

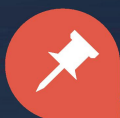
Le bulletin de l'APMEP - N° 557

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Juillet, août, septembre 2025

Estimation



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2025-2026 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Magali HILLAIRET, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Audrey DUGUE, Nada DRAGOVIC, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Michel SUQUET, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL.

Équipe T_EXnique : Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Pol LE GALL, Benoît MUTH, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Anne-Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

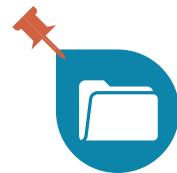
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : septembre 2025. ISSN : 2608-9297.

Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE

ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin



Nightingale & Riesz

Qu'est-ce qu'estimer en mathématiques ? Dans cet article, François Sauvageot nous emmène dans une promenade mathématique sur le thème de l'estimation. Ce sera l'occasion de porter un nouveau regard sur les moyennes, la convexité ou la duplication du cube... et d'interroger nos pratiques d'évaluation.

François Sauvageot

Estimer

Étymologiquement *estimer* [1, 2] provient du latin *aestimare* que des étymologistes latins relient à *aes* (argent) et au suffixe *tim*, signifiant *évaluer en argent*. *Aestimare* a aussi donné *esmer* puis en anglais *to aim*, signifiant *viser à*. *Aestimare* c'est apprécier une valeur matérielle ou morale.

Estimer peut signifier évaluer la valeur d'une chose, former une opinion avantageuse, juger, penser, croire, être d'avis, supposer, évaluer sans exactitude. S'estimer c'est avoir une haute considération pour soi-même ou se considérer être dans un certain état.

Quant à *estimation*, cela peut signifier le processus d'évaluation de la valeur monétaire, la détermination approximative d'un nombre ou de grandeurs. C'est aussi une connaissance inférieure à celle obtenue par le raisonnement quant à la certitude qu'elle est capable d'atteindre. Elle peut même être placée au même rang qu'une opinion ou de l'instinct animal. En ce sens elle est en soi incapable d'erreur et son jugement ne peut être discuté.

Une estimation immobilière, par exemple, s'obtient souvent en demandant à plusieurs spécialistes de fournir un chiffrage. On en déduit sa propre estimation sous forme d'intervalle ou de moyenne (ce qui ne veut pas dire une moyenne arithmétique). *C'est autour de ces notions de moyenne et d'intervalles* que je vais développer quelques points de vue sur l'estimation.

En mathématiques, il me semble qu'on désigne actuellement par le vocable *estimation* le processus de détermination approximative, et donc aussi par métonymie cette approximation. Mais, contrairement à l'usage ancien, en mathématiques on a aussi l'ambition d'évaluer l'erreur commise durant le processus. J'évoquerai aussi la notion d'*estimateur* et un mot qui est parfois synonyme d'*estimation* : *estime*.

Dans le cadre plus large de l'enseignement des mathématiques, comme des autres disciplines, l'estime peut être reflétée par une note ou une appréciation (encore un terme synonyme d'estimation comme on l'a souligné). Ces estimations sont très présentes dans l'éducation, que ce soit dans les bulletins scolaires ou dans les rapports d'inspection. Dans ce cadre, il convient toutefois de préciser ce que l'on estime : le plus souvent ce n'est pas directement une grandeur. Que ce soit la compréhension d'un phénomène ou d'une procédure, d'une méthodologie ou de la portée d'une modélisation, on commence souvent par opérer une réification, c'est-à-dire transformer une idée abstraite en une chose concrète. *Noter une évaluation, et en déduire des moyennes scolaires, permet-il une estimation de quelque chose, et si oui, de quoi ?* S'agit-il d'une certaine forme d'intelligence, de la compréhension de quelque chose, de la fiabilité d'un savoir ? Et à quoi cette moyenne sert-elle ? Certaines personnes, par exemple à l'OCDE¹, soutiennent qu'il ne faut pas noter les élèves avant 13 ou 14 ans et qu'il faut encourager

1. Organisation de Coopération et de Développement Économiques.



les progressions. Le but est de les amener à être capables de débattre, de façon rigoureuse, comme des spécialistes. Il faut aussi leur faire confiance et développer leur propre estime.

Pour éclairer ces questions, voici une citation de Florence Nightingale [3, 4], pionnière des statistiques et contemporaine de la reine Victoria, célèbre pour son utilisation de représentations visuelles des données aux fins de convaincre politiques et militaires : *I agree as to the doubtful value of competitive examination. The qualities which you really want, viz., self-control, self-reliance, habits of accurate thought, integrity and what you generally call trustworthiness, are not decided by competitive examination, which test little else than the memory.*²

Dans cet article j'évoquerai quelques pratiques mathématiques : statistiques chères à Nightingale, approximation linéaire, utilisation de la convexité chère à Frigyes Riesz [5]. Ce mathématicien hongrois, au style particulièrement clair, est un des trois fondateurs au début du xx^e siècle de l'analyse fonctionnelle, avec Maurice Fréchet, illustre adhérent permanent de l'APMEP depuis 1921. Dans un premier temps, j'évoquerai la question du modèle, sous-jacente à toute estimation, et notamment le choix d'une moyenne. Dans un second temps, je rentrerai dans le vif du sujet, mathématiquement parlant, pour montrer comment utiliser la convexité pour construire des intervalles permettant de donner une estimation concrète. Au passage j'espère montrer un peu de pratique de cette notion nouvellement réintroduite en Terminale. Par exemple je donnerai ma vision du problème du plus grand produit. Dans un dernier temps, je m'éloignerai du calcul pour aborder des questions avec un point de vue géométrique. Les exemples proposés sont exploitables en classe.

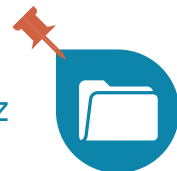
Estimateur et modèle

Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un ensemble de points d'un espace affine, leur isobarycentre peut être interprété comme leur moyenne, ou leur centre de masse. Si on affecte ces points de masses $(m_i)_{1 \leq i \leq n}$, la moyenne pondérée $\bar{x}$ est obtenue par la formule $m\bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i$ où $m = \sum_{i=1}^n m_i$. En probabilités la même notion se retrouve : x_i est alors l'ensemble des valeurs d'une variable aléatoire X et on prend $m_i = P(X = x_i)$, de sorte que $\bar{x}$ est la valeur moyenne de X , que l'on appelle aussi espérance. Lorsque X n'est pas connu, on peut en estimer l'espérance et il s'agit alors d'une notion statistique.

On considère que ce qui est observé est un phénomène aléatoire qui peut se répéter, de façon indépendante, indéfiniment, i.e. on se donne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille indépendante et identiquement distribuée de variables aléatoires de même loi que X . On pose alors $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. L'indépendance suppose que les phénomènes ne se modifient pas au fur et à mesure de leurs réalisations, ce qui n'est pas toujours intuitif. On n'a pas toujours besoin de cette indépendance si toutefois le paramètre estimé est invariant dans le temps et si l'estimateur est linéaire. En notant $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X , on a ici $E(\hat{\mu}_n) = E(X)$, y compris si les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne sont pas indépendantes. Cela dit, comme il s'agit d'une espérance, en général cela ne permet pas une estimation concrète : l'estimateur est une variable aléatoire ! On préférerait obtenir un vrai nombre.

C'est l'objet de la loi des grands nombres et du théorème central limite de préciser le comportement de $\hat{\mu}_n$: limite lorsque n tend vers l'infini, convergence et vitesse de convergence. Je ne vais pas développer plus avant cet aspect des choses et je me contente de proposer une activité qui permet d'apprivoiser les phénomènes aléatoires, et de commencer à se forger une

2. Je doute de la valeur des évaluations compétitives. Les qualités que vous désirez réellement, i.e. le contrôle de soi, l'autonomie, une pensée rigoureuse, l'intégrité et ce que l'on nomme généralement la fiabilité, ne sont pas déterminées par une évaluation compétitive, qui ne teste pas grand-chose d'autre que la mémoire (traduction personnelle).



intuition sur les phénomènes de moyenne, de valeurs extrêmes, etc.

Danse et estimation

Dans *En attendant Godot* [6], Samuel Beckett écrit : *Il pourrait peut-être danser d'abord et penser ensuite ? Si ce n'est pas trop lui demander. – Est-ce possible ? – Mais certainement, rien de plus facile. C'est d'ailleurs l'ordre naturel.* Au sein de l'association *Résonance – Art & Science*, nous avons ainsi eu envie de développer des activités liant danse et mathématiques. Les deux disciplines interrogent l'espace et le temps et il est naturel d'associer les mathématiques et le corps, sans se limiter à compter sur les doigts, bien que ce ne soit pas quelque chose de honteux. Nous proposons d'abord de travailler l'état de danse avec quelques exercices sur le regard périphérique, la qualité de marche, puis on travaille la marche à l'unisson, par exemple les avance-recule qu'Odile Duboc a proposés : la ligne avance de huit pas, recule de sept, avance de six, etc. recule de un, avance de un, recule de deux, etc. jusqu'à reculer de huit. Le but est de parvenir à terminer en ligne, donc avec une grande qualité d'écoute et de regard périphérique, et sur la ligne de départ, ce qui implique de faire des pas équivalents vers l'avant et vers l'arrière. Une fois cela acquis, on travaille en ligne et on invite les personnes à échanger leurs places de la façon suivante : une et une seule personne avance de deux pas, les autres étant à l'écoute pour ne pas avancer en même temps ; elle se meut latéralement pour se placer devant une autre personne, puis recule doucement jusqu'à prendre sa place ; la personne ainsi délogée se déplace uniquement quand c'est nécessaire, en reculant d'un pas, puis se déplace latéralement et vient prendre la place de la personne qui l'a délogée. Mathématiquement on vient de travailler une transposition, et on peut imaginer travailler sur les permutations et donc sur l'ordre. Pour ce faire on demande à chaque personne du groupe (idéalement de l'ordre de six à dix personnes) de calculer un nombre (ou d'en choisir un au hasard dans un réceptacle par exemple), puis sans communiquer autrement que par les déplacements, effectués en ayant une exigence sur la qualité de danse, de faire en sorte que le groupe soit ordonné conformément à ces nombres. Voici quelques exemples de calcul de nombres : peinture de chaussure + jour de naissance d'un relatif (mère par exemple) + numéro de rue, ou encore temps mis pour venir de chez soi à l'atelier + année de naissance d'un relatif, etc.

On pratique alors l'exercice une première fois sans discuter de stratégie, *i.e.* on danse d'abord. Ensuite on discute des éléments à considérer pour estimer sa place dans le groupe, en questionnant moyenne, variance, valeurs extrêmes etc. et stratégie de communication. Par exemple il est plus facile de classer les extrêmes et de laisser les personnes qui pensent avoir le plus grand ou le plus petit nombre se classer entre elles, puis de réfléchir aux nombres intermédiaires.

On voit bien les limites de ces modélisations si on veut les appliquer aux notes d'élèves : que signifie cette moyenne que l'on calcule ? Est-ce l'estimation de quelque chose ? Difficile d'identifier ce que l'on estime alors même que la moyenne construit l'estime de soi que peuvent avoir les élèves ! La moyenne que l'on calcule sur un bulletin a donc du mal à se qualifier en tant qu'estimateur. Ce n'est que la moyenne d'un phénomène entièrement observé, à savoir les réponses produites à des questions. Elle ne signifie pas grand chose d'autre que cela.

Une moyenne est, par définition, un moyen terme, *i.e.* un nombre compris entre les deux extrêmes. **Il y a de nombreuses façons de construire des moyennes ! Alors pourquoi s'en tenir aux moyennes arithmétiques (parfois pondérées) ?** Par transport de structure on peut fabriquer une moyenne avec n'importe quelle bijection φ d'un ensemble E vers un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. L'ensemble E peut ne pas être un ensemble de nombres. Les moyennes les plus connues, mais aussi les plus raisonnables en ce sens que φ est continue, monotone et que la moyenne obtenue est homogène, sont celles d'ordre r , avec r dans $\mathbb{R}^*$, et associées à $\varphi : x \mapsto x^r$: ainsi pour $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ des éléments de $\mathbb{R}_+^*$, on définit

$$M_r = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r \right)^{1/r}, \text{ ou plus généralement}$$

$$M_r(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \right).$$



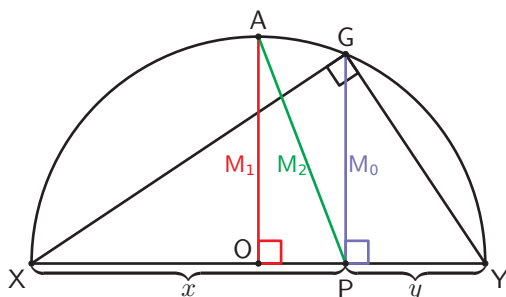
- Pour $r = 1$, il s'agit de la moyenne arithmétique usuelle.
- Pour $r = 2$, on parle de moyenne quadratique : elle valorise les valeurs hautes. Par exemple $M_2(1, 1, 10) = \sqrt{34} \approx 5,8 > 4 = M_1(1, 1, 10)$.
- Pour $r = -1$, on parle de moyenne harmonique, qui accentue les valeurs basses. Par exemple $M_{-1}(2, 5, 5) = \frac{10}{3} < 4 = M_1(2, 5, 5)$.

Un développement asymptotique permet de donner le comportement de M_r lorsque r tend vers 0 ou $\pm\infty$. Pour $r = 0$, on obtient la moyenne géométrique, qui est associée à $\varphi = \ln$:

$$M_0 = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$$

tandis que pour $\pm\infty$ on obtient $M_{-\infty} = \min(x_i)$ et $M_{+\infty} = \max(x_i)$.

Pour deux valeurs x et y , on peut visualiser ces moyennes en plaçant x et y sur un axe : $PX = x$ et $PY = y$ avec X, P, Y alignés dans cet ordre.



On trace ensuite le cercle de diamètre $[XY]$ de centre O . Le rayon du cercle est la moyenne arithmétique et on la place verticalement. Le théorème de Thalès permet d'obtenir la moyenne géométrique comme l'ordonnée du point G au-dessus de P sur le cercle : puisque XGY est rectangle, on voit que XPG et GPY sont semblables. Le théorème de Pythagore permet d'obtenir la moyenne quadratique comme AP , d'où $M_0 \leq M_1 \leq M_2$.

En fait la famille $M_r(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction croissante de chacun des x_i , mais aussi de r avec des inégalités strictes dès que les (x_i) ne sont pas tous égaux³, et cette famille décrit tout l'intervalle $[\min(x_i); \max(x_i)]$. Choisir l'une des valeurs

de r , c'est faire un choix de mode d'évaluation. On peut aussi noter qu'il existe d'autres modèles : on pourrait choisir de ne pas inclure la moins bonne note dans une moyenne, par exemple, ou retirer des mesures aberrantes.

Inégalité arithmético-géométrique

Voici une démonstration élémentaire, due (apparemment) à Augustin-Louis Cauchy, de $M_0 \leq M_1$: c'est vrai pour $n = 2$ d'après la figure du texte ou en reconnaissant $M_1 - M_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$. On remarque ensuite que pour calculer une moyenne on peut faire des groupements équilibrés et comme on a $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$ et $\sqrt{x_3 x_4} \leq \frac{x_3 + x_4}{2}$, il vient :

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{x_1 x_2} \sqrt{x_3 x_4}} &\leq \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2} \frac{x_3 + x_4}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} \right) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \end{aligned}$$

ce qui démontre l'inégalité arithmético-géométrique pour $n = 4$. Une récurrence directe à partir de décompositions en deux parties de même taille, démontre cette inégalité pour n une puissance de 2. Si n est quelconque, on remarque qu'une moyenne n'est pas modifiée si on rajoute des termes supplémentaires égaux à cette moyenne. Ainsi si G est la moyenne géométrique de $(x_1, \dots, x_n)$, c'est aussi celle de $(x_1, \dots, x_n, G, \dots, G)$, où on a rajouté suffisamment de fois G pour obtenir un nombre de termes égal à une puissance de 2, disons 2^k . D'après l'inégalité pour 2^k termes, on en déduit $G \leq \frac{1}{2^k}(x_1 + \dots + x_n + G + \dots + G)$ ce qui permet de conclure, en simplifiant, que l'inégalité est vraie pour n quelconque.

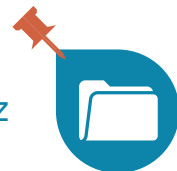
Voici une autre démonstration assez simple, niveau Terminale, qui part de deux remarques : l'inégalité est homogène (elle est inchangée si on multiplie tous les x_i par une même quantité α , avec $\alpha > 0$) et donc on peut supposer $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$; par convexité ou étude de fonction on a, pour $x > 0$, $x \leq \exp(x - 1)$. Ainsi en multipliant les inégalités entre quantités positives $x_i \leq \exp(x_i - 1)$, il vient

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \exp(n - n),$$

et donc

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq 1 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

3. Pour la croissance en fonction de r , on peut l'obtenir en utilisant la concavité du logarithme.



Remarque : la même idée d'homogénéité permet de déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz à partir de l'inégalité arithmético-géométrique.

D'une façon générale le choix d'un estimateur ou d'une estimation relève d'un choix de modèle.

Comme le souligne Nicolas Bouleau⁴ [7], les modèles sont très souvent sous-déterminés, ce qui signifie qu'on peut toujours rajouter des paramètres pour faire coller le modèle à la réalité. Par exemple on pourrait continuer à faire tourner les planètes autour de la Terre et rajouter des corrections : dans l'Antiquité on rajoutait des épicycles, ce qui se traduit en langage moderne comme autant de coefficients de Fourier rajoutés dans le développement en série de la trajectoire. Le modèle ainsi obtenu serait purement descriptif, et non porteur de sens. Les lois de Kepler puis les théories de la relativité fournissent ce sens. Les modèles ainsi obtenus ne sont pas plus exacts, mais plus convaincants.

Modéliser ne consiste donc pas à rajouter des paramètres : c'est proposer un modèle et en défendre les vertus, notamment en le comparant à d'autres modèles. On ne peut contredire ni valider un modèle sans le comparer à d'autres. En particulier on ne saurait se contenter d'un calcul sous prétexte qu'il est simple et que tout le monde peut l'effectuer. Ne pas remettre en question sa légitimité peut conduire à des aberrations. Par exemple la politique de l'enfant unique en Chine, fondée sur des projections du nombre d'enfants par femme effectuées par le mathématicien Song Jian, a eu un impact social dramatique conduisant par exemple à des infanticides ou des ventes d'enfants.

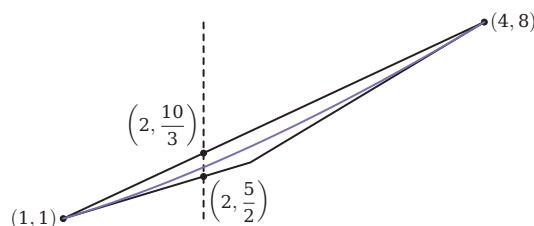
L'évaluation par moyenne arithmétique est une modélisation et c'est aussi un impensé assez fort de notre pratique évaluative : ne pourrait-on pas questionner les vertus de la moyenne arithmétique et ses avantages par rapport aux autres modèles ?

4. Probabiliste et philosophe, fondateur du centre de recherches mathématiques de l'École des Ponts et Chaussées.

5. Ce que l'on peut écrire $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_2 \\ y_1 & y & y_2 \end{vmatrix} \approx 0$.

Estimation d'une valeur

Soit $f : x \mapsto x^{3/2}$, que l'on connaît en 1, 4, 9 ... et que l'on veut calculer en 2. La figure suivante illustre que l'on peut insérer le graphe de cette fonction, en bleu, dans des triangles, en noir, formés par une corde et deux tangentes à la courbe :



Comme on va l'expliquer ensuite, la convexité permet d'obtenir après calculs $2\sqrt{2} \in \left[\frac{5}{2}; \frac{10}{3}\right]$. Cet encadrement permet de donner une valeur approchée en prenant la valeur médiane, i.e. $\frac{35}{12}$. On obtient $\sqrt{2} \approx \frac{35}{24} = \frac{3}{2} - \frac{1}{24} \approx 1,4583$. D'une façon générale, une méthode d'interpolation simple est l'interpolation linéaire. On connaît les valeurs y_1 et y_2 d'une fonction f en x_1 et x_2 et on veut estimer sa valeur y en x compris entre x_1 et x_2 . On considère que les points (x_1, y_1) , (x, y) et (x_2, y_2) sont approximativement alignés⁵. En utilisant la notion de pente définie comme le coefficient directeur de la corde entre deux points du graphe de f , cela s'écrit :

$$p_{1,2} = p(x_1, x_2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

L'interpolation linéaire s'écrit alors :

$$p(x_1, x) \approx p(x, x_2) \approx p(x_1, x_2), \text{ ou encore } y \approx y_1 + p_{1,2}(x - x_1) = y_2 + p_{1,2}(x - x_2).$$

La pente se prolonge par continuité par la formule $p(x, x) = f'(x)$: la dérivée est la pente instantanée (i.e. la vitesse). À l'inverse la pente est la moyenne de cette pente instantanée : c'est la formule de Taylor avec reste intégral (i.e. le théorème



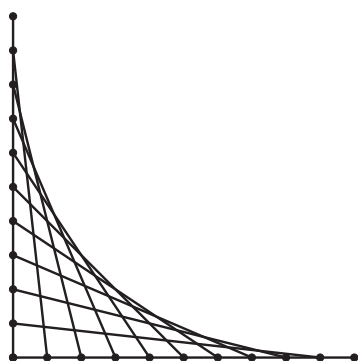
de Leibniz-Newton, dit théorème fondamental du calcul différentiel et intégral dans ce cas).

$$y = y_1 + (x - x_1) \int_0^1 f'(x_1 + t(x - x_1)) dt$$

$$\text{i.e. } p(x_1, x) = \int_0^1 f'(x_1 + t(x - x_1)) dt.$$

Noter au passage la normalisation du reste qui fait apparaître le facteur $(x - x_1)$.

Si f' est croissante, on a $y_1 + f'(x_1)(x - x_1) \leq y$ et ceci que x soit supérieur ou non à x_1 . En particulier si f' est croissante sur un intervalle réel I , on voit qu'on a $f(x) = \max_{x_1 \in I} (y_1 + f'(x_1)(x - x_1))$, i.e. le graphe de f est enveloppe supérieure de droites affines. Une fonction qui est enveloppe supérieure de fonctions affines est appelée convexe. Cela a une application très simple : les tableaux de fils. On peut suggérer des courbes en tirant des fils pour former des tangentes à une courbe. Attention ! de nombreuses réalisations artistiques passent à côté du phénomène et plantent des clous sur la courbe à envelopper, ce qui perd indéniablement du charme. Voici un exemple et un excellent moyen de découvrir la parabole :



Comme les fils sont des droites, on peut obtenir un rendu similaire par pliage. On peut ainsi découvrir la définition par foyer et directrice d'une parabole, et prolonger cette exploration avec la propriété de réflexion des paraboles : tout rayon parallèle à l'axe est réfléchi en un rayon passant par le foyer, et réciproquement.

Une fonction convexe est caractérisée par la croissance de la fonction pente⁶ ou par celle de sa dérivée. Autrement dit l'approximation par la fonction affine qui interpole f entre x_1 et x_2 fournit une majoration de f :

$$p(x_1, x) \leq p(x_1, x_2) \quad \text{si } x_1 < x < x_2.$$

En permutant les rôles de x et x_2 , on voit que l'extrapolation fournit, quant à elle, une minoration. Et en prenant une limite en x_1 , on a encore une minoration, i.e. les approximations par les fonctions affines tangentes fournissent des minoration, ce qui permet de coincer le graphe de f dans un triangle :

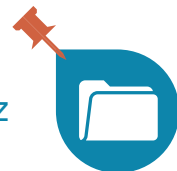
$$\max(y_1 + p_1(x - x_1), y_2 - p_2(x_2 - x)) \leq y$$

$$y \leq y_1 + p_{1,2}(x - x_1) = y_2 - p_{1,2}(x_2 - x).$$

En hommage à Gilbert Arsac décédé récemment, voici un problème ouvert [8, 9] en lien avec la convexité, à savoir celui du plus grand produit : étant donné A dans $\mathbb{R}_+^*$, trouver n et $x_1, \dots, x_n$ également dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 + \dots + x_n = A$ et $x_1 \dots x_n$ est maximal. La mise en scène proposée par Arsac impose à A et aux x_i d'être entiers strictement positifs. Commençons par raisonner par estimation. Si on fixe n , on sait qu'à somme égale le produit est maximal lorsque les nombres sont égaux : c'est l'inégalité arithmético-géométrique. Ainsi à n fixé, le produit maximal p_n vaut $\left(\frac{A}{n}\right)^n$ et il reste à étudier cette suite en fonction de n . Or on a $p_n \leq p_{n+1}$ si et seulement si $(n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq A$, i.e. approximativement $n \leq \frac{A}{e}$.

Plus rigoureusement on pourrait raisonner avec la fonction $x \mapsto \exp(x(\ln(A) - \ln(x)))$, qui admet un unique minimum en $x = \frac{A}{e}$. Le produit maximum est donc approximativement $e^{A/e}$, soit environ 9×10^{15} si $A = 100$. On en déduit aussi qu'avec des entiers, il faudra probablement utiliser des nombres proches de e , donc plutôt des 3,

6. Ce qui peut s'écrire $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_2 \\ y_1 & y & y_2 \end{vmatrix} \geq 0$ (pour $x_1 < x < x_2$). Ce même déterminant est nul quand la fonction est affine.



et sans doute quelques 2. On peut en effet démontrer cela : ainsi, si on a $A = 3q + 2r$ avec r avec $0 \leq r \leq 2$, alors le produit maximum est $2^r 3^q$. Par exemple pour $A = 100$ on écrit $100 = 3 \times 32 + 2 \times 2$ et on trouve 4×3^{32} , soit environ 7×10^{15} . Notre estimation, obtenue grâce à la convexité, n'est pas parfaite, puisqu'il y a un écart relatif de 22 %, mais elle donne le bon ordre de grandeur pour A grand. Elle fournit aussi l'idée que le produit maximum s'obtiendra avec principalement des nombres tous égaux à 3. Que demander de plus à une estimation ?!

Estimation géométrique

Il me paraît également intéressant de proposer des situations où l'on peut manipuler, *i.e.* des travaux pratiques. Par exemple comment créer un cube (ou une sphère, ou un crâne) de volume double d'un cube donné, *i.e.* on aimerait construire $\sqrt[3]{2}$ et comparer les estimations obtenues selon les méthodes [10]. Pour plonger dans l'histoire du problème, on sait par exemple que $\sqrt[3]{2}$ a été obtenu grâce à une méthode itérative par Pandrosion, une mathématicienne critiquée par Pappus et antérieure à Hypathie d'Alexandrie. La critique (sans doute un brin patriarcale) porte sur la nature de la construction, qui n'est pas exacte et sort du canon de la géométrie plane.

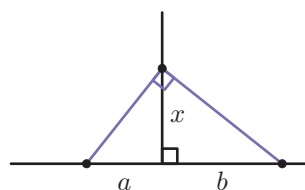
Pourtant il n'y a pas de meilleure définition de $\sqrt[3]{2}$ que le fait que c'est un nombre positif de cube 2. En d'autres termes, **un nombre est une idée**, pas une chose. Ceci n'empêche pas d'en avoir des représentations, plus ou moins fidèles, et plus ou moins manipulables. **Ces représentations sont des estimations !**

Voici trois méthodes reposant toutes sur le théorème de Thalès et fournissant des valeurs approchées, de natures différentes, de $\sqrt[3]{2}$. Il me paraît intéressant de les comparer (double décimètre en main !).

Rappelons que la moyenne géométrique est obtenue algébriquement par la formule $x = \sqrt{ab}$, mais

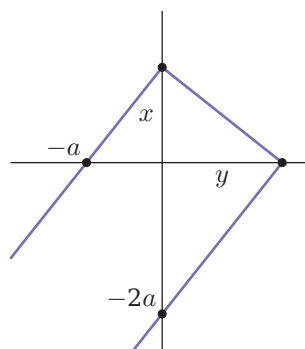
peut aussi s'écrire sous forme d'équation entre fractions : $\frac{b}{x} = \frac{x}{a}$.

On a vu qu'on peut l'obtenir avec la figure ci-contre en remarquant que le triangle rectangle de côtés a et x est semblable à celui de côtés x et b , et en égalisant grâce au théorème de Thalès les rapports entre les côtés correspondants.



On obtient donc $\sqrt{2}a$ en prenant la moyenne géométrique de a et $2a$, *i.e.* en posant $b = 2a$.

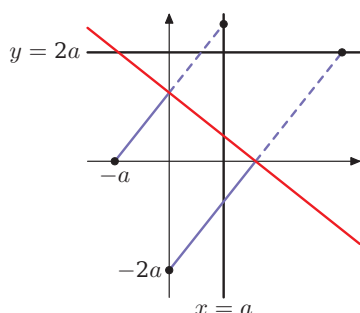
De même, pour obtenir $\sqrt[3]{2}a$, on cherche x et y tels que $\frac{2a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{a}$. Le produit des trois fractions donne 2 et, puisqu'elles sont toutes égales, chacune d'elles vaut $\sqrt[3]{2}$, de sorte qu'on a $x = \sqrt[3]{2}a$. On en déduit que la figure suivante, proposée par Platon, permet d'obtenir x et y puisqu'alors x est la moyenne géométrique de a et y , et y est celle de x et $2a$.



Il s'agit donc d'ajuster un pied à coulisse bleu, *i.e.* les deux droites parallèles et la droite qui leur est orthogonale, de façon à ce que les droites parallèles passent par les points à distance a et $2a$ de l'origine, et que les points d'intersection de ces droites soient sur les axes. En prolongeant



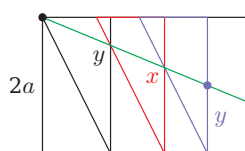
par symétrie cette figure, on obtient la construction par pliage proposée par la mathématicienne Margherita Beloch⁷.



Il s'agit d'amener simultanément les deux points à distances a et $2a$ de l'origine sur les deux droites horizontale et verticale également à distances a et $2a$ (mais de l'autre côté de l'origine).

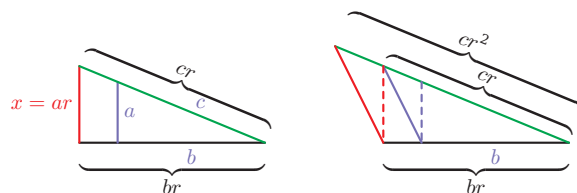
On obtient un pli le long de la droite en rouge et cette dernière coupe les axes en x et y . L'ajustement du pied à coulisse est complexe. Le pliage est beaucoup plus facile à réaliser ! Il est donc intéressant d'en comparer les mérites respectifs.

Enfin voici le mésolabe attribué à Ératosthène.

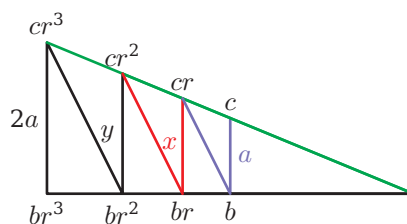


Il s'agit de déplacer les deux triangles (rouge et bleu) pour provoquer l'alignement (ligne verte). Les lignes horizontales sont fixes, espacées de $2a$, et le triangle noir est également fixe. Les deux triangles de couleur peuvent coulisser le long des lignes horizontales. Cette méthode repose encore sur le théorème de Thalès, qui explique comment multiplier des nombres (ou des vecteurs) comme on le voit sur la figure suivante. Sur cette figure on voit également comment construire une **suite géométrique**, c'est-à-dire une suite dont **chaque terme est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent**. On commence par prolonger la ligne verte jusqu'à l'axe des abscisses

et nommer abc le triangle formé par ces deux droites et la verticale bleue.



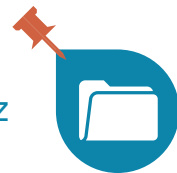
La figure de gauche montre que la verticale rouge permet d'agrandir le triangle abc d'un facteur r , égal à $\frac{x}{a}$. La figure de droite montre que les diagonales bleue et rouge permettent de construire la suite géométrique (c, cr, cr^2) .



En traçant la verticale noire, on obtient la suite d'abscisses (b, br, br^2) . La suite des hauteurs verticales bleue, rouge et noire sont donc également dans cette progression, i.e. $y = xr = ar^2$ ou encore $\frac{y}{x} = \frac{x}{a}$. En itérant ce raisonnement via les diagonales rouge et noire, on en déduit que $(a, x, y, 2a)$ forment une suite géométrique, ce qui est le résultat cherché.

On a donc deux méthodes nécessitant des ajustements, i.e. des méthodes itératives (le pied à coulisse et le mésolabe), qu'il est intéressant de formaliser mathématiquement, et une méthode exacte (celle par pliage). Cela dit comme les traits ont une épaisseur et le pli aussi, la précision ne sera pas parfaite non plus. Mais réciproquement, comment construire un cube (en papier, en bois ou en béton) de côté $\sqrt[3]{2}$ même si l'on sait qu'on a $\sqrt[3]{2} \approx 1,25992$?

7. Le symétrique du point appelé $-a$ par rapport à celui appelé x est un point sur la droite verticale située à même distance de l'origine que $-a$, donc d'abscisse a . De même le symétrique du point nommé $-2a$ par rapport à celui appelé y est sur une droite horizontale située à même distance de l'origine que $-2a$, donc d'ordonnée $2a$.



Estime

En résumé, pour construire une estimation, nous avons bâti des modèles, puis construit des intervalles et enfin pris des valeurs moyennes au sein de ces intervalles. J'ai le sentiment que la manipulation d'intervalles est une chose complexe. C'est pourquoi j'aimerais évoquer une idée propagée par Frigyes Riesz, celle de fonction d'intervalle, comme celle donnée par la fonction pente, ou l'intégrale, ou les variations d'une fonction, etc. Je ne peux que recommander la lecture du premier chapitre de ses leçons d'analyse fonctionnelle (publiées en français) [5]. On y trouve de nombreux résultats avec des démonstrations d'une élégance inimitable, comme le lemme du soleil levant ou le fait que toute fonction monotone est dérivable presque partout (théorème de Lebesgue). La fin du premier chapitre introduit la notion de fonction d'intervalle et met sous son chapeau de nombreuses théories de l'intégration et de la dérivation. La lecture de ces pages donne un aperçu des paysages rencontrés dans le supérieur, et donc des attendus de formation.

Une autre idée que j'aimerais souligner est l'importance de la manipulation, et de la fréquentation des nombres, des fonctions, des formes, que ce soit par le corps ou par les valeurs numériques. On ramène trop fréquemment le calcul à des valeurs exactes, sans trop savoir ce qu'exactly veut dire. Quelle est la réalité ou la valeur de vérité de nombres comme $\sqrt{2}$, i ou π ? Bien entendu les concepts auxquels ils sont attachés sont fondamentaux. Je ne dis pas non plus qu'il faut connaître les décimales de π . En revanche, manipuler la diagonale d'un carré, les triangles rectangles, les rotations d'un quart de tour, comparer les polygones inscrits dans un cercle au cercle lui-même etc. tout cela me paraît nécessaire dans la formation mathématique. À une époque où on insiste, avec raison, sur l'importance de raisonner de façon probabiliste, il n'est pas déraisonnable

de rappeler que ces raisonnements ont aussi un support géométrique, qu'on peut y rencontrer de l'algèbre de haute volée ou de l'analyse fine. Ces concepts, une fois dégagés, devront eux-aussi être manipulés, fréquentés, visités avec le corps ou par le dessin et le calcul, et permettre de dégager de nouveaux concepts et de nouvelles idées, conduisant parfois à redescendre, à revisiter ce que l'on croyait acquis. Ma conviction est qu'on peut redécouvrir les maths de la maternelle à l'université à tout moment : les allers-retours sont nécessaires et profitables, on ne peut se contenter d'empiler indéfiniment des concepts. Le Graal n'est pas de trouver la loi ultime des mathématiques qui contiendrait tout le reste. En tout cas, ce n'est pas ma vision des maths et je voudrais citer une fois encore Florence Nightingale :

*Newton's law is nothing but the statistics of gravitation, it has no power whatever. Let us get rid of the idea of power from law altogether. Call law tabulation of facts, expression of facts, or what you will ; anything rather than suppose that it either explains or compels*⁸.

Estimer, c'est construire des modèles, puis en débattre. Estimer c'est argumenter, et accepter les arguments d'autrui, accepter des arguments auxquels on n'a pas pensé, mais surtout des arguments de nature différente, car il n'y a pas qu'une façon de percevoir le monde, ni de le mathématiser, et encore moins de vérité unique qui devrait s'imposer à toutes et à tous.

Et puisque les mathématiques ne prennent pas une seule forme et peuvent se pratiquer de multiples façons, de même que de nombreux termes utilisés en mathématiques sont polysémiques, il me semble nécessaire, en particulier quant à l'estime de soi, de valoriser plus d'aspects dans l'évaluation tout comme dans les interactions : investissement personnel ou social, soin, compréhension, etc. On pourrait ainsi donner plusieurs notes lors d'une évaluation, ou lors

8. La loi de Newton n'est rien d'autre qu'une statistique de la gravitation, elle n'a aucun pouvoir d'aucune sorte. Il faut se débarrasser de l'idée de donner du pouvoir à une loi et l'appeler tabulation de faits, expression de faits, ou ce que vous voulez ; n'importe quoi plutôt que de supposer qu'elle explique ou contraint (traduction personnelle).



d'évaluations différentes, sans ressentir l'obligation de les additionner ou d'en prendre une moyenne arithmétique. Si on tient à, ou est en devoir de, donner une note unique, on peut choisir d'autres moyennes ! **Il est important, pour moi, que le discours associé à l'évaluation soit prépondérant et qu'il reflète la complexité des individus.** On peut simultanément détecter des difficultés techniques, conduisant à une méfiance vis-à-vis de la poursuite d'études académiques en mathématiques, et valoriser grandement le reste, voire attribuer une note supérieure à une note attribuée à des personnes excellentes techniquement. La note ne doit pas se présenter comme un seuil, car ce que l'on note n'est pas unilinéaire. D'ailleurs est-il seulement réifiable ?

Il me paraît important d'accorder plus de place au débat, ce qui ne veut pas dire à l'opinion, ni à la soi-disant liberté de dire n'importe quoi. Le fait même que des personnes ayant choisi les mathématiques, ou les sciences, comme activité professionnelle soient incapables de soutenir un débat et d'argumenter en dehors de leur discipline de prédilection (et même parfois au sein même de leur discipline) ne cesse de m'interroger. Le doute est une qualité essentielle dans l'activité scientifique (mais pas seulement). Mais peut-être me fourvoyé-je ?

Références

- [1] Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales. *Portail lexical*. Définitions de Estimer, Estimation, Estime . 2025.
- [2] Pierre Michaud Quantin. « Aestimare et Aestimation ». In : *Archivum Latinitatis Medii Aevi*. Tome 22 n°2 (1951). , p. 171-183.
- [3] Florence Nightingale. « May 17, 1857 ». In : *Collected Works of Florence Nightingale*. Volume 15 (2011). Lynn McDonald, p. 265.
- [4] Florence Nightingale. *Suggestions for thought. Selections and Commentaries*. Sous la dir. de Michael D. Calabria et Janet A. MacRae. Philadelphia : University of Pennsylvania Press, 1994, p. 41.
- [5] Frigyes Riesz et Béla Szökefalvi-Nagy. *Leçons d'analyse fonctionnelle*. 5^e édition. La 3^e édition (1955) a été rééditée chez Jacques Gabay, Paris en 1990. Paris : Gauthier-Villars, 1968.
- [6] Samuel Beckett. *En attendant Godot*. Paris : Les Éditions de Minuit, 1952.
- [7] Nicolas Bouleau. *Philosophies des mathématiques et de la modélisation*. Paris : L'Harmattan, 1999.
- [8] Gilbert Arsac, Gilles Germain et Michel Mante. *Problème ouvert et situation problème*. Épuisé. IREM de Lyon, 1988.
- [9] Gilbert Arsac et Michel Mante. *Les pratiques du problème ouvert*. Repères pour agir série Disciplines. Scéren-CRDP de l'académie de Lyon, 2007.
- [10] Wilbur Richard Knorr. « Pappus' Texts on Cube Duplication ». In : *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*. . Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1989, p. 63-76.
- [11] Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov. *Sur la notion de la moyenne*. 6^e édition. T. 12. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, 1930.
- [12] Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood et György Polya. *Inequalities*. Cambridge : Cambridge University Press, 1952.
- [13] Emil Artin. *The Γ function*. Trad. par Michael Butler. New York : Holt, Rinehart et Winston, 1964.



François Sauvageot est un acteur de science populaire. Il a co-fondé l'association *Résonance - Arts & Science*. Vous pouvez retrouver trace de celle-ci sur son site mathom.fr . Il enseigne à Vannes en CPGE MPI/MPI*.

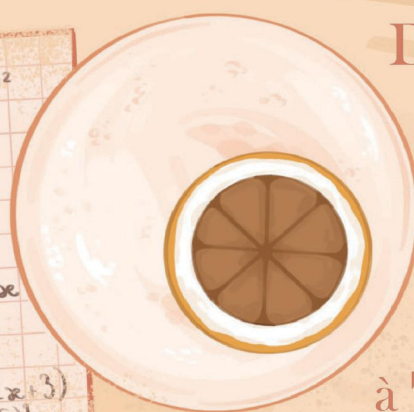
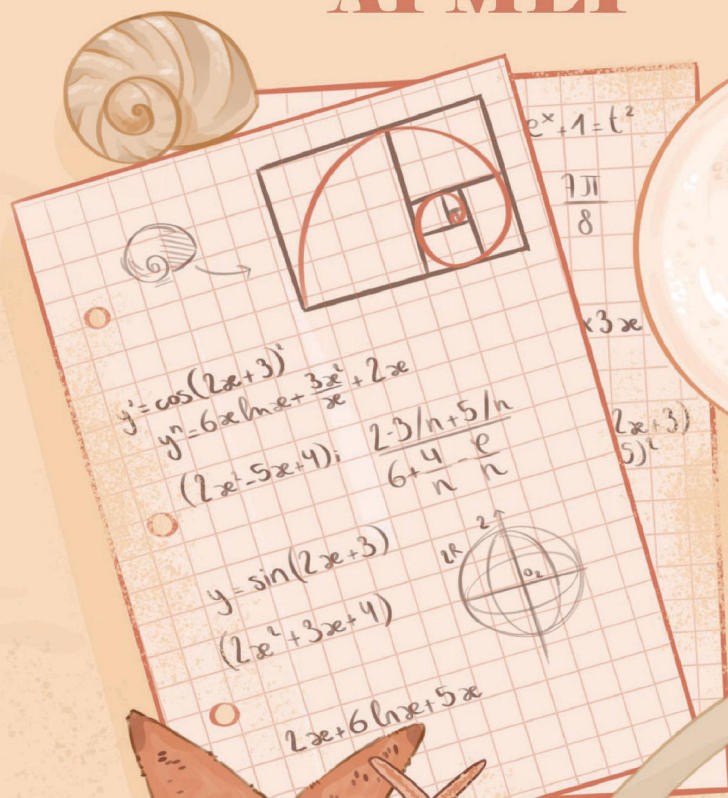
sauvageot@mathom.fr

© APMEP septembre 2025

Les *mathématiques* ont toujours
la *côte* !
Journées Nationales
APMEP

Du
18 au
21
Octobre 2025

à **Toulon**



« De la maternelle
à l'université »

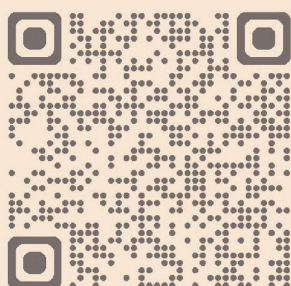


Illustration : Eva de Sa Lemos
Infographie : Charlie Lelièvre

Sommaire du n° 557



Estimation

Éditorial

Opinions

- ★ Plaidoyer pour les inégalités
Serge Petit..... 3

Avec les élèves

- Panglossya*
Maxime Cudel..... 11
- Unlock tes maths !*
Denis Guicheteau 20
- Quoi faire pour introduire l'algèbre ?
Sophie Bauerle..... 25
- ★ Des haricots à Python pour estimer en série STL
Valérie Larose..... 30
- ★ Modélisation et estimation du réel
Angelo Laplace..... 36
- ★ Estimation et grandeurs animales
Florence Soriano-Gafiuk..... 42

1 Ouvertures

- ★ Couper un gâteau entre $n + \{-1, 0, 1\}$ convives
Roger Mansuy 55
- ★ Mathématiques : usufruit et nue-propriété
Pierre Carriquiry..... 61
- ★ Nightingale & Riesz
François Sauvageot..... 65
- ★ Estimation par simulation aléatoire
Florent Malrieu..... 74

Récréations

- Au fil des problèmes
Frédéric de Ligt..... 81
- Des problèmes dans nos classes
Valérie Larose..... 84

Au fil du temps

- Découvrir Apprenti Géomètre mobile
M.-F. Guissard, V. Henry & P. Lambrecht..... 86
- Matériaux pour une documentation..... 91

Courrier des lecteurs

- Maud Sindeff*..... 95



CultureMATH

