

# Modélisation du trafic routier

François Sauvageot

5 mai 2002

## 1 Position du problème

L'objet de l'étude est de modéliser le trafic routier sur une portion de route sans intersection, modélisée par un intervalle  $[0, L]$ . On introduit une loi de conservation et une relation empirique entre le flux de véhicules  $\varphi$  et leur densité  $\chi$ . Grâce à ce modèle, on peut donner une équation aux dérivées partielles vérifiée par la densité de véhicules. Il devient alors possible d'estimer une vitesse optimale sur la route considérée et d'étudier la vitesse de propagation d'un bouchon (dû à un accident par exemple) en fonction de la densité de véhicules à l'instant de l'évènement.

Dans cette étude, on va surtout s'intéresser à la modélisation mathématique du phénomène plus qu'aux estimations qui en dérivent (celles qu'on vient d'évoquer). Le premier élément à modéliser est la relation empirique  $\varphi = f(\chi)$  décrivant le comportement des conducteurs confrontés à une certaine densité de véhicules, i.e. décrivant la vitesse moyenne  $(\varphi/\chi)$  adoptée lors d'un certain trafic ( $\chi$ ). Cette relation est obtenue à partir d'observations ponctuelles, sujettes à erreur, et il est raisonnable d'adopter une approximation de  $f$  par la méthode des moindres carrés. Néanmoins on a besoin d'un certain nombre de propriétés de  $f$  afin de refléter la réalité et de garantir le comportement de  $\chi(x, t)$  déduit de l'équation aux dérivées partielles. Ici  $x$  est la variable d'espace ( $x \in [0, L]$ ) et  $t$  la variable temporelle ( $t \in \mathbf{R}_+$ ).

La densité est un réel positif, inférieur à une certaine densité  $\chi_{max}$  correspondant à une impossibilité de mouvement. La fonction  $f$  est donc définie sur l'intervalle  $[0, \chi_{max}]$ , nulle aux bornes : sans véhicule ou lorsqu'ils se touchent tous, il n'y a pas de circulation.

De plus  $\varphi/\chi$  représente la vitesse instantanée des véhicules (au point  $x$  et à l'instant  $t$ ). C'est *a priori* une fonction décroissante de  $\chi$ . Puisque  $\varphi/\chi$  est la pente entre le point  $(0, f(0))$  et le point  $(\chi, f(\chi))$ , il semble raisonnable, afin de garantir cette décroissance, d'imposer la concavité de  $f$ .

Au final on cherche donc, à partir de données observées, à reconstituer une fonction sur un intervalle  $[0, \chi_{max}]$  qui soit dérivable, nulle aux bornes et concave. La méthode des moindres carrés pour donner une approximation polynomiale rencontre alors quelques problèmes : la concavité est facile à obtenir en degré petit, mais la nullité aux bornes ne s'obtient qu'en degré élevé. En particulier, plus l'approximation est bonne, plus on est sûr de ne pas obtenir une approximation concave.

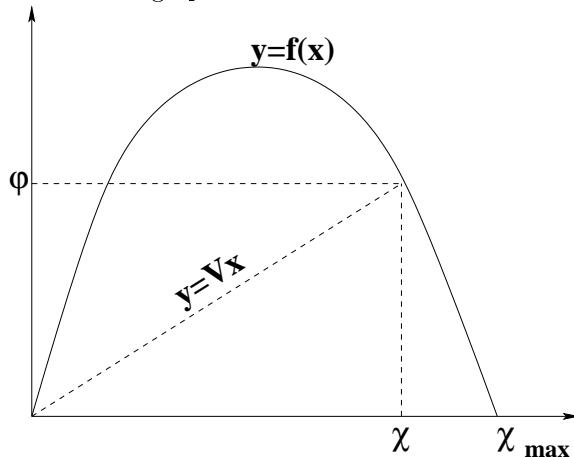
## 2 Graphe fondamental

On modélise une portion de route (à sens unique et sans croisement ni bifurcation) :

1.  $x$  désigne la distance par rapport au début de la route ; c'est un réel variant entre 0 et une certaine quantité positive  $L$
2.  $t$  représente le temps ; c'est un réel positif.
3.  $V(x; t)$  est la vitesse moyenne des véhicules au point  $x$  et à l'instant  $t$  (s'il y a plusieurs files, on fait la moyenne des vitesses de chacun des véhicules) ; c'est un réel positif.
4.  $\varphi(x; t)$  est le nombre de véhicules par unité de temps passant au point  $x$  et à l'instant  $t$  (on appelle également cette quantité le flux moyen instantané) ; c'est un réel positif.
5.  $\chi(x; t)$  est le nombre de véhicules par unité de longueur au point  $x$  et à l'instant  $t$  (on appelle également cette quantité la densité moyenne instantanée) ; c'est un réel compris entre 0 et  $\chi_{max}$ .

Puisque  $\varphi dt = \chi dx$ , on a en fait  $\chi V = \varphi$ .

Les observations permettent d'obtenir une relation empirique entre les quantités  $\varphi$  et  $\chi$  :  $\varphi = f(\chi)$  où  $f$  est une fonction de  $[0; \chi_{max}]$  dans  $\mathbf{R}$  concave, régulière (une ou deux fois dérивables), vérifiant  $f(0) = f(\chi_{max}) = 0$ . Les deux lois se résument dans le graphe fondamental :



La relation fondamentale lie le débit  $\varphi$  en véhicules/heure et la densité  $\chi$  en véhicules/km (de sorte que la vitesse  $\varphi/\chi$  est exprimée en km/heure). Chaque point de cette courbe caractérise une situation de trafic, et la pente de la droite qui le joint à l'origine donne la vitesse moyenne des véhicules.

Pour les besoins de nos applications numériques, la fonction  $f : \chi \mapsto \varphi$  sera approchée par un polynôme. On dispose de tables de données expérimentales caractérisant chaque portion de route. Une manière efficace d'approcher  $f$  est d'ajuster un polynôme, éventuellement sous des contraintes exprimant la concavité, par une méthode de moindres carrés.

Remarque : d'un point de vue pratique, il n'est pas toujours très rationnel d'utiliser la densité pour spécifier l'état à l'entrée de la portion de route, mais il est possible de la déduire à l'aide du flux  $\varphi$  qui s'obtient par un simple comptage.

### 3 Fonctions concaves

Le comportement d'une route est modélisé par une réponse à une densité donnée par un certain flux. On l'étudie en se donnant un certain nombre d'observations. Ainsi on a  $m + 1$  observations  $(\chi_k, \varphi_k)_{0 \leq k \leq m}$  et on veut en déduire une relation  $\varphi = f(\chi)$  où  $f$  est une fonction dérivable sur  $[0, \chi_{max}]$  ayant les propriétés suivantes :

1.  $f(0) = f(\chi_{max}) = 0$ ,
2.  $f$  est concave sur  $[0; \chi_{max}]$ .

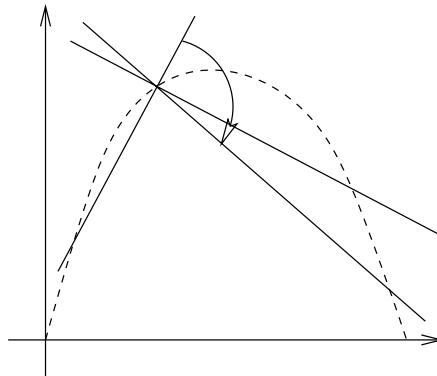
Rappelons qu'une fonction concave sur  $[0; \chi_{max}]$  est une fonction vérifiant, pour  $x$  et  $y$  quelconque dans  $[0; \chi_{max}]$  et  $\lambda$  dans  $[0; 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

En d'autres termes le graphe de  $f$  est au-dessus de ses cordes.

Une telle fonction est dérivable à gauche et à droite en tout point de  $]0; \chi_{max}[$  et ces deux dérivées, notées respectivement  $f'_g$  et  $f'_d$ , sont des fonctions décroissantes sur  $]0; \chi_{max}[$ . De plus, pour tout  $x$  dans  $]0; \chi_{max}[$ , on a  $f'_g(x) \geq f'_d(x)$ . En fait, lorsque  $f$  est dérivable (ce qui se traduit par  $f'_g = f'_d$ ), la concavité de  $f$  est équivalente à la décroissance de  $f'$ . Pour cette raison, lorsque  $f$  est deux fois dérivable, la concavité de  $f$  est équivalente à la négativité de  $f''$ .

Une autre propriété remarquable des fonctions concaves est que la pente d'une corde tracée sur la graphe est une fonction décroissante de chacune des extrémités.



En termes mathématiques, en fixant  $x$  dans  $[0; \chi_{max}]$ , la fonction  $\delta_{f,x}$  définie sur  $[0; \chi_{max}] \setminus \{x\}$  par

$$\delta_{f,x}(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

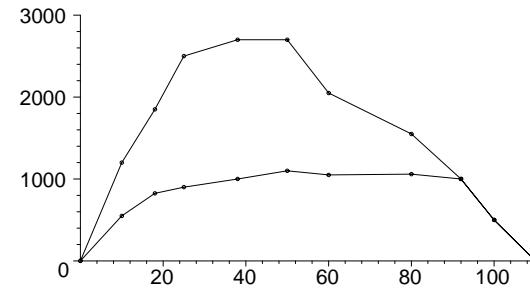
est une fonction décroissante. Les limites à droite et à gauche de  $\delta_{f,x}$  en  $x$  sont, quand elles existent, les dérivées à droite et à gauche de  $f$  en  $x$ .

Puisque, pour  $\chi$  dans  $]0; \chi_{max}]$ ,  $f(\chi)/\chi$  n'est rien d'autre que  $\delta_{f,0}(\chi)$  et représente la vitesse  $V$ , on impose la concavité de  $f$  de façon à garantir la décroissance de  $\delta_{f,0}$ . Remarquons que cette dernière propriété, conjointe au fait que  $f(\chi_{max}) = 0$  entraîne en particulier que  $\delta_{f,0}$  est positive sur  $]0; \chi_{max}]$  et donc la positivité de  $f$  sur  $[0, \chi_{max}]$  (ce qui est une condition qu'il est naturel et nécessaire d'imposer).

## 4 Approximation au sens des moindres carrés

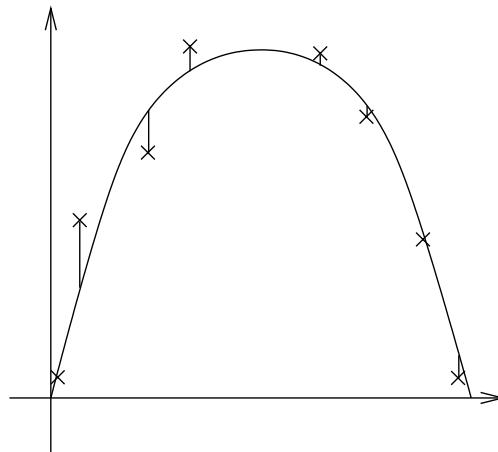
Voici deux exemples de routes (une autoroute et une route de campagne), i.e. deux exemples de données  $(\chi_k, \varphi_k)_{0 \leq k \leq m}$ , avec  $m = 10$  :

$\chi$	Route 1	Route 2
$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$
0	0	0
10	1200	550
18	1850	825
25	2500	900
38	2700	1000
50	2700	1100
60	2050	1050
80	1550	1060
92	1000	1000
100	500	500
110	0	0



Se pose maintenant la question de savoir comment on mesure la pertinence de l'approximation. Le procédé des moindres carrés consiste à minimiser la somme des carrés des écarts verticaux entre la fonction cherchée (ici un polynôme ayant un certain nombre de propriétés) et les données observées, i.e. à trouver

$$\min_P R(P; \varphi, \chi) \quad \text{où} \quad R(P; \varphi, \chi) = \sum_{k=0}^m (\varphi_k - P(\chi_k))^2.$$



Justifions quelque peu cette démarche.

Une première interprétation consiste à supposer que les observations  $\varphi_k$  sont mesurées, avec certaines erreurs de mesure, tandis que les données  $\chi_k$  sont, elles, dépourvues d'erreur de mesure ou, au pire, entachées d'erreurs négligeables par rapport à celles apparaissant dans la mesure de  $\varphi_k$ . On modélise ce phénomène en écrivant que  $\varphi$  est une fonction aléatoire de  $\chi$ . Plus précisément, on modélise les erreurs de mesure par une loi gaussienne avec l'idée que les erreurs sont dues à la somme d'une infinité de petites erreurs et qu'une telle somme infinie, de par la loi des grands nombres, suit à peu de chose près une loi gaussienne. Autrement

dit, supposons que la valeur «vraie» de  $\varphi$ , lorsque  $\chi$  vaut  $\chi_k$ , soit  $P(\chi_k)$  et supposons que l'on mesure  $\varphi$  avec une erreur, de sorte que la probabilité de mesurer  $\varphi$  dans un certain intervalle  $[y, y + \Delta y]$  soit donné par la loi de Gauß :

$$P(y \leq \varphi \leq y + \Delta y) = \int_y^{y + \Delta y} e^{-(x - P(\chi_k))^2 / 2\sigma^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}\sigma} \simeq e^{-(y - P(\chi_k))^2 / 2\sigma^2} \frac{\Delta y}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

De la sorte, la probabilité de mesurer, à  $\Delta y$  près, successivement  $(\varphi_0, \dots, \varphi_m)$  pour des valeurs de  $\chi$  égales à  $(\chi_0, \dots, \chi_m)$  est donnée par

$$\prod_{k=0}^m \left( e^{-(\varphi_k - P(\chi_k))^2 / 2\sigma^2} \frac{\Delta y}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) \quad \text{soit} \quad \left( \frac{\Delta y}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^{m+1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} R(P; \varphi, \chi)}$$

et cette probabilité est donc maximale lorsque  $R(P; \varphi, \chi)$  est minimal. Par conséquent minimiser  $R(P; \varphi, \chi)$  c'est chercher la fonction (ici  $P$ ) telle que ce que l'on a observé soit en fait l'événement de probabilité maximale ; on parle de maximum de vraisemblance.

Montrons comment, en cherchant  $P$  de degré au plus 1, cette démarche est également une minimisation statistique. Lorsque  $P$  est de degré au plus 1, on cherche en fait à placer les observations  $(\chi_k, \varphi_k)$  sur une droite (nommée droite de régression de  $\varphi$  par rapport à  $\chi$  ou encore droite des moindres carrés). Autrement dit on cherche une relation  $\varphi = a\chi + b$  qui soit la meilleure possible. Introduisons  $Y = \varphi - (a\chi + b)$ . D'après l'inégalité de Chebichev, on a, en notant  $\mu(Y)$  et  $\sigma(Y)$  les moyennes et variances de  $Y$  et  $\mathbf{P}$  la probabilité :

$$\mathbf{P}(|\varphi - (a\chi + b) - \mu(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(Y)}{\varepsilon^2}.$$

Par conséquent  $Y$  est, en probabilité, le plus petit possible à condition que  $\mu(Y)$  soit nul et  $\sigma(Y)$  le plus petit possible. Comme

$$\mu(Y) = \mu(\varphi) - a\mu(\chi) - b$$

on peut toujours choisir  $b$  tel que, étant donné  $a$ ,  $\mu(Y)$  soit nul. Dans ces conditions, on a

$$\sigma^2(Y) = \mu(Y^2) = R(aX + b; \varphi, \chi)$$

et on peut vérifier que la minimisation de  $\sigma^2(Y)$  est équivalent à minimiser  $R(aX + b; \varphi, \chi)$  par rapport à  $(a, b)$ .

Plus généralement, on a

$$R(P; \varphi, \chi) = \sigma^2(\varphi - P(\chi)) + \mu^2(\varphi - P(\chi)).$$

De plus, on cherche en fait à minimiser simultanément les deux termes du membre de droite. Par «indépendance» de ces termes (i.e. les équations auxquelles chacune des minimisations conduisent sont linéairement indépendantes, par rapport aux coefficients de  $P$ ), cette minimisation simultanée est équivalente à minimiser la somme (car les deux termes sont positifs), i.e.  $R(P; \varphi, \chi)$ .

Par conséquent la méthode des moindres carrés fournit un polynôme  $P$  de sorte que, pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, la probabilité que  $\varphi$  diffère de  $P(\chi)$  de plus de  $\varepsilon$  est minimale, selon l'estimation donnée par l'inégalité de Chebichev.

## 5 Mise en place des données de modélisation

Tout au long de cet exposé, on donne le code Maple 6 pour traiter les exemples. On peut bien entendu le traduire dans une autre version de Maple ou en MuPad.

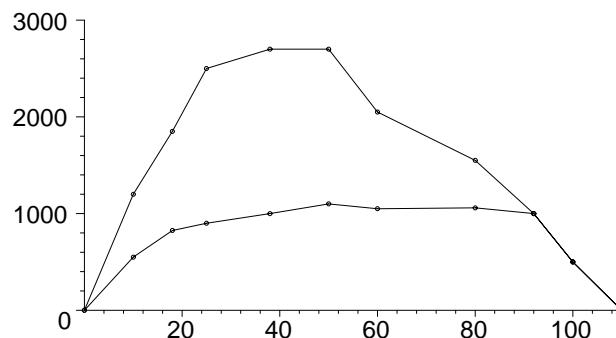
On commence par charger les bibliothèques d'algèbre linéaire et graphique. La variable  $\chi$  contient les abscisses des données observées,  $m+1$  leur nombre. On entre alors deux «routes», i.e. les valeurs de  $\varphi$  correspondant à  $\chi$  pour deux modélisations. La variable `nb` représente le nombre de routes modélisées.

On calcule ensuite  $\chi_{max}$  et on définit la variable `xrange` comme l'intervalle  $[0; \chi_{max}]$ . On l'utilise pour normaliser l'affichage des graphiques. De même l'intervalle `yrange` s'étend de 0 à la valeur maximale de  $\varphi$  sur les routes modélisées.

On passe ensuite à des problèmes de visualisation. La procédure `dup` permet de répéter une liste `s` de sorte à donner une liste de longueur `m`. On crée ainsi les listes `clist` et `slist` pour afficher les graphiques simultanément avec des options de couleur et/ou de style différentes. Dans l'exemple, on suppose avoir la couleur et on adopte une alternance de quatre couleurs, sans jamais changer le style de tracé (on garde une ligne pleine).

Les variables `liste[1]` et `liste[2]` contiennent les points des deux tracés. Enfin le tracé des deux routes est stocké dans la variable `dplot` puis affiché. On affiche en fait deux fois chaque tracé, une fois on ne met que les points (symbolisés par un cercle), une autre fois on trace une ligne polygonale.

```
>with(linalg): with(plots):
> $\chi$  := [0, 10, 18, 25, 38, 50, 60, 80, 92, 100, 110]:
>m := nops( $\chi$ )-1;
>route1 := [0, 1200, 1850, 2500, 2700, 2700, 2050, 1550, 1000, 500, 0];
>route2 := [0, 550, 825, 900, 1000, 1100, 1050, 1060, 1000, 500, 0];
>nb := 2;
>ChiMax := max(op( $\chi$ )): xrange := 0..ChiMax;
>yrange := seq(0..1.2*max(op(route||k)), k=1..nb);
>dup := proc(m,s) local i,d; d := floor(m/nops(s))+1; [seq(op(s),
  i=1..d)]; end proc;
>couleur := blue, red, yellow, green : ligne := 1 :
>clist := dup(m,[couleur]): slist := dup(m,[ligne]):
>liste := seq( [seq( [ $\chi$ [i],route||k[i]], i=1..m)], k=1..nb):
>dplot := [seq( plot([liste[k],liste[k]], xrange, yrange[k],
  symbol=circle, style=[point, line], colour=clist[k]), k=1..nb)]:
>display(dplot);
```



## 6 Approximation polynomiale

Voyons maintenant comment ajuster les données par des polynômes.

Soit  $n$  un entier naturel ; on note  $E_n$  l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré au plus  $n$ . C'est un espace vectoriel de dimension  $n+1$ , de base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$ .

Soit  $\Phi_n$  l'application linéaire de  $E_n$  dans  $\mathbf{R}^{m+1}$  qui à un polynôme  $P$  associe  $(P(\chi_k))_{0 \leq k \leq m}$ . La matrice  $A_{m,n}$  de  $\Phi_n$  relative aux bases canoniques de  $E_n$  et  $\mathbf{R}^{m+1}$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & \chi_0 & \cdots & \chi_0^n \\ 1 & \chi_1 & \cdots & \chi_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \chi_m & \cdots & \chi_m^n \end{pmatrix}.$$

En supposant (ce que nous ferons) les données  $(\chi_k)_{0 \leq k \leq m}$  toutes distinctes, cette matrice est de rang  $\min(m+1, n+1)$ . Par conséquent si  $n$  est inférieur ou égal à  $m$ ,  $\Phi_n$  est injective ; si  $n$  est supérieur à  $m$ ,  $\Phi_n$  est surjective ; enfin si  $n = m$ ,  $\Phi_n$  est bijective.

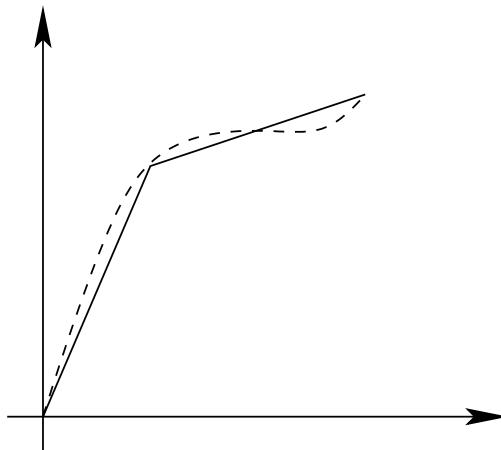
Autrement dit, si  $n$  est au moins égal à  $m$ , il existe un polynôme  $P$  tel que  $P(\chi_k) = \varphi_k$  pour tout entier  $k$  entre 0 et  $m$ .

Notons  $P_m$  l'unique polynôme de degré au plus  $m$  vérifiant la condition précédente ;  $P_m$  est appelé polynôme interpolateur de Lagrange. On a

$$P_m = \sum_{k=0}^m \varphi_k \prod_{j \neq k} \frac{X - \chi_j}{\chi_i - \chi_j}.$$

Mais, bien entendu, ce polynôme n'a aucune raison d'être concave et ce même si l'interpolation linéaire par morceaux des données observées est concave.

Prenons un exemple :  $(\chi_k)_{0 \leq k \leq 3} = (0, 1, 2, 3)$  et  $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq 3} = (0, 7, 8, 9)$ . Les pentes successives entre deux observations sont 7, 1 et 1, i.e. sont décroissantes. L'approximation linéaire par morceaux de ces données est donc concave (mais pas dérivable). Néanmoins l'approximation polynomiale de degré 3 est donnée par le polynôme  $X^3 - 6X^2 + 12X$ , ou encore  $(X-2)^3 + 8$ , dont la dérivée seconde est  $6(X-2)$  qui n'est pas négative sur  $[0; 3]$ . Par conséquent  $X^3 - 6X^2 + 12X$  n'est pas concave sur  $[0; 3]$ .



Pour  $n \geq m$ , la quantité  $R(P; \varphi, \chi)$  est minimale lorsque  $P$  diffère de  $P_m$  par un multiple de  $(X - \chi_0) \cdots (X - \chi_m)$ . Par ailleurs, pour  $n$  inférieur ou égal à  $m$ , la formule

$$\|P\| = \sqrt{\sum_{i=0}^m P(\chi_i)^2}$$

définit une norme sur  $E_n$  et on a  $R(P; \varphi, \chi) = \|P - P_m\|^2$ . Par conséquent il existe un unique polynôme  $P_n$  de  $E_n$  tel que

$$R(P_n; \varphi, \chi) = R_{n, \varphi, \chi} = \min_{P \in E_n} R(P; \varphi, \chi) = \min_{P \in E_n} \|P - P_m\|^2,$$

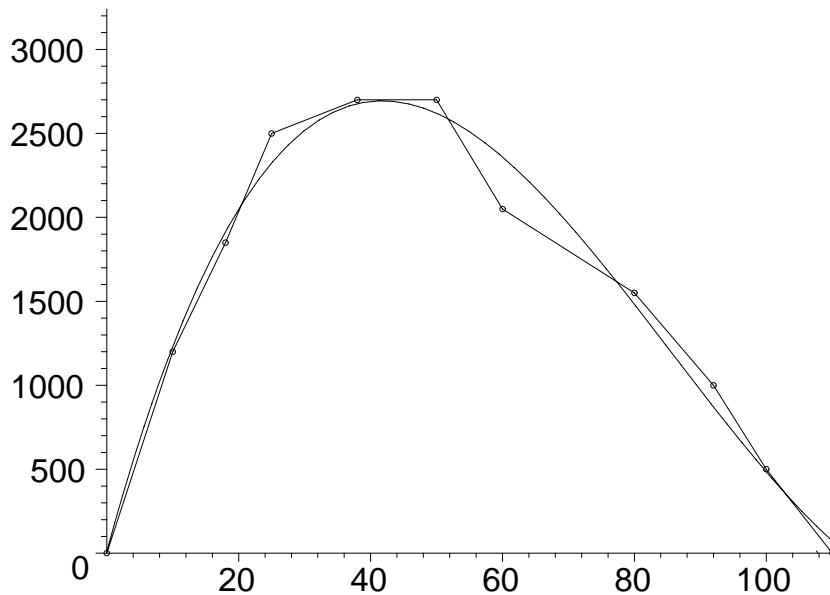
à savoir la projection orthogonale de  $P_m$  sur  $E_n$ .

On calcule  $P_n$  à partir des données de la façon suivante. Soit  $A = A_{m,n}$  la matrice introduite précédemment et  $A^*$  sa transposée (la notation représente le fait que l'on considère  $A_{m,n}^*$  comme la matrice de l'application linéaire adjointe de  $\Phi_n$ ). Les espaces vectoriels  $Im(A)$  et  $Ker(A^*)$  sont orthogonaux. Soit, par ailleurs,  $Y$  le vecteur colonne  $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq m}$ . Si la projection orthogonale de  $Y$  sur  $Im(A)$  est égale à  $AX$ , alors  $Y = AX + X'$  avec  $A^*X' = 0$ . Par conséquent  $A^*AX = A^*Y$ . De plus  $Ker(A^*A) = Ker(A)$  et donc  $A^*A$  est injective puisque  $n \leq m$ . Par un critère de dimension  $A^*A$  est bijective, donc inversible. Si on note  $X = (A^*A)^{-1}A^*Y = (a_j)_{0 \leq j \leq n}$ , alors le polynôme  $P_n$  cherché est égal à  $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ .

Sur l'exemple de la route 1, la méthode des moindres carrés donne par exemple, en degré 3, le polynôme

$$P_3(X) = 11.27 + 143.9X - 2.279X^2 + 0.008866X^3$$

qui ne s'annule pas en  $\chi_{max}$  (ici 110) et qui n'est pas concave, ainsi qu'on peut le vérifier sur le graphique ci-dessous :



## 7 Calcul des approximations sans contrainte

On applique la formule donnée dans le texte pour calculer les polynômes donnant l'approximation au sens des moindres carrés. La procédure MC calcule le polynôme approximateur pour la route  $k$  en degré  $n$ . En degré supérieur à  $m$ , on calcule le polynôme interpolateur de Lagrange. La procédure MC utilise la fonction linsolve de la bibliothèque d'algèbre linéaire.

Par la suite on stocke dans PolMCn la suite des (deux) polynômes approximatifs pour chacune de routes, en degré  $n$ . Les graphiques correspondants sont créés dans un couple et sauvegardés dans les variables MCplotn.

On finit par afficher la suite des polynômes approximatifs par route, grâce à la fonction d'animation des graphiques.

```
>MC := proc(k,n) global χ; local A, Y, a, P, i; if n > m
  then n := m; end if; A := matrix(m+1,n+1, [seq( [seq(χ[i]j,
  j=0..n)], i=1..m+1)]); Y := vector(m+1, route||k); a :=
  linsolve(transpose(A)&*A, transpose(A)&*Y); P := sum(a[i+1]*xi,
  i=0..n); end proc :
>for n from 0 to m do PolMC||n := seq(MC(k,n), k=1..nb) end do :
>for n from 0 to m do MCplot||n := seq(display([dplot[k],
  plot(PolMC||n[k], x=xrange, yrange[k], colour=clist[n+1]])), k=1..nb)
  end do :
>anime := proc(k) local n; display( [seq(MCplot||n[k], n=0..m-1)],
  insequence=true) ; end proc :
>anime(1) : anime(2) :
```

On constate sur les graphiques que les polynômes approximatifs ne sont pas toujours concaves et ne s'annulent pas toujours en 0 et  $\chi_{max}$ . Pour le vérifier, on met en place des procédures de tests. On commence par définir une précision, de façon à avoir des tests pas trop contraignants. On va donc tester si  $|P(0)| < \varepsilon$  et si  $P(\chi_{max}) < \varepsilon$ . En rapport avec les données, on choisit  $\varepsilon = 10$ .

Les procédures test\_0 et test\_max testent chacune ces conditions pour la route  $k$ , avec par défaut la tolérance  $\varepsilon$ .

```
>ε := 10 ;
>test_0 := proc(k) local t,n,e; if nargs = 1 then e := ε else
  e := args[2] end if; t := NULL; for n from 0 to m do if
  evalb(abs(subs(x=0, PolMC||n[k])) <= e) then t := t, n; end if;
  end do; [t] ; end proc :
>seq(test_0(k), k=1..nb) ;
```

[7, 8, 9, 10], [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

```
>test_max := proc(k) local t, n, e; if nargs = 1 then e := ε
  else e := args[2] end if; t := NULL; for n from 0 to m-1 do if
  evalb(abs(subs(x=ChiMax, PolMC||n[k])) <= e) then t := t, n; end
  if; end do; [t] ; end proc :
>seq(test_max(k), k=1..nb) ;
```

[4, 6, 7, 8, 9, 10], [7, 8, 9, 10]

On rencontre donc des problèmes uniquement en bas degré : dès que le degré est assez important, le polynôme approximatif ne s'écarte pas trop des points de contrôle.

Passons maintenant au test de la concavité. On utilise les procédures de Maple `sturmseq` et `sturm` qui calculent respectivement  $V_P$  et  $\sigma_P$ . On teste ici la stricte négativité de  $P''$  sur  $[0; \chi_{max}]$ . La procédure `test_concave` teste la concavité sur l'intervalle  $[a; b]$  du polynôme  $P$  en l'indéterminée  $x$ . La procédure `test_PolMC` applique ce test aux polynômes approximatrices pour la route  $k$ . La variable `concave` contient les degrés des polynômes effectivement concaves. La variable `pb` donne les degrés des premiers problèmes de concavité rencontrés.

```
> test_concave := proc(P,x,a,b) local Q, n, t, i; if degree(P,x) <= 1
then RETURN(true); end if; Q := diff(P, x$2); evalb((subs(x=a, Q) <
0) and (sturm(sturmseq(Q, x), x, a, b) = 0)); end proc :
> test_PolMC := proc(k) local t, n, pb; t := NULL; pb := -1; for n
from 0 to m do if test_concave(PolMC||n[k], x, 0, ChiMax) then t := 
t, n else if pb = -1 then pb := n; end if; end if; end do; [t], pb ;
end proc :
> resultat := seq(test_PolMC(k), k=1..nb) : concave :=
seq(resultat[2*k-1], k=1..nb) ; pb := seq(resultat[2*k], k=1..nb) ;

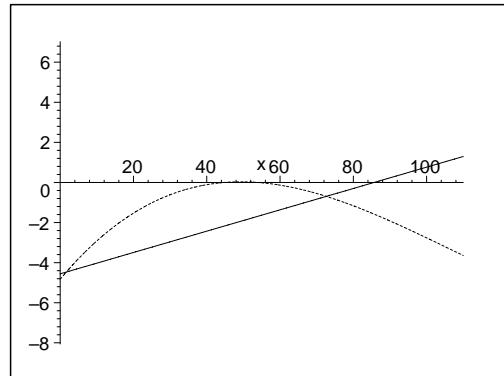
concave := [0, 1, 2, 4], [0, 1, 2, 3, 4]      pb := 3, 5
```

La concavité est proche de celle des données (qui le sont presque!) en bas degré. Plus on est exigeant en degré et moins la concavité est préservée. C'est un phénomène important dans l'approximation polynomiale qui se retrouve par exemple dans le phénomène de Runge.

On stocke maintenant dans  $P1$  et  $P2$  les premiers polynômes approximatrices non concaves (celui de degré 3 pour la route 1 et celui de degré 5 pour la route 2). On les affiche avec une précision de deux chiffres, puis on trace leurs dérivées secondes afin de voir apparaître la non négativité et mesurer l'ampleur du problème.

```
> for k to nb do P||k := PolMC||(pb[k])[k] end do :
> Digits := 2 : for k to nb do evalf(P||k) end do ; Digits := 10 :
11. + 140. x - 2.3 x2 + .0089 x3
-4.5 + 78. x - 2.4 x2 + .037 x3 - .00024 x4 + .45 10-6 x5
```

```
> plot([seq(diff(P||k, x$2), k=1..nb)], x=xrange, linestyle=slist,
colour=clist);
```



Le défaut de concavité n'est donc pas très important. On va cependant s'attacher à le résoudre.

## 8 Approximation polynomiale avec contraintes

On peut traduire les conditions d'annulation aux bornes et de concavité par des conditions polynomiales :

1.  $P$  est divisible par  $X(\chi_{max} - X)$ ,
2.  $P''$  est négative sur l'intervalle  $[0, \chi_{max}]$ .

Commençons par analyser l'impact de la seconde contrainte. Pour cela, introduisons  $\Gamma_n$  la partie de  $E_n$  formée des polynômes concaves sur  $[0, \chi_{max}]$ . C'est une partie convexe de l'espace vectoriel réel  $E_n$ , c'est-à-dire que  $\Gamma_n$  contient tout segment dont il contient les extrémités, ou encore  $\Gamma_n$  est stable par prise de barycentre à coefficients positifs. En effet si  $P$  et  $Q$  sont dans  $\Gamma_n$  et  $\lambda$  un réel de  $[0; 1]$ , on a, pour tout réel  $\alpha$  de  $[0; 1]$  et tous  $x$  et  $y$  dans  $[0; \chi_{max}]$ ,

$$\begin{aligned} & (\lambda P + (1 - \lambda)Q)(\alpha x + (1 - \alpha)y) \\ &= \lambda P(\alpha x + (1 - \alpha)y) + (1 - \lambda)Q(\alpha x + (1 - \alpha)y) \\ &\geq \alpha \lambda P(x) + (1 - \alpha)\lambda P(y) + \alpha(1 - \lambda)Q(x) + (1 - \alpha)(1 - \lambda)Q(y) \\ &\geq \alpha [\lambda P + (1 - \lambda)Q](x) + (1 - \alpha) [\lambda P + (1 - \lambda)Q](y) \end{aligned}$$

et comme  $\lambda P + (1 - \lambda)Q$  appartient à  $E_n$ , il est donc dans  $\Gamma_n$ .

Pour  $x$ ,  $y$  et  $\alpha$  fixés comme précédemment, la condition

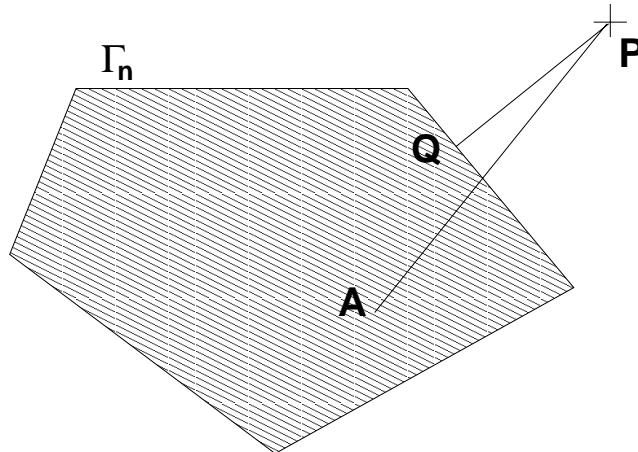
$$P(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha P(x) + (1 - \alpha)P(y)$$

définit un fermé de  $E_n$  (pour la topologie issue de n'importe quelle norme) et donc  $\Gamma_n$  est un fermé de  $E_n$  en tant qu'intersection de fermés. En conclusion  $\Gamma_n$  est une partie convexe fermée de  $E_n$  (et même de  $E_N$  pour tout entier  $N$  supérieur à  $n$ ).

Soit  $P$  un polynôme quelconque de  $E_n$ . Si  $n$  est inférieur ou égal à  $m$ ,  $E_n$  est muni d'une norme et donc, puisque  $\Gamma_n$  est convexe et fermé, il existe un unique polynôme  $Q$  de  $\Gamma_n$  réalisant la distance de  $P$  à  $\Gamma_n$ , c'est-à-dire tel que

$$\|P - Q\| = \min_{A \in \Gamma_n} \|P - A\|.$$

Le polynôme  $Q$  est appelé projection de  $P$  sur  $\Gamma_n$ .



Rappelons comment on démontre l'existence et l'unicité de  $Q$ . Soit  $A$  un élément quelconque de  $\Gamma_n$  et  $B(P, \|P - A\|)$  la boule fermée de centre  $P$  de rayon  $\|P - A\|$ . L'ensemble  $C = \Gamma_n \cap B(P, \|P - A\|)$  est compact en tant qu'intersection d'un fermé et d'un compact. De plus il est non vide, puisque  $A$  lui appartient. Par conséquent le minimum de la fonction continue sur  $\Gamma_n$ , donnée par la distance à  $P$ , est atteint sur  $C$ . Autrement dit  $Q$  existe. Si maintenant  $Q_1$  et  $Q_2$  réalisent tous deux de minimum, on peut écrire

$$\left\| P - \frac{Q_1 + Q_2}{2} \right\| = \left\| \frac{P - Q_1}{2} + \frac{P - Q_2}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \|P - Q_1\| + \frac{1}{2} \|P - Q_2\|.$$

Comme  $(Q_1 + Q_2)/2$  appartient à  $\Gamma_n$ , par convexité, l'inégalité précédente se doit d'être une égalité, par minimalité. Par conséquent les vecteurs  $P - Q_1$  et  $P - Q_2$  sont colinéaires et de même sens. Comme ils sont également de même norme, ils sont égaux, i.e.  $Q_1 = Q_2$ , ce qui prouve l'unicité de  $Q$ .

Toujours si  $n$  est inférieur ou égal à  $m$ , notons  $Q_n$  la projection de  $P_n$  sur  $\Gamma_n$ . D'après le théorème de Pythagore,  $Q_n$  réalise le minimum, sur  $\Gamma_n$  de la quantité  $R_n(P; \varphi, \chi)$ . On a également

$$R_n(Q_n; \varphi, \chi) = R_n(P_n; \varphi, \chi) + \|P_n - Q_n\|^2.$$

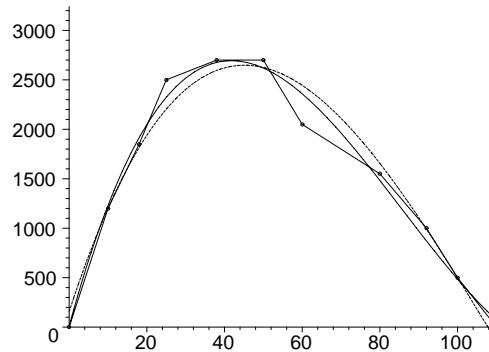
Si  $n$  est strictement supérieur à  $m$ , la situation se complique. Il faut alors introduire

$$\Gamma_n^{(m)} = \{P \in E_m \mid (\exists Q \in E_{n-m}) \quad P + (X - \chi_0) \cdots (X - \chi_m)Q \in \Gamma_n\}.$$

On montre que  $\Gamma_n^{(m)}$  est une partie convexe fermée de  $E_m$  et on peut donc noter  $Q_n^{(m)}$  la projection de  $P_m$  sur  $\Gamma_n^{(m)}$ . Par définition de  $\Gamma_n^{(m)}$  il existe un polynôme  $Q_n$  dans  $\Gamma_n$  (qui n'a aucune raison d'être unique) prenant les mêmes valeurs que  $Q_n^{(m)}$  en  $\chi_0, \dots, \chi_m$ . Ce polynôme minimise  $R(P; \varphi, \chi)$  sur  $\Gamma_n$ .

Dans l'exemple précédent, on obtient le polynôme de degré 3

$$Q_3(X) = 156.7 + 120.9X - 1.685X^2 + 0.05106X^3.$$



Enfin, si on veut rajouter la condition d'annulation aux bornes, on introduit  $E_n^0$  l'ensemble des polynômes de  $E_n$  s'annulant en 0 et  $\chi_{max}$ . On reprend alors l'étude précédente en remplaçant  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_n^{(m)}$  par

$$\Gamma_n^0 = \Gamma_n \cap E_n^0 \quad \text{et} \quad \Gamma_n^{(m,0)} = \Gamma_n^{(m)} \cap E_n^0.$$

Il vient alors

$$Q_3^0(X) = 60.86X - 0.005030X^4.$$

## 9 Orthogonalisation de Gram-Schmidt

Afin de mieux comprendre la projection sur  $\Gamma_n$  (ou  $\Gamma_n^0$ ,  $\Gamma_n^{(m,0)}$  etc.), il convient de décrire la condition de concavité dans une base orthonormée pour la norme choisie. Pour cela on utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soit  $G_0$  le polynôme constant, égal à  $1/\sqrt{m+1}$ . C'est un polynôme de norme 1, proportionnel et de même sens que 1. Supposons maintenant, pour  $n$  strictement inférieur à  $m$ , construits des polynômes  $(G_0, \dots, G_n)$  de degrés respectifs  $(0, \dots, n)$ . Comme ces polynômes sont échelonnés en degré, ils forment un système libre dans  $E_m$  et donc, par cardinalité, une base de  $E_n$ . En particulier on peut exprimer la projection orthogonale de  $X^{n+1}$  sur  $E_n$  comme combinaison linéaire de  $(G_0, \dots, G_n)$ , de sorte qu'il existe un polynôme  $Q$  de la forme

$$X^{n+1} - (a_0 G_0 + a_1 G_1 + \dots + a_n G_n)$$

et orthogonal à  $E_n$  (et non nul). De plus, si on pose  $G_{n+1} = Q/\|Q\|$ , on a construit un polynôme de degré  $n+1$  et donc continuer le procédé.

De la sorte on a obtenu une famille de polynômes de  $E_m$  ayant les propriétés caractéristiques suivantes, pour tout entier  $n$  compris entre 0 et  $m$  :

1.  $G_n$  est de degré  $n$  et de norme 1.
2. L'espace vectoriel engendré par  $(1, X, \dots, X^n)$  est aussi celui engendré par  $(G_0, G_1, \dots, G_n)$ .
3.  $(G_0, G_1, \dots, G_n)$  est une base orthonormale de  $E_n$ .
4. Le produit scalaire entre  $G_n$  et  $X_n$  est strictement positif.

L'avantage de cette base est qu'on peut la calculer récursivement et que la norme y prend la forme de la norme euclidienne usuelle. Autrement dit, si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de  $E_m$ , écrits sous la forme  $P = \sum_{k=0}^m a_k G_k$  et  $Q = \sum_{k=0}^m b_k G_k$ , on a

$$\|P - Q\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^m (a_k - b_k) G_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^m (a_k - b_k)^2.$$

Montrons l'intérêt de cette reformulation sur un exemple. On prend  $m = 2$ , avec  $(\chi_0, \chi_1, \chi_2) = (0, 1, 2)$ . Il vient  $G_0 = 1/\sqrt{3}$ ,  $G_1 = (X - 1)/\sqrt{2}$  et  $G_2 = (3X^2 - 6X + 1)/\sqrt{6}$  et on a

$$\|a_0 + a_1 X + a_2 X^2\|^2 = 3a_0^2 + 6a_0 a_1 + 5a_1^2 + 10a_0 a_2 + 9a_1 a_2 + 17a_2^2$$

et

$$\|b_0 G_0 + b_1 G_1 + b_2 G_2\|^2 = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2.$$

La condition de concavité est ici la négativité de  $a_2$  (ou de  $b_2$ , car c'est équivalent). Si  $P$  est un polynôme de degré 2 à coefficient dominant positif, sa projection sur  $\Gamma_2$  est donc le polynôme  $P - \sqrt{6}a_2 G_2/3$ . Il aurait été bien compliqué de le calculer en essayant directement de minimiser  $\|P - Q\|^2$  avec  $Q$  de coefficient dominant négatif.

On pourra s'en convaincre en prenant l'exemple de  $X^2$  dont la projection est  $2X - 1/3$  : en écrivant  $\|X^2 - Q\|^2$ , on doit trouver le minimum suivant

$$\min_{(a_0, a_1) \in \mathbf{R}^2, a_2 \leq 0} 3a_0^2 + 6a_0 a_1 + 5a_1^2 + 10a_0(a_2 - 1) + 9a_1(a_2 - 1) + 17(a_2 - 1)^2.$$

Supposons maintenant connus  $G_0, \dots, G_m$ . On peut donc écrire

$$P_m = \alpha_0 G_0 + \alpha_1 G_1 + \cdots + \alpha_m G_m.$$

On a alors, pour  $n$  inférieur ou égal à  $m$ ,

$$P_n = \alpha_0 G_0 + \alpha_1 G_1 + \cdots + \alpha_n G_n$$

puisque  $(G_0, G_1, \dots, G_m)$  est une base orthonormée de  $E_m$  pour la norme  $\|\cdot\|$ .

Calculons maintenant  $Q_n$  sur des exemples en petit degré. Commençons par écrire

$$G_2 = g_{0,2} + g_{1,2}X + g_{2,2}X^2 \quad \text{et} \quad G_3 = g_{0,3} + g_{1,3}X + g_{2,3}X^2 + g_{3,3}X^3.$$

Par construction, la matrice de passage de  $(1, X, \dots, X^n)$  à  $(G_0, G_1, \dots, G_n)$  est triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs sur la diagonale. Il en est donc de même pour son inverse. Ainsi  $g_{2,2}$  et  $g_{3,3}$  sont strictement positifs.

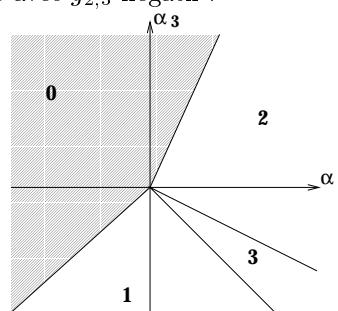
La concavité étant donnée par la négativité de la dérivée seconde,  $\Gamma_2$  est tout simplement l'ensemble des polynômes  $a_0G_0 + a_1G_1 + a_2G_2$  vérifiant  $a_2 \leq 0$ . Aussi

$$Q_2 = \alpha_0 G_0 + \alpha_1 G_1 + \min(\alpha_2, 0)G_2.$$

La description de  $\Gamma_3$  est à peine plus complexe. La dérivée seconde du polynôme  $a_0G_0 + a_1G_1 + a_2G_2 + a_3G_3$  est un polynôme du premier degré, croissant si  $a_3$  est positif, décroissant sinon. Cette dérivée seconde est donc négative sur  $[0; \chi_{max}]$  si et seulement si  $a_2g_{2,2} + a_3g_{2,3} \leq 0$  dans le cas où  $a_3$  est négatif et  $a_2g_{2,2} + a_3g_{2,3} \leq -3a_3g_{3,3}\chi_{max}$  dans le cas contraire. Autrement dit  $\Gamma_3$  est décrit par

$$a_2g_{2,2} + a_3g_{2,3} + 3 \max(a_3, 0)g_{3,3}\chi_{max} \leq 0.$$

Illustrons cette étude avec  $g_{2,3}$  négatif :



La partie hachurée (zone 0) correspond à  $\Gamma_3$ . On repère quatre zones. Le projeté  $Q_3$  s'écrit  $\alpha_0 G_0 + \alpha_1 G_1 + \beta_2 G_2 + \beta_3 G_3$  où  $(\beta_2, \beta_3)$  s'obtient ainsi : si  $(\alpha_2, \alpha_3)$  est dans la zone 0, alors  $(\beta_2, \beta_3) = (\alpha_2, \alpha_3)$ ; si  $(\alpha_2, \alpha_3)$  est dans la zone 1,  $(\beta_2, \beta_3)$  est son projeté sur la droite d'équation  $a_2g_{2,2} + a_3g_{2,3} = 0$ ; si  $(\alpha_2, \alpha_3)$  est dans la zone 2,  $(\beta_2, \beta_3)$  est son projeté sur la droite d'équation  $a_2g_{2,2} + a_3(g_{2,3} + 3g_{3,3}\chi_{max}) = 0$ ; enfin si  $(\alpha_2, \alpha_3)$  est dans la zone 3,  $(\beta_2, \beta_3) = (0, 0)$ .

Si maintenant on veut rajouter la condition de divisibilité, pour calculer  $Q_2^0$ , on obtient les trois conditions :

$$\begin{cases} a_0g_{0,0} + a_1g_{0,1} + a_2g_{0,2} = 0 \\ a_1g_{1,1} + a_2(g_{1,2} + g_{2,2}\chi_{max}) = 0 \\ a_2 \leq 0. \end{cases}$$

Et donc  $\Gamma_2^0$  est une demi-droite.

## 10 Calcul des polynômes orthogonaux

On introduit le produit scalaire et la norme sur  $E_m$  dont on se sert pour l'orthonormalisation de Gram-Schmidt. La procédure `prod_scal` calcule le produit scalaire des deux polynômes  $P$  et  $Q$  en l'indéterminée  $x$ . La procédure `norme` calcule la norme du polynôme  $P$ , toujours en l'indéterminée  $x$ .

```
> prod_scal := proc(P, Q, x) global χ; local i; sum(subs(x=χ[i],  
P*Q), i=1..m) end proc :  
> norme := proc(P, x) prod_scal(P, P, x)^(1/2) end proc :
```

On peut ainsi évaluer les résidus des approximations au sens des moindres carrés, i.e.  $R(P_n; \varphi, \chi)$ . On donne la liste de ces résidus avec deux chiffres significatifs.

```
> Digits := 2 : seq( [seq( evalf( norme(PolMC||n[k]-PolMC||(m)[k], x)),  
n=0..m-1)], k=1..n b); Digits := 10 :
```

```
[3000., 3000., 1000., 420., 370., 330., 290., 240., 230., 230., 0.]  
[1400., 1300., 420., 420., 170., 170., 160., 130., 8.9, 6.5, 0.]
```

La procédure `normé` renvoie le polynôme  $P$  divisé par sa norme. La procédure `base` renvoie l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de  $E_m$ . Si on rajoute un argument (comme "f" pour "flottant"), la procédure renvoie un polynôme à coefficients flottants. Pour finir on choisit  $n$  égal à 5, on stocke dans `GS` la base obtenue et on affiche le graphe de ces polynômes.

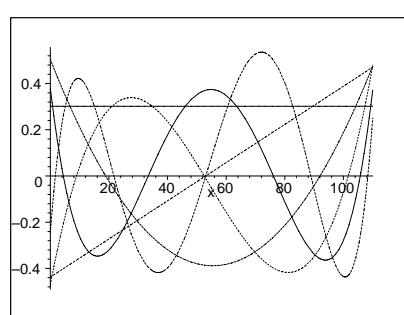
```
> normé := proc(P, x) P/norme(P, x) end proc :  
> base := proc(x, n) local schmidt, i, j, P, ps; for i from 0 to n  
do P := x̄; if nargs = 3 then P := evalf(P) end if; if i > 0 then  
for j from 0 to i-1 do ps := prod_scal(P, schmidt||j, x); P := P -  
ps*schmidt||j end do; end if; schmidt||i := simplify(normé(P, x));  
end do; seq(schmidt||i, i=0..n) end proc :  
> base(x, 1);  

$$\frac{1}{11}\sqrt{11}, \frac{1}{14658}(x - 53)\sqrt{14658}$$
  
> base(x, 2, "f");  

$$.3015113446, .008259668953x - .4377624546  
.0002901955036x^2 + .5037442855 - .03218117274x$$

```

```
> GS := [base(x, 5)] : plot(GS, x=xrange, color=clist,  
linestyle=slist) ;
```



On constate qu'ils oscillent beaucoup. En fait chacun d'entre eux a toutes ses racines dans l'intervalle  $[0; \chi_{max}]$ . Mieux, les racines du polynôme de degré  $k$  sont situées entre celles du polynôme de degré  $k + 1$ .

Si on souhaite faire la même chose pour les polynômes de  $E_n$  s'annulant en 0 et  $\chi_{max}$ , on est confronté à plusieurs possibilités. La première est de travailler uniquement sur la base précédente et d'exprimer les conditions d'annulation aux bornes dans cette base. C'est l'optique qui est celle proposée dans le texte.

Néanmoins, vu qu'on vient de créer une procédure d'orthonormalisation, on peut la rentabiliser. Remarquons tout d'abord que l'ensemble  $E_{n,lim}$  des polynômes de  $E_n$  s'annulant en 0 et  $\chi_{max}$  est en fait un espace vectoriel. Ce sont les polynômes de  $E_n$  divisibles par  $(\chi_{max} - X)X$  et on peut, par exemple, prendre comme base de  $E_{n,lim}$  l'ensemble des  $(\chi_{max} - X)X^{i+1}$ , pour  $i$  entre 0 et  $n - 2$ . Une fois qu'on a une base, il ne reste plus qu'à l'orthonormaliser par la méthode de Gram-Schmidt. C'est ce calcul que fait la procédure `base_lim`.

Si on travaille de la sorte, on est donc directement dans un espace de dimension  $n - 1$ , ce qui rend les choses plus faciles (en tout cas pour le visualiser en petit degré). Par contre il faut alors calculer le projeté  $P_{m,lim}$  de  $P_m$  dans  $E_{m,lim}$  et l'exprimer dans la base précédente. Dès lors, la projection  $P_{n,lim}$  de  $P_m$  dans  $E_{n,lim}$  est obtenue par troncature de  $P_{m,lim}$  tout comme  $P_n$  l'est à partir de  $P_m$ .

On choisit encore  $n$  égal à 5 (et donc  $n - 2 = 3$ ), on stocke dans `GS_lim` la base obtenue par orthonormalisation et on affiche le graphe de ces polynômes.

```
>base_lim := proc(x, n) local schmidt, i, j, P, ps; for i from 0
  to n do P := (ChiMax-x)*x^(i+1); if nargs = 3 then P := evalf(P)
  end if; if i > 0 then for j from 0 to i-1 do ps := prod_scal(P,
  schmidt||j, x); P := P-ps*schmidt||j end do; end if; schmidt||i :=
  simplify(normé(P, x)); end do; seq(schmidt||i, i=0..n) end proc :
>base_lim(x,0);

$$-\frac{1}{43245993} (-110 + x) x \sqrt{43245993}$$

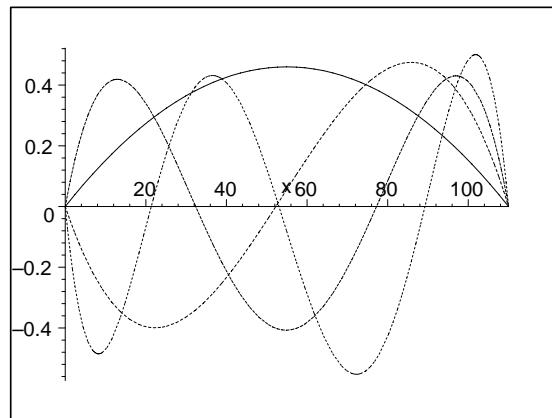

>base_lim(x,1,"f");

$$-.0001520642286 (-110. + x) x,$$


$$.001106310225 x^2 - .6818357786 10^{-5} x^3 - .03919199559 x$$

```

```
>GS_lim := [base_lim(x, 3)] : plot(GS_lim, x=xrange, color=clist,
  linestyle=slist);
```



On observe le même phénomène que précédemment quant à la localisation des racines des polynômes de cette base.

## 11 Calculs de projection

Quand les calculs deviennent complexes, il est utile de développer une algorithmique permettant le traitement par un logiciel de calcul formel.

Montrons comment calculer  $Q_2^0$  à partir de la description précédente de  $\Gamma_2^0$ . On se donne une famille libre  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbf{R}^3$  muni de la norme euclidienne orientée habituelle. On veut décrire la projection sur la demi-droite vectorielle  $d$  définie par les équations et inéquation suivantes

$$x \cdot e_1 = 0, \quad x \cdot e_2 = 0 \quad \text{et} \quad x \cdot e_3 \leq 0.$$

Les deux premières équations définissent une droite  $D$  de vecteur directeur  $u = e_1 \wedge e_2$ . On a  $u \cdot e_3 = \det(e_1, e_2, e_3)$  et donc  $u$  est un vecteur directeur de  $d$  si et seulement si  $(e_1, e_2, e_3)$  est indirecte.

Soit maintenant  $x$  un vecteur quelconque et  $y$  sa projection sur la droite  $D$ . Si  $y$  appartient à  $d$ , alors  $y$  est la projection de  $x$  sur  $d$ . Sinon cette projection est 0. Par ailleurs on a  $y \cdot u = x \cdot u = \det(e_1, e_2, x)$ . Par conséquent  $y$  appartient à  $d$  si et seulement si

$$\frac{\det(e_1, e_2, x)}{\det(e_1, e_2, e_3)} \leq 0.$$

Dans ce cas, la projection de  $x$  sur  $d$  est  $y$ , i.e.  $(x \cdot u)u/\|u\|^2$  ou encore

$$\frac{\det(e_1, e_2, x)}{\|e_1 \wedge e_2\|^2} e_1 \wedge e_2.$$

Dans le cas contraire la projection de  $x$  sur  $d$  est donc 0.

Dans le cas du calcul de  $Q_2^0$ , on a  $e_1 = (g_{0,0}, g_{0,1}, g_{0,2})$ ,  $e_2 = (0, g_{1,1}, g_{1,2} + g_{2,2}\chi_{max})$  et  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Introduisons

$$e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{0,1}(g_{1,2} + g_{2,2}\chi_{max}) - g_{0,2}g_{1,1} \\ -g_{0,0}(g_{1,2} + g_{2,2}\chi_{max}) \\ g_{0,0}g_{1,1} \end{pmatrix}$$

et

$$\alpha = \det(e_1, e_2, x) = \alpha_0 A + \alpha_1 B + \alpha_2 C \quad \text{et} \quad N^2 = \|e_1 \wedge e_2\|^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Avec ces notations, on obtient

$$Q_2^0 = \frac{\min(\alpha, 0)}{N^2} (AG_0 + BG_1 + CG_2).$$

La situation est donc plus «complète» que pour le calcul de  $Q_2$  : tous les coefficients de  $P_2$  interviennent dans le calcul. En fait la condition sur  $P''$  ne fait intervenir que  $n - 1$  coefficients, à savoir  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ . La condition d'annulation en 0 et  $\chi_{max}$  donne les deux conditions supplémentaires qui font intervenir  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ .

En degré 3, la situation est encore descriptible en termes simples, même si on se trouve déjà dans l'espace de dimension 4. En effet la condition d'annulation s'écrit  $(x \cdot e_1 = 0 \text{ et } x \cdot e_2 = 0)$  tandis que la condition de concavité s'écrit  $(x \cdot e_3 \leq 0 \text{ et } x \cdot e_4 \leq 0)$  où  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est un système libre. Les deux premières équations décrivent un plan tandis que les deux dernières sont celles déjà étudiées. Au final on obtient un cône convexe comme celui dessiné dans la section précédente, mais au lieu d'être dans le plan  $(\alpha_2, \alpha_3)$ , il se trouve dans le plan d'équation  $x \cdot e_1 = x \cdot e_2 = 0$ .

## 12 Suites de Sturm

La concavité s'exprime comme la négativité d'un polynôme (le polynôme dérivée seconde) sur un intervalle. On s'intéresse maintenant à la traduction algébrique de cette condition. En degré 2, il s'agit d'un demi-espace ( $\alpha_2 \leq 0$ ) et en degré 3 c'est un cône convexe, intersection de deux demi-espaces. Comme on va le voir, à partir du degré 4 la description de  $\Gamma_n$  met en jeu des objets non-linéaires : les (in)équations algébriques qui interviennent sont de degré au moins 2.

Soit  $Q$  un polynôme à coefficients réels. La condition  $Q$  négatif sur  $[0, \chi_{max}]$  peut s'écrire avec un nombre fini de conditions. En effet cette condition est équivalente au fait que  $Q$  est négatif aux bornes 0 et  $\chi_{max}$  de l'intervalle ainsi qu'en tous ses extrema intérieurs. Autrement dit

$$\forall x \in [0, \chi_{max}] Q(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Q(0) \leq 0 \\ Q(\chi_{max}) \leq 0 \\ \forall x \in [0, \chi_{max}] Q'(x) = 0 \Rightarrow Q(x) \leq 0 . \end{cases}$$

Traitons un exemple : soit  $Q(X) = aX^2 + bX + c$  sur  $[0, 1]$ . On a  $Q(0) = c$ ,  $Q(1) = a + b + c$  et  $Q'$  s'annule en  $-b/2a$ , de sorte que  $Q$  est négatif sur  $[0, 1]$  si et seulement si

$$c \leq 0 , \quad a + b + c \leq 0 \quad \text{et} \quad 0 < -\frac{b}{2a} < 1 \Rightarrow c - \frac{b^2}{4a} \leq 0 ; .$$

On peut également formuler le problème de façon légèrement différente, en utilisant les suites de Sturm, bien adaptées au calcul formel. En effet un polynôme est strictement négatif sur un intervalle si et seulement s'il est strictement négatif en un point et n'admet aucune racine sur l'intervalle. Cette dernière condition se teste grâce au théorème de Sturm, que l'on va maintenant décrire.

À partir d'un polynôme  $P$ , on construit une suite  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  de la façon suivante :  $P_0 = P$ ,  $P_1 = -P'$  et pour  $k$  entre 1 et  $n - 1$ ,  $P_{k+1}$  est l'opposé du reste de la division euclidienne de  $P_{k-1}$  par  $P_k$ . On s'arrête à  $n$  tel que  $P_{n+1}$  est nul. En particulier  $P_n$  est un pgcd de  $P$  et  $P'$ ;  $P_n$  est donc constant si et seulement si  $P$  est à racines simples. Ainsi avec le polynôme  $Q$  précédent (supposé à racines distinctes), on obtient la suite

$$\left( aX^2 + bX + c, -2aX - b, \frac{b^2}{4a} - c \right) .$$

On suppose que  $P$  n'est pas nul et n'a que des zéros simples. Pour  $x$  réel, on note  $\sigma_P(x)$  le nombre de changements de signes dans la suite  $V_P(x) = (P_k(x))_{0 \leq k \leq n}$ , en ignorant les zéros (avec l'hypothèse faite, il y a au moins un terme non nul dans cette suite :  $P_n(x)$ ). En particulier, avec une extension de la définition de  $V_P$ ,  $\sigma_P(-\infty) = 0$  et donc  $\sigma_P(x)$  est nul pour  $x$  assez petit, par continuité des polynômes intervenant dans la suite  $V_P(x)$ .

Par définition de la division euclidienne, on peut écrire, pour tout entier  $k$  entre 1 et  $n - 1$ ,

$$P_{k-1}(X) = Q_k(X)P_k(X) - P_{k-1}(X)$$

pour un certain polynôme  $Q_k$ . En particulier, si  $\lambda$  est une racine de  $P_k$ , alors  $P_{k-1}(\lambda)P_{k+1}(\lambda) = -P_{k+1}(\lambda)^2$ . Par ailleurs, la nullité de deux termes consécutifs

dans la suite  $V_P(x)$  entraîne la nullité de la suite  $V_{P'}(x)$ , ce qui est contraire au fait que  $P$  et  $P'$  n'ont pas de racine commune (les zéros de  $P$  sont simples). Il en résulte que, si  $\lambda$  est une racine de  $P_k$ , alors alors  $P_{k-1}(\lambda)$  et  $P_{k+1}(\lambda)$  sont de signes contraires. En particulier le nombre de changements de signes dans la suite  $(P_{k-1}(x), P_k(x), P_{k+1}(x))$  est 1 pour  $x$  proche de  $\lambda$ , indépendamment du fait que  $x$  soit inférieur ou supérieur à  $\lambda$ . Autrement dit  $\sigma_P(x)$  est constant lorsque  $x$  «traverse» une racine d'un polynôme  $P_k$  pour  $k$  non nul.

Enfin, puisque les zéros de  $P$  sont simples, au voisinage d'une racine  $\lambda$  de  $P$ , on a

$$P(x) \simeq (x - \lambda)P'(\lambda)$$

de sorte que  $\sigma_P(x)$  augmente de 1 à partir de  $\lambda$  (non inclus). Ainsi  $\sigma_P(x)$  est égal au nombre de racines réelles de  $P$  strictement inférieures à  $x$  et, pour  $x < y$ ,  $\sigma_P(y) - \sigma_P(x)$  est égal au nombre de racines de  $P$  sur  $[x, y]$ .

Avec l'exemple du polynôme  $Q$  du second degré (et en supposant qu'il est à racines simples),  $Q$  est négatif sur  $[0; 1]$  si et seulement si  $Q$  est négatif au voisinage de 0 à droite et n'a pas de racine sur  $]0; 1[$ . Pour pouvoir utiliser les suites de Sturm, on récrit cette condition sous la forme :

1. Soit  $Q(0) < 0$  et  $Q$  n'a pas de racine sur  $[0; 1[$ .
2. Soit  $Q(0) = 0$ ,  $Q'(0) < 0$  et  $Q(X)/X$  n'a pas de racine sur  $[0; 1[$ .

Ce qui donne, en utilisant les suites  $V_P(0)$  et  $V_P(1)$  :

$$c < 0 \quad \text{et} \quad \sigma\left(c, -b, \frac{b^2}{4a} - c\right) = \sigma\left(a + b + c, -2a - b, \frac{b^2}{4a} - c\right)$$

ou

$$c = 0, \quad b < 0 \quad \text{et} \quad \sigma(b, -a) = \sigma(a + b, -a).$$

Le second cas s'écrit simplement  $c = 0$ ,  $b < 0$  et  $a + b \leq 0$ . Étudions maintenant le premier cas. Par parité du nombre de changements de signe, la seconde condition impose  $a + b + c$  négatif et il n'y a pas d'autre condition si  $b^2/4a - c > 0$ . Si au contraire  $b^2/4a - c < 0$ , la seconde condition est équivalente à ce que  $b$  et  $b + 2a$  soient de même signe. Si  $c < 0$  et  $b^2/4a - c < 0$ , alors  $a$  est négatif, et donc  $b$  et  $b + 2a$  sont de même signe si et seulement si  $b$  est négatif ou supérieur à  $-2a$ . Cette deuxième étude englobe la première si on autorise la nullité de  $c$ .

On trouve donc la contraposée de l'implication donnée par le premier point de vue : les suites de Sturm montrent que  $Q$  est négatif sur  $[0, 1]$  si et seulement si

$$c \leq 0, \quad a + b + c \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{4a} - c < 0 \Rightarrow (b \leq 0 \text{ ou } b \geq -2a).$$

Pour le cas général du degré quelconque, on écrit que l'ensemble des polynômes concaves sur  $[0; \chi_{max}]$  est l'adhérence (dans  $E_n$ , i.e. au sens des coefficients par rapport à une base) de l'ensemble des polynômes strictement concaves sur  $[0; \chi_{max}]$  et même mieux, de ceux dont la dérivée seconde est strictement négative sur  $[0; \chi_{max}]$ . En effet qu'une limite de tels polynômes soit concave provient simplement du fait que  $\Gamma_n$  est fermé. Réciproquement si  $P$  est dans  $\Gamma_n$ , alors  $P - \varepsilon X^2$  a une dérivée seconde strictement négative sur  $[0; \chi_{max}[$  pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, et l'inclusion réciproque en résulte.

Maintenant, écrire la stricte négativité de  $P''$  est très simple avec les suites de Sturm : on demande  $P''(0) < 0$  et  $\sigma_{P''}(1) = \sigma_{P''}(0)$ .

### 13 Meilleure approximation concave dans le cas de la route 1, en degré 3.

On applique la stratégie déjà décrite. On commence par calculer les coefficients ( $c$ ) de  $P_1$  dans la base  $GS$ , puis les coefficients ( $c_{lim}$ ) de sa projections sur  $E_{3,lim}$  dans la base  $GS\_lim$ .

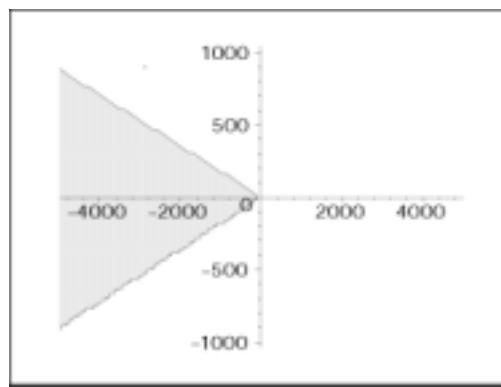
On prend ensuite un polynôme générique  $Q_3$  dans  $E_3$  et un autre  $Q_{3\_lim}$  dans  $E_{3,lim}$ . On calcule leurs dérivées secondes  $R_3$  et  $R_{3\_lim}$  et on décrit la négativité de celles-ci en 0 et  $\chi_{max}$ . On obtient respectivement les conditions ( $d_1 \leq 0$  et  $d_2 \leq 0$ ) et ( $d_{1\_lim} \leq 0$  et  $d_{2\_lim} \leq 0$ ).

```
> c := seq(prod_scal(P1, GS[j], x), j=1..nops(GS));
> c_lim := seq(prod_scal(P1, GS_lim[j], x), j=1..nops(GS_lim));
> Q3 := sum(a[i]*GS[i], i=1..4) : Q3_lim := sum(b[i]*GS_lim[i],
   i=1..2) :
> R3 := diff(Q3, x$2) : R3_lim := diff(Q3_lim, x$2) :
> d1 := subs(x=0, R3) : d2 := subs(x=ChiMax, R3) : evalf(d1);
   evalf(d2);
   .0005803910069 a3 - .003210991445 a4
   .0005803910069 a3 + .003285173652 a4

> d1_lim := subs(x=0, R3_lim) : d2_lim := subs(x=ChiMax, R3_lim) :
   evalf(d1_lim); evalf(d2_lim);
   -.0003041284572 b1 + .002212620451 b2
   -.0003041284572 b1 - .002287495689 b2
```

On trace le domaine ( $d_1 \leq 0$  et  $d_2 \leq 0$ ).

```
> test_ccv := proc(x, y) local u, v; u := evalf(subs({a[3]=x, a[4]=y},
  d1)); v := evalf(subs({a[3]=x, a[4]=y}, d2)); if sign(u) <= 0 and
  sign(v) <= 0 then 1 else -1 end if; end proc;
> ccv := implicitplot(test_ccv, -5000..5000, -1000..1000,
  contours=[0], filled=true, colouring=[white, gray], grid=[100,
  100]) :
```



Il en résulte que le projeté de  $P_1$  sur le domaine de concavité, i.e. la meilleure approximation concave des données de la route 1 en degré 3, est obtenue grâce à la projection sur  $d_2$ , de sorte que le projeté cherché est  $c[1].G1 + c[2].G2 + u.G3 + v.G4$  où  $(u,v)$  est le projeté de  $(c[3],c[4])$  sur  $d_2$ .

```
>proj := proc(d, a, b, u, v) local A, B ; A := subs({a=1,b=0}, d) ; B := subs({a=0,b=1}, d) ; u-A*(A*u+B*v)/(A^2+B^2), v-B*(A*u+B*v)/(A^2+B^2) ; end proc :
>C := [c[1], c[2], proj(d2, a[3], a[4], c[3], c[4])] :
>Proj := sum(C[i]*GS[i], i=1..4) ;
```

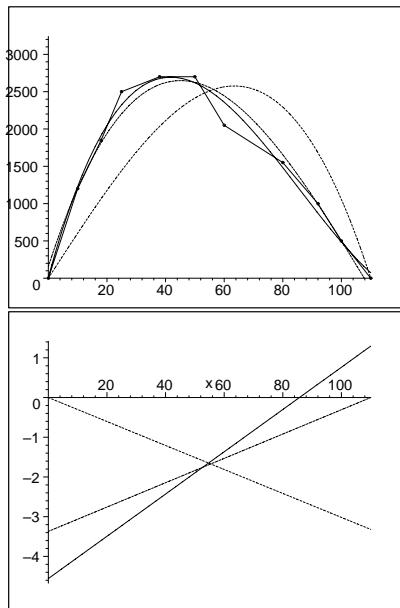
$$\begin{aligned} Proj &:= \frac{638215794589780}{4073153358839} + \frac{1476796145449537}{12219460076517} x \\ &\quad - \frac{6862981991470}{4073153358839} x^2 + \frac{62390745377}{12219460076517} x^3 \end{aligned}$$

On effectue les mêmes calculs pour la projection sur  $E_{3,lim}$ . On affiche le résultat de ces calculs : tout d'abord les approximations (avec les notations du texte, ce sont  $P_3$ ,  $Q_3$  et  $Q_3^0$ ), puis leurs dérivées secondees.

```
>proj_lim := proc(u, v) local U, V ; U, V := proj(d1_lim, b[1], b[2], u, v) ; if sign(evalf(subs({b[1]=U, b[2]=V}, d2_lim))) > 0 then U, V := proj(d2_lim, b[1], b[2], u, v) ; if sign(evalf(subs({b[1]=U2, b[2]=V2}, d1_lim))) > 0 then U, V :=0, 0 end if; end if ; U, V ; end proc :
>C_lim := [proj_lim(c_lim[1], c_lim[2])] :
>Proj_lim := expand(sum(C_lim[i]*GS_lim[i], i=1..2)) ;
```

$$Proj\_lim := \frac{23532265130000}{386676220659} x - \frac{1944815300}{386676220659} x^3$$

```
>display({MCplot3[1], plot(Proj_lim, x=xrange, linestyle=2, colour=black), plot(Proj, x=xrange, linestyle=3, colour=black)}) ;
>plot([diff(P1, x$2), diff(Proj_lim, x$2), diff(Proj, x$2)], x=xrange, colour=clist, linestyle=[1,2,3]) ;
```



On constate donc que la projection  $Q_3^0$ , à savoir celle qui a vraiment les propriétés souhaitées d'annulation aux bornes et de concavité, diffère assez notablement des données de départ.

## 14 Obtention d'un schéma numérique

Pour obtenir une équation vérifiée par  $\chi$ , on écrit la conservation du nombre de véhicules. Celle-ci s'écrit, en considérant le tronçon de route  $[x, x + dx]$  pendant l'intervalle de temps  $[t, t + dt]$  : le nombre de véhicules sur le tronçon est  $\chi \cdot dx$  et sa variation pendant l'intervalle de temps est donc  $\partial \chi / \partial t \cdot dx \cdot dt$ . Cet accroissement est la différence entre le nombre de véhicules entrant et sortant. Le nombre de véhicules passant en un point pendant l'intervalle de temps est  $\chi \cdot dt$  et donc la différence entre le nombre de véhicules entrant (en  $x$ ) et sortant (en  $x + dx$ ) est  $-\partial \chi / \partial x \cdot dt \cdot dx$ . Il vient donc

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

ou encore, en écrivant  $\varphi = f(\chi)$ ,

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial f(\chi)}{\partial x} = 0.$$

Pour implémenter un schéma numérique, on fait un maillage de pas  $\Delta x$  (diviseur entier de  $L$ ) en espace et de pas  $\Delta t$  en temps. On impose la densité initiale pour  $x = 0$  et la densité limite pour  $t = 0$ . On note, pour  $j$  entier entre 0 et  $j_{max} = L/\Delta x$  et pour  $n$  entier positif,  $\chi(n\Delta t, j\Delta x) = \chi_j^n$ . D'après la formule de Taylor, si  $g$  est une fonction dérivable en un point  $a$ , on a  $g(a + \Delta a) - g(a - \Delta a) \sim 2\Delta a \cdot g'(a)$ . Par conséquent

$$\frac{\chi_j^{n+1} - \chi_j^{n-1}}{2\Delta t} \simeq \frac{\partial \chi}{\partial t}(n\Delta t, j\Delta x)$$

et

$$\frac{f(\chi_{j+1}^n) - f(\chi_{j-1}^n)}{2\Delta x} \simeq \frac{\partial f(\chi)}{\partial x}(n\Delta t, j\Delta x).$$

On est donc conduit à adopter le schéma numérique suivant :

$$\Delta x (\chi_j^{n+1} - \chi_j^{n-1}) + \Delta t (f(\chi_{j+1}^n) - f(\chi_{j-1}^n)) = 0$$

On se donne  $\chi_0^n$  la densité entrante et  $\chi_j^0$  la densité initiale. Numériquement, on s'intéresse à l'évolution en temps, pas par pas, et ce en calculant la densité à chaque point du maillage, en partant de l'entrée, pas par pas.

Pour résoudre les problèmes limites, on amende le schéma numérique de la façon suivante (justifiée également par la formule de Taylor). Tout d'abord pour calculer  $\chi^1$ , on ne dispose que de  $\chi^0$ , d'où l'écriture

$$\chi_j^1 = \chi_j^0 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(\chi_{j+1}^0) - f(\chi_{j-1}^0)).$$

De même pour  $\chi_{j_{max}}$ , on ne dispose que de  $\chi_{j_{max}-1}$  :

$$\chi_{j_{max}}^{n+1} = \chi_{j_{max}}^{n-1} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (f(\chi_{j_{max}}^n) - f(\chi_{j_{max}-1}^n))$$

Pour le traitement numérique, on a choisi  $L = T = 1$ ,  $\Delta x = \Delta t = 10^{-2}$ ,

$$\chi_{max} = 110, \quad \chi^0(x) = 70e^{x-L} \quad \text{et} \quad \chi_0(t) = 50(1 + \sin(2\pi t)).$$

## 15 Résolution numérique

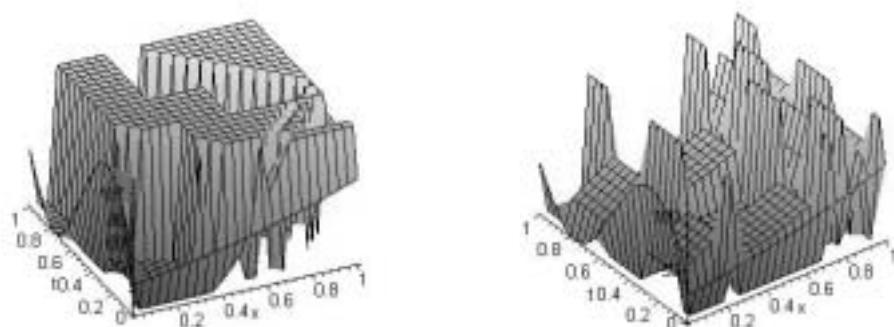
La procédure `trafic` calcule les valeurs  $\chi_j^n$  selon le principe précédent. La procédure `interpol` construit une fonction en escalier à partir de valeurs discrètes. Enfin la procédure `tracé` trace la solution numérique de l'équation ( $E$ ) en fonction des données, notamment en fonction de l'approximation  $f$  de la relation fondamentale entre  $\chi$  et  $\varphi$ .

```
> trafic := proc(f, χ_i, χ_e, dx, dt, L, T) global ChiMax ; local j,
n, jmax, d, c_x, c_t, e ; jmax := floor(L/dx) ; n := 0 ; for j from 0
to jmax do d[0][j] := evalf(χ_i(j*dx)) ; end do ; while n*dt < T do
d[n+1][0] := evalf(χ_e(n*dt)) ; for j to jmax do if n = 0 then c_t :=
1 else c_t := 2 ; end if ; if j = jmax then c_x := 1 else c_x := 2 ;
end if ; e := d[n+1-c_t][j] - (c_t*dt)/(c_x*dx)*(f(d[n][j-1+c_x]) -
f(d[n][j-1])) ; d[n+1][j] := min(max(0, e), ChiMax) ; end do ; n :=
n+1 ; end do ; d ; end proc :
> interpol := proc(d, x, t, dx, dt) local n, j ; j := round(x/dx) ; n :=
round(t/dt) ; d[n][j] ; end proc :
> tracé := proc(f, χ_i, χ_e, dx, dt, L, T) local d, h ; d :=
trafic(f, χ_i, χ_e, dx, dt, L, T) ; h := (x, t) → interpol(d, x, t,
dx, dt) ; plot3d(h(x, t), x=0..L, t=0..T, axes=NORMAL) ; end proc :
> dx := 10^(-2) : dt := 10^(-2) : L := 1. : T := 1. : χ_i := x →
70*exp(x-L) : χ_e := t → 50*(1+sin(2*π*t)) :
```

Les cinq figures présentent les diverses simulations, en fonction de  $f$ . D'abord avec la précision maximale sur les points de contrôle, puis en degré 2 et enfin en degré 3 (qui n'est pas concave).



On étudie ensuite l'effet d'imposer la concavité, puis la concavité et nullité aux bornes. On constate avec ces exemples que la modélisation n'est pas neutre et qu'il faut donc valider les hypothèses faites avec vigilance.



## 16 Traitement théorique de l'E.D.P.

L'étude de l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial f(\chi)}{\partial x} = 0$$

peut s'effectuer en cherchant les courbes caractéristiques  $t \mapsto (x(t); t)$  le long desquelles  $\chi$  est constant.

En différentiant  $\chi(x(t), t)$  par rapport à  $t$ , on obtient

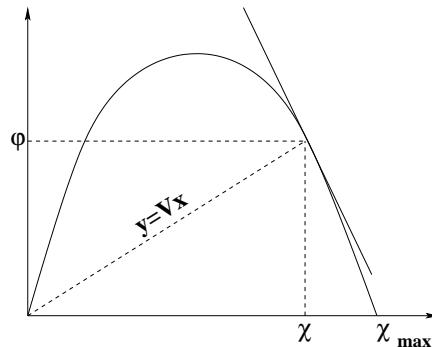
$$0 = \frac{\partial \chi}{\partial t} + x'(t) \frac{\partial \chi}{\partial x} .$$

Par comparaison avec l'équation précédente, il vient

$$x'(t) = f'(\chi)$$

et les courbes caractéristiques sont donc des droites de pente  $f'(\chi)$ . Autrement dit les «caractéristiques» de densité, débit, vitesse moyenne se propagent à la vitesse  $f'(\chi)$ , qui est distincte de la vitesse moyenne des véhicules  $V = f(\chi)/\chi$ .

On peut utiliser le graphe fondamental pour visualiser la différence entre ces deux quantités.



Cette méthode permet de déterminer  $\chi$  à tout instant, connaissant sa valeur en  $t = 0$ , du moins dans une première approche. Notons  $\chi_0$  la donnée initiale :  $\chi(x, 0) = \chi_0(x)$  pour  $x$  dans  $[0; L]$ . On a alors

$$\chi(x + f'(\chi_0(x)) t, t) = \chi_0(x) .$$

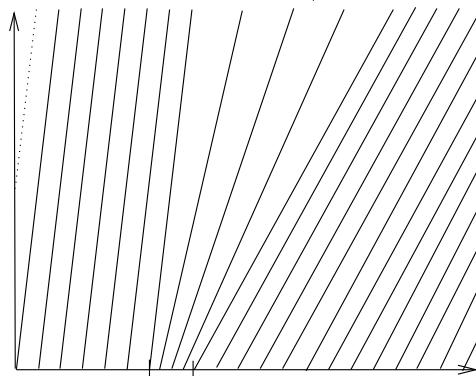
Néanmoins, dans le plan  $(x, t)$ , ces droites caractéristiques ont peu de chances de recouvrir le carré  $[0; L] \times [0, T]$ . On peut rencontrer deux difficultés

1. Un point  $(x, t)$  est atteint pas au moins deux caractéristiques, correspondant donc à des valeurs distinctes  $\chi$  .
2. Un point  $(x; t)$  n'est atteint par aucune caractéristique.

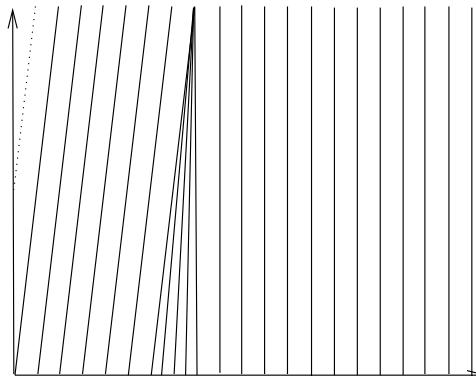
Traitons un exemple. On prend  $L = 100$ ,  $T = 1$ ,  $\chi_{max} = 110$  et, pour  $f$ , la fonction la plus simple possible, à savoir  $f(\chi) = \chi(110 - \chi)$ . On part d'une situation initiale à deux états :  $\chi_0(x) = 50$  pour  $0 \leq x \leq 30$ ,  $\chi_0(x) = 5a$  pour  $40 \leq x \leq L$  et  $\chi_0$  est affine sur  $[30; 40]$ . Ici  $a$  est une constante distincte de 10. En fait, on pourrait, en se passant de la condition de continuité pour  $\chi_0$ , prendre  $\chi_0 = 5a$  à partir de 30 : le phénomène que nous allons décrire serait le même.

Les caractéristiques sont donc d'équation  $x(t) = x_0 + 10t$  pour  $0 \leq x_0 \leq 30$ ,  $x(t) = x_0 + (110 - 10a)t$  pour  $40 \leq x_0 \leq L$  et  $x(t) = x_0 + (10 + (10 - a)u)t$  pour  $x_0 = 30 + u$  et  $0 \leq u \leq 10$ . Prenons  $t = T$ , les points  $(x, T)$  atteints par une caractéristique du premier type sont ceux pour lesquels  $10 \leq x \leq 40$ . Pour le second type, on trouve  $150 - 10a \leq x \leq 210 - 10a$ . Enfin pour le troisième type, il vient  $x = 40 + (11 - a)u$  et donc  $x$  est compris entre 40 et  $150 - 10a$ .

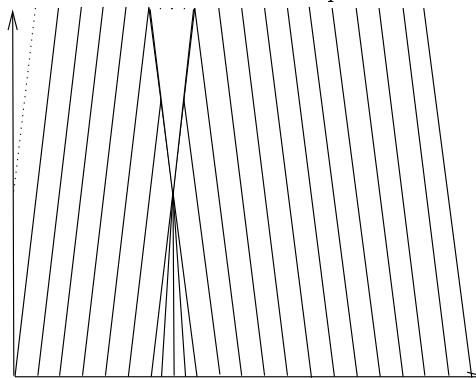
Ainsi, lorsque  $a < 11$ , tous les points entre 10 et  $L$  sont atteints. Ce qui ce que l'on veut si l'on admet que les points vérifiant  $0 \leq x < 10$  sont atteints par des caractéristiques issues de  $x = 0$  et  $t > 0$  (le flux rentrant sur la route).



Si maintenant  $a = 11$ , le point  $x = 40$  est atteint par toutes les caractéristiques issues de  $(x_0, 0)$  avec  $30 \leq x_0 \leq 40$ .



Si  $a > 11$  les courbes caractéristiques se croisent avant  $t = T$  et, de plus, des points entre  $210 - 10a$  et  $100$  ne sont atteints par aucune caractéristique.



## 17 Solutions discontinues.

La conséquence du calcul précédent est qu'il ne peut exister de solutions continues, même avec des conditions initiales continues, que dans un intervalle de temps petit. Afin de comprendre le phénomène, on va partir directement d'une solution discontinue et voir si on peut «contraindre» la discontinuité.

On prend les mêmes hypothèses que pour l'exemple précédent avec la modification suivante :  $\chi_0 = 60$  pour  $30 < x \leq L$ . Pour  $\chi_0 = 50$ , les caractéristiques ont une pente 10, pour  $\chi_0 = 70$  la pente est  $-30$ . Il s'ensuit que pour toute valeur  $\alpha$  comprise entre  $-30$  et  $10$ , la fonction  $\chi_\alpha(x; t) = 50$  pour  $0 \leq x < 30 + \alpha t$  et  $\chi_\alpha(x; t) = 60$  pour  $30 + \alpha t < x \leq L$  est solution de  $(E)$  en dehors de la droite  $x = 30 + \alpha t$ . Pour juger de la pertinence de cette famille de solutions, nous pouvons essayer de vérifier la conservation des véhicules à l'instant  $t$ . Initialement on avait  $50 \times 30 + 60 \times 70$  véhicules, tandis qu'à l'instant  $t$  il y en a  $50 \times (30 + \alpha t) + 60 \times (70 - \alpha t)$ . La différence entre l'instant  $t$  et l'instant initial est donc de  $-10\alpha t$ . Parallèlement, comme le flux rentrant est  $f(50) = 3000$  et le flux sortant est  $f(70) = 2800$ , il y a donc  $200t$  véhicules en plus sur la route. Pour que les deux quantités calculées soient égales, on doit donc avoir  $\alpha = -20$ .

On se donne maintenant une «onde de choc», i.e. une courbe paramétrée

$$\Omega = \{(x_c(t); t) \mid t \in [0; T]\}$$

telle qu'il existe une solution  $\chi$  de  $(E)$  en dehors de  $\Omega$ . On impose de plus

1. la fonction  $\chi$  admet des limites à gauche et à droite de  $\Omega$  :

$$\forall t \in [0; T] \quad \lim_{x \rightarrow x_c(t)^\pm} \chi(x, t) = \chi_\pm(t)$$

2. la fonction  $t \mapsto x_c(t)$  est de classe  $C^1$  sur  $[0; T]$ .

Fixons  $\tau$  et examinons le bilan de conservation (des véhicules) dans l'intervalle  $[x_c(\tau - \delta_t); x_c(\tau + \delta_t)]$  entre les instants  $\tau - \delta_t$  et  $\tau + \delta_t$ . On étudie ce bilan lorsque  $\delta_t$  tend vers 0, avec l'approximation  $\delta_x \simeq x'_c(\tau)\delta_t$ .

Le flux entrant est  $2f(\chi_-)\delta_t$ , tandis que le flux sortant est  $2f(\chi_+)\delta_t$ . Or, à l'instant  $\tau - \delta_t$ , on comptabilise  $\chi_+(x_c(\tau + \delta_t) - x_c(\tau - \delta_t))$  véhicules, soit approximativement  $2\chi_+ x'_c(\tau)\delta_t$ . De même, à l'instant  $\tau + \delta_t$ , on comptabilise  $2\chi_- x'_c(\tau)\delta_t$  véhicules. On doit donc avoir égalité entre  $2(f(\chi_-) - f(\chi_+))\delta_t$  et  $2(\chi_- - \chi_+)x'_c(\tau)\delta_t$ . Il vient donc

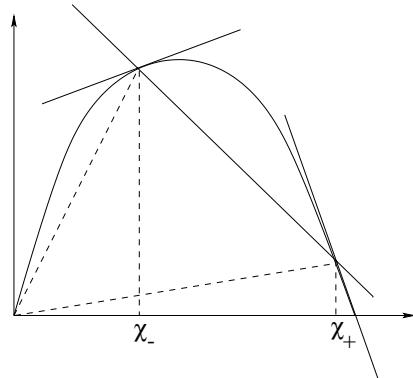
$$\frac{f(\chi_+) - f(\chi_-)}{\chi_+ - \chi_-} = \frac{\delta_x}{\delta_t} = x'_c(\tau).$$

On comprend ici la dénomination d'«onde de choc» : à sa traversée, les conditions du trafic sont brutalement modifiées. L'onde de choc se propage à la vitesse  $x'_c$ , vitesse que l'on vient de relier à la quantification de la discontinuité de  $\chi$ . On peut interpréter géométriquement la relation précédente : l'onde de choc se propage à une vitesse égale à la pente reliant les points du diagramme fondamental attachés aux valeurs limites à gauche et à droite.

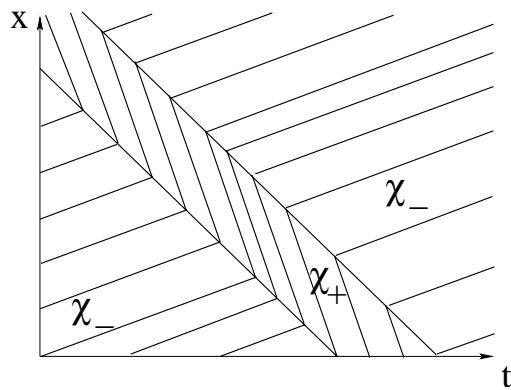
Ainsi le diagramme fondamental permet de comprendre à quel vitesse se «propage» un bouchon : si un trafic fluide (par exemple  $\chi = 40$ ), rencontre un bouchon (par exemple  $\chi = 100$ ), il y a un phénomène de «recul» du bouchon (concrétisé par le recul de la voiture de sécurité alertant les automobilistes).

Avec l'exemple donné, cette voiture se déplace à la vitesse  $(f(100) - f(40))/60$ , i.e. 30 km/h (en marche arrière, bien entendu).

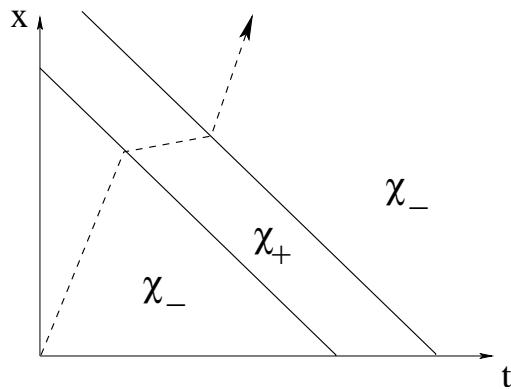
Voici le graphe fondamental. On y lit la vitesse de propagation des courbes caractéristiques :  $f'(40)$  et  $f'(100)$ , ainsi que la vitesse de propagation de l'onde de choc :  $(f(100) - f(40))/(100 - 40)$ . Enfin on lit la vitesse de déplacement d'un véhicule soumis à une densité de trafic 40 ou 100.



On en déduit les courbes caractéristiques (en supposant que le trafic redévient fluide après le bouchon) :



et donc le déplacement d'un véhicule



et on peut, par exemple, en déduire le temps de parcours.