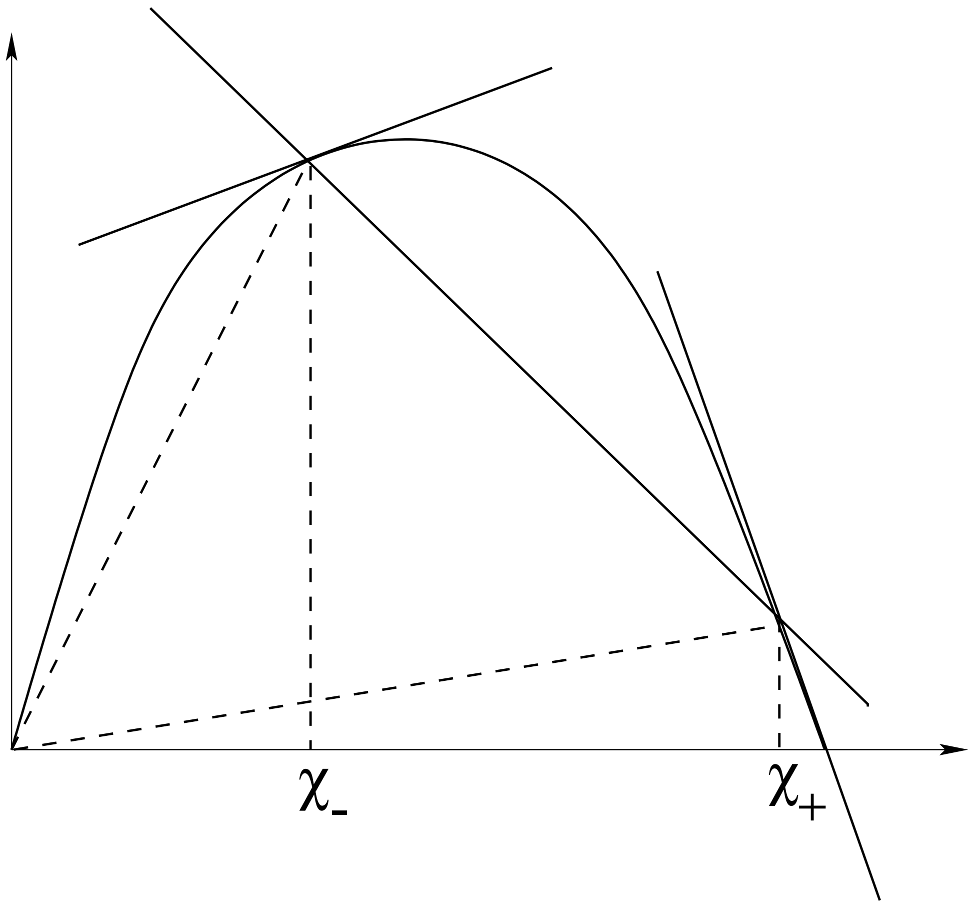
- La conséquence du calcul précédent est qu'il ne peut exister de solutions continues, même avec des conditions initiales continues, que dans un intervalle de temps petit.
- On trouve alors une « onde de choc », i.e. une courbe paramétrée $\Omega=\{(x_c(t);t) \mid t\in[0;T]\}$ telle qu'il existe une solution χ en dehors de Ω admettant des limites à gauche et à droite de Ω vérifiant

$$(f(\chi_+)-f(\chi_-)) / (\chi_+-\chi_-) = x'_c(t)$$

- On comprend ici la dénomination d'« onde de choc » : à sa traversée, les conditions du trafic sont brutalement modifiées. L'onde de choc se propage à la vitesse x'_c, vitesse que l'on vient de relier à la quantification de la discontinuité de χ.

Interprétation géométrique

- L'onde de choc se propage à une vitesse égale à la pente reliant les points du diagramme fondamental attachés aux valeurs limites à gauche et à droite.



Etude d’un bouchon

- Ainsi le diagramme fondamental permet de comprendre à quel vitesse se « propage » un bouchon.
- Si un trafic fluide (par exemple χ=40), rencontre un bouchon (par exemple χ=100), il y a un phénomène de « recul » du bouchon (concrétisé par le recul de la voiture de sécurité alertant les automobilistes).

Utilisation du graphe fondamental

- Sur le graphe fondamental, on lit
  - la vitesse de propagation des courbes caractéristiques

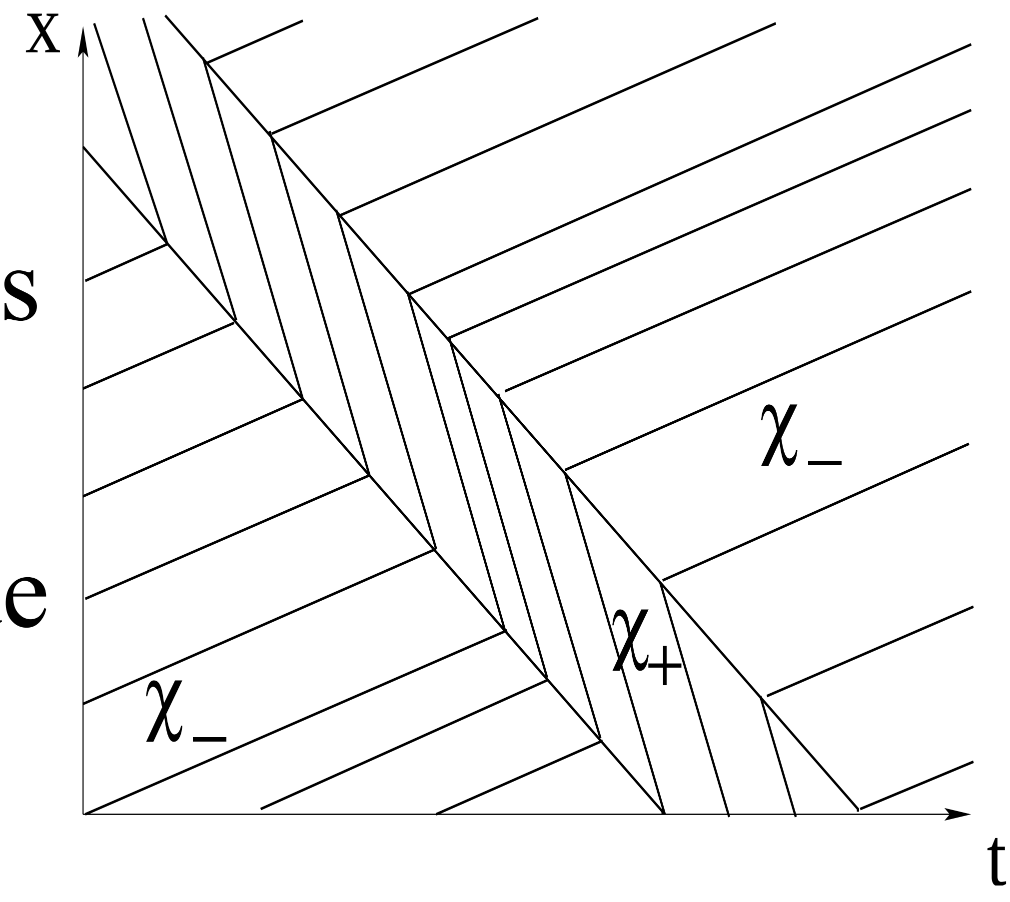
    $f'(40)=30$km/h et $f'(100)=-90$km/h,
  - la vitesse de propagation de l'onde de choc

    $(f(100)-f(40))/(100-40)=-30$km/h,
  - la vitesse de déplacement d'un véhicule soumis à une densité de trafic $\chi=40$ ou $\chi=100$

    $f(40)/40=70$km/h et $f(100)/100=10$km/h.

Ondes de choc

- On en déduit les courbes caractéristiques (en supposant que le trafic redevient fluide après le bouchon).



Trajet d’un véhicule

- D’où le déplacement d'un véhicule
- et on peut, par exemple, en déduire le temps de parcours.