MODELISATION
du
TRAFIC ROUTIER

Séminaire d'épistémologie

Le 14 janvier 2004

François Sauvageot

Position du problème

- Modéliser c'est faire des allers-retours incessants entre observation, théorie, prédiction
- Proposer un modèle c'est identifier différents paramètres, variables et caractéristiques du problème.
- Un modèle répond en général à une question précise. Changer ou affiner la question nécessite le plus souvent de changer ou d'affiner le modèle.

Les variables

- Ce sont elles qui peuvent être confrontées à l'observation, lors d'une simulation, et dont on peut se servir pour faire des prédictions. Pour valider le modèle, il faut que les prédictions soient consistantes avec les phénomènes observés.
- En aval de ces prédictions on peut tirer des conséquences sur des variables n'apparaissan pas dans le processus de modélisation. L'observation de ces variables permet également de valider ou invalider le modèle. O parfois de rajouter une hypothèse pour qu'il so valide.

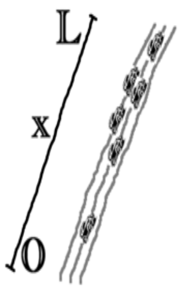
Modélisation des « bouchons »

On souhaite comprendre comment se propage un bouchon et l'effet qu'il a sur le trafic routier (la vitesse des véhicules) en amont et en aval.

En particulier on s'intéresse à la vitesse de recul du véhicule prévenant les automobilistes pour qu'ils ralentissent : quelle doit être sa vitesse ?

Les variables dans l'exemple

- On s'intéresse à un tronçon de route sans intersection, modélisée par un intervalle [0;L]. S'il y a plusieurs voies de circulation, la valeur en x dans [0;L] d'une variable signifie la moyenne de la variable pour les véhicules situés en l'abscisse x.
- On étudie les phénomènes pour un intervalle de temps fini [0;T].



Les phénomènes étudiés

Les variables observées sont

- v(x,t) la vitesse moyenne du(es) véhicule(s) situé(s) en x au temps t
- χ(x,t) la densité de véhicules, autrement dit le nomb de véhicules par unité de longueur :

  $\int_x^{x+\Delta x} \chi(u,t)du$ représente le nombre de véhicules au temps t sur le tronçon [x;x+Δx]
- ϕ(x,t) le flux de véhicules, autrement dit le nombre d véhicules par unité de temps :

  $\int_t^{t+\Delta t} \phi(x,u)du$ représente le nombre de véhicules qu sont passés à l'abscisse x durant l'intervalle de temps [t;t+Δt].

Les phénomènes en aval

Si on arrive à prédire ces quantités, on peut aussi s'intéresser

- aux émissions de CO_2
- au bruit du trafic
- aux émotions ressenties par les conducteurs

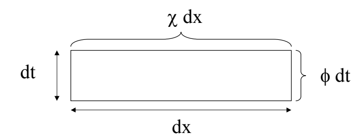
Ces dernières variables n'apparaîtront que dans l'analyse finale et non dans le corps de la modélisation …

Les caractéristiques

- Une fois les variables identifiées, il faut trouver des relations entre elles qui permettent de décrire l'évolution de la situation.
- Variant d'une situation à l'autre, il faudra donc les mesurer pour pouvoir étudier le problème et effectuer une simulation.

Flux et densité

- Dans l'exemple, une première relation purement formelle est obtenue à partir du nombre de véhicules par unité de longue et par unité de temps.



Flux et densité

On a donc $\phi(x,t)\, dt = \chi(x,t)\, dx$

ou encore $\phi(x,t) = \chi(x,t)\, v(x,t)$

Comme le flux et la vitesse peuvent s'obtenir par comptage, par exemple grâce à des câbles posés au sol, cette relation permet de calculer la densité de véhicules, ce qui est plus difficile à mesurer directement …

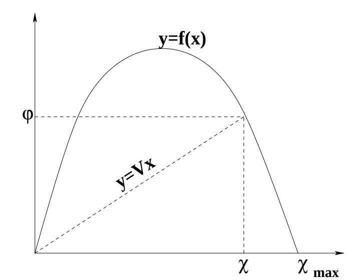
Relation caractéristique

- On cherche maintenant une relation entre flux et densité de la forme

$$\phi = f(\chi)$$

- Cette relation explique comment les conducteurs ajustent leur vitesse (ϕ/χ) en fonction de la densité de trafic. En quelque sorte la route est « décrite » par cette fonction f, qui est donc une «caractéristique » du modèle et variera d'une route à l'autre. On se place dans un tronçon où f est une donnée fixe.
- Le graphe de f est appelé « graphe fondamental ».

Exemple de graphe fondamental



Contraintes

Dans l'exemple donné on peut constater que le modélisateur a imposé quelques contraintes:

L'existence d'une densité maximale de véhicules χ_{max} sur la route

Le fait que $f(0)=f(\chi_{max})=0$

La concavité de f

Explication des contraintes

- 0 correspond à l'absence de véhicule et donc on doit imposer $f(0)=0$
- χ_{max} est une densité pour laquelle les véhicules sont pare-chocs contre pare-chocs et donc pour laquelle $f(\chi_{max})=0$
- La fonction f doit évidemment être positive, mais ceci résultera de la concavité …

Concavité

- La vitesse v représente la pente de la droite joignant un point du graphe fondamental à l'origine et il est naturel de penser que la vitess adoptée par les conducteurs décroît quand la densité de véhicules augmente.
- Comme les fonctions concaves sont celles pou lesquelles les pentes des cordes du graphe décroissent quand l'abscisse du point étudié augmente, la concavité est une bonne garantie pour obtenir ce que l'on veut …

Modèle affine des vitesses

Un exemple simple pour assurer la concavité est de prendre un polynôme de degré 2.

$$f(\chi)=a\chi(\chi_{max}-\chi)$$

Autrement dit la vitesse est une fonction affine de la densité

$$v= a(\chi_{max}-\chi)$$

Equation du mouvement

- Le nombre de véhicules dans un tronçon infinitésimal étant χdx, sa variation durant le temps dt est $\delta\chi/\delta t\, dxdt$
- Cette quantité représente donc le nombre de véhicules entrés dans le tronçon moins le nombre de véhicules sortis.
- C'est donc aussi $-\delta\phi/\delta x\, dxdt$

Equation du mouvement

Il vient

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial f(\chi)}{\partial x} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + f'(\chi)\frac{\partial \chi}{\partial x} = 0$$

Propagation

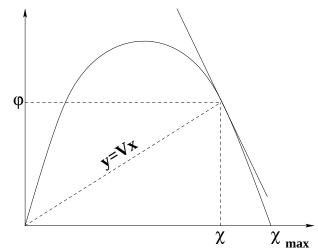
Les courbes caractéristiques sont les courbes (x(t),t) le long desquelles χ est constant.

Ici il vient $x'(t)=f'(\chi)$, ce sont donc des droites de pente $f'(\chi)$.

Autrement dit les «caractéristiques» de densité, débit, vitesse moyenne se propagent à la vitesse $f'(\chi)$, qui est distincte de la vitesse moyenne des véhicules $v=f(\chi)/\chi$.

Propagation

On peut utiliser le graphe fondamental pour visualiser la différence entre ces deux quantités.



Propagation

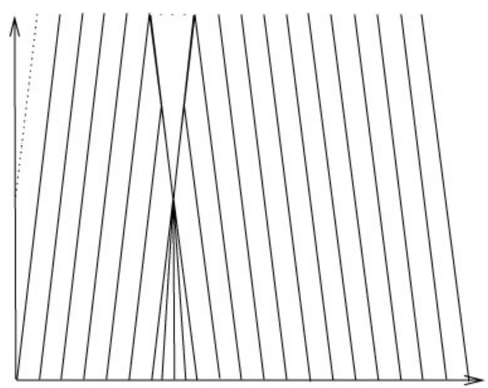
- Cette remarque permet de déterminer χ à tout instant, connaissant sa valeur en t=0, du moins dans une première approche.
- On a

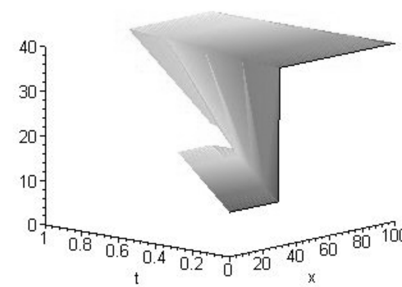
$$\chi(x+f'(\chi(x,0))t,t)=\chi(x,0)$$

Chocs

Néanmoins, dans le plan (x,t), ces droites caractéristiques ont peu de chances de recouvrir le carré [0;L]x[0,T]. On peut rencontrer deux difficultés :

- Un point (x,t) est atteint pas au moins deux caractéristiques, correspondant donc à des valeurs distinctes χ.
- Un point (x;t) n'est atteint par aucune caractéristique.





Bouchons

Une façon d'étudier les bouchons est donc d'étudier les chocs. En effet un bouchon est par exemple modélisé par le passage d'une densité χ_1 faible à une densité χ_2 élevée.

À la limite on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle vérifiant $\chi=\chi_1$ avant une certaine abscisse et $\chi=\chi_2$ après.

L'abscisse pour laquelle s'effectue cette rupture est, en fonction du temps, une « onde de choc ».

Ondes de choc

- De toute façon, le calcul précédent indique qu'il ne peut exister de solutions continues, même avec des conditions initiales continues, que dans un intervalle de temps petit.
- Au-delà, on est en présence d'une « onde de choc », i.e. une courbe paramétrée

$$\Omega=\{(x_c(t);t) \mid t\in[0;T]\}$$

telle qu'il existe une solution χ en dehors de Ω admettant des limites à gauche et à droite de Ω.

Condition de saut

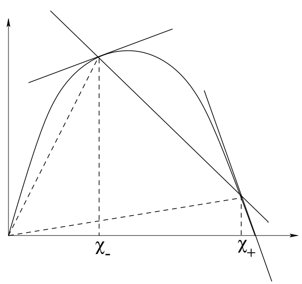
- La conservation du nombre de véhicules impos une condition de saut sur les limites à gauche à droite de Ω :

$$(f(\chi_+)-f(\chi\ ))\,/\,(\chi_+-\chi\ )= x'_c(t)$$

- On comprend ici la dénomination d'« onde de choc » : à sa traversée, les conditions du trafic sont brutalement modifiées. L'onde de choc se propage à la vitesse x'_c, vitesse que l'on vient d relier à la quantification de la discontinuité de χ

terprétation géométrique

'onde de choc, est-à-dire le ouchon, se ropage à une itesse égale à la ente reliant les oints du iagramme ondamental ttachés aux aleurs limites à auche et à droite.



Etude d'un bouchon

- Ainsi le diagramme fondamental permet de comprendre quelle est la vitesse à laquelle se « propage » un bouchon.
- Si un trafic fluide (par exemple χ=40), rencontre un bouchon (par exemple χ=100), il y a un phénomène de « recul » du bouchon (concrétisé par le recul de la voiture de sécurité alertant les automobilistes).

Utilisation du graphe fondamenta

- Sur le graphe fondamental, on lit (si a=1 et χ_{max}=110)
  - la vitesse de propagation des courbes caractéristiques

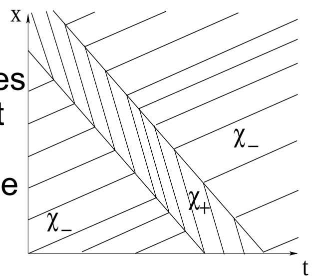
    f'(40)=30km/h et f'(100)=-90km/h,
  - la vitesse de propagation de l'onde de choc

    (f(100)-f(40))/(100-40)=-30km/h,
  - la vitesse de déplacement d'un véhicule soumis à une densité de trafic χ=40 ou χ=10

    f(40)/40=70km/h et f(100)/100=10km/h.

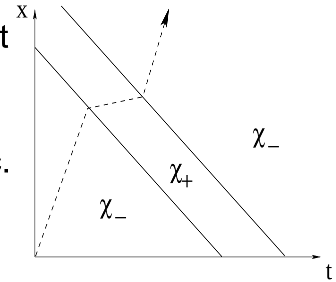
ndes de choc

- On en déduit les courbes caractéristiques (en supposant que le trafic redevient fluide après le bouchon).



Trajet d'un véhicule

- Et le déplacement d'un véhicule, le temps de parcours etc.



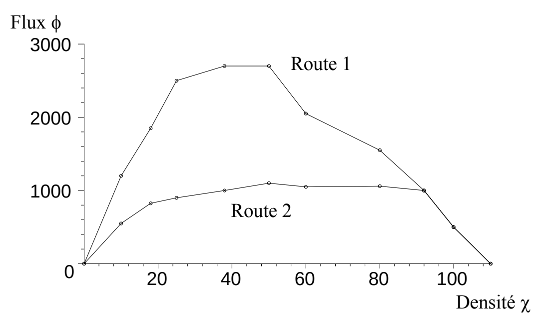
Problèmes de mesure

- Quand on cherche à « mesurer » une fonction se pose la question de la méthode puisque les observations fourniront au mieux quelques relations entre des flux et des densités observées.
- Idéalement le mathématicien espère obtenir une fonction …

Modélisation et réalité

- Dans la pratique on obtient pas facilement de fonction concave par des nuages de points ou des approximations par morceaux.
- Par exemple une approximation linéaire par morceaux a très peu de chances d'être concave dès que l'on s'autorise des erreurs d'observation

Exemples d'observations



Interpolation polynomiale

- L'interpolation polynomiale consiste à choisir n+1 points consécutifs du graphe à trouver l'unique polynôme de degré au plus n dont le graphe passe par ces point
- On peut aussi, par exemple, demander d passer par 2 points mais en « recollant » les dérivées. On obtient alors 4 contraint et donc des polynômes de degré en général 3

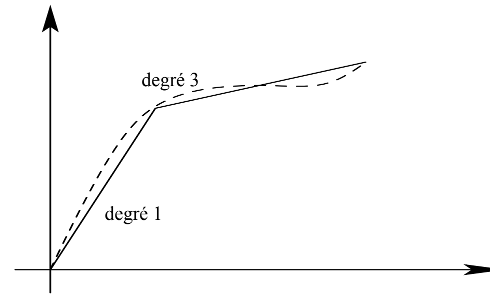
Interpolation polynomiale

L'inconvénient des polynômes de bas degré (comme 1) est que l'on se retrouve avec des fonctions peu régulières (tout au plus continues) et que les schémas numériques qui les utilisent vont souffrir de cette faible régularité, donnant des simulations des plus folkloriques …

Interpolation polynomiale

- L'inconvénient des polynômes de haut degré (dès que l'on dépasse 3 en fait) est qu'ils sont en général tout sauf concaves !
- La concavité revient en fait à rajouter 2 conditions puisque c'est une condition sur la négativité de la dérivée seconde.

Illustration du problème



Stratégie

C'est donc en degré 2 que l'on a le plus de chances de s'en sortir et, au vu des autres contraintes, le plus simple est de choisir comme modélisation

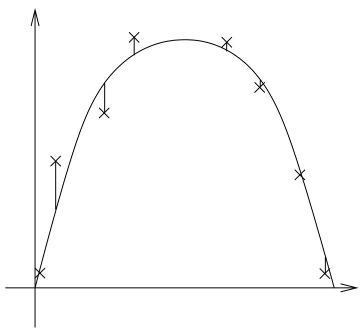
$$\phi = a\chi(\chi_{max}-\chi)$$

i.e. une variation affine (décroissante) de la vitesse en fonction de la densité.

Choix de *a*

- On peut chercher une approximation au sens des moindres carrés, autrement dit minimiser la somme des carrés des écarts « verticaux » entre les points du graphe observés et ceux d'un polynôme approximateur

Méthode des moindres carrés



Remarques

On pourrait aussi ajuster la vitesse maximale, le flux moyen etc.

Le choix de la méthode des moindres carrés est fondé sur la croyance que χ est une variable explicative du comportement des conducteurs qui, lui, est modélisé par $\phi=f(\chi)$.

On pourrait aussi le formuler ainsi : la réponse ϕ des conducteurs face à une situation χ donnée est en moyenne $\phi=f(\chi)$ et, mieux, suit en fait une loi normale centrée en $f(\chi)$ de variance indépendante de χ.

Méthode des moindres carrés

- Avec ce point de vue, la méthode des moindres carrés exprime le maximum de vraisemblance, c'est-à-dire que l'on choisit a de telle sorte que la probabilité d'obtenir les couples (χ_i,ϕ_i) que l'on a observés est maximale avec ce choix de *a*.
- En effet elle vaut

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (\phi_i - f(\chi_i))^2}$$

Discrétisation

- Pour implémenter un schéma numérique on fait un maillage en espace et en temps autrement dit on cherche à calculer

$$\chi^n_j=\chi(j\Delta x,n\Delta t)$$

où Δx représente une longueur élémentaire et Δt un temps élémentaire

Discrétisation

On approxime la dérivée par la pente

$$\delta\chi/\delta t(j\Delta x,n\Delta t)=(\chi^{n+1}_j-\chi^n_j)/\Delta t$$

ou encore, pour plus de stabilité numérique

$$\delta\chi/\delta t(j\Delta x,n\Delta t)=(\chi^{n+1}_j-\chi^{n-1}_j)/2\Delta t$$

Discrétisation

De même

$$\Delta f(\chi)/\delta x(j\Delta x,n\Delta t)=(\chi^n_{j+1}-\chi^n_j)/\Delta x$$

ou encore, pour plus de stabilité numérique

$$\Delta f(\chi)/\delta x(j\Delta x,n\Delta t)=(f(\chi^n_{j+1})-f(\chi^n_{j-1}))/2\Delta x$$

Discrétisation

D'où le schéma numérique

$$(\chi^{n+1}_j-\chi^{n-1}_j)\Delta x+(f(\chi^n_{j+1})-f(\chi^n_{j-1}))\Delta t=0$$

Paramètres

Avec un tel schéma numérique on peut effectuer des simulations, il suffit de se donner les paramètres du problème :

- La densité initiale (χ^0_j)
- Le trafic entrant (χ^n_0)