

A stairway to Heaven

Errances et erreurs en mathématiques

Par *François Sauvageot*

Maître de conférences en
mathématiques à l'Université Paris 7

Promenade en quête du Mystère du Monde

Depuis Platon et jusqu'à la reconnaissance de l'existence du chaos, la quête de l'ordre et de la régularité dans l'univers a influencé de nombreuses théories physiques. L'explication de la distribution des distances planétaires est un bon exemple, c'est-à-dire l'explication de la relation entre le rang de la n -ième planète et sa distance d_n au centre du système.

Historique

- 50-120 : Plutarque puissances de 3 (Pythagore)
- 200 : Cassius Dio intervalles de musique.
- 230 : Hipolyte puissances alternées de 2 et de 3.
- 1595 : Johannes Kepler 5 solides platoniciens.
- 1756 : Johann Titius de Wittenberg $d_n = 0.4 + 0.3 \times 2^n$

- 1781 : Uranus en accord avec Titius
- 1801 : Cérès en accord avec Titius
- 1994 : Bérengère Dubrulle et François Graner expliquent Titius par invariance d'échelle et invariance par rotation.

Urbain Le Verrier

- Été 1845 : Urbain Le Verrier étudie les perturbations de la trajectoire d'Uranus
- 18/09/1846: il trouve une nouvelle planète par le calcul, en se basant sur la loi de Titius-Bode
- 23/09/1846 : Neptune est observée conformément aux calculs de Le Verrier
- Le Verrier essaye d'expliquer les perturbations de la trajectoire de Mercure à l'aide d'une nouvelle planète ... en vain !
- 1917 : Albert Einstein explique ces perturbations grâce à sa théorie de la Relativité Générale

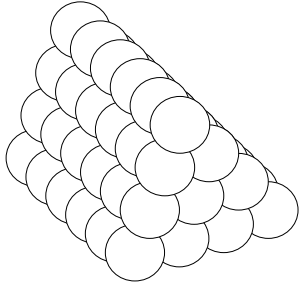
Problèmes soulevés par Kepler

- Etude des corps uniquement soumis à leur attraction gravitationnelle mutuelle
- Résolu par Kepler dans le cas de deux corps en 1609 (Astronomia Nova) et 1619 (Harmonices Mundi)
- 2003 : Progrès dans le cas général, sans pour autant le résoudre, par Alain Chenciner (mathématicien au Bureau des Longitudes et à Paris 7)

Problèmes soulevés par Kepler

- Forme des flocons de neige et pavage de l'espace le plus dense, ou « *la façon d'empiler les oranges le plus efficacement possible* ».
- Problème posé dans le *Songe lunaire*.
- Résolu par tous les marchands d'agrumes et toutes les abeilles du monde !
- Il y a 5 ans T. C. Hales, mathématicien américain, a donné une démonstration rigoureuse, assistée par ordinateur, utilisant les techniques de géométrie arithmétique et d'optimisation convexe. La densité optimale est de $\pi/\sqrt{18} \approx 0.74048$

L'empilement le plus dense



Johannes Kepler

- 1571 : Naissance à Weil der Stadt
- 1575 : en parlant à sa mère « *Tu savais que même quand il fait très chaud, en haut dans les airs, tout en haut, il fait très froid ! Les œufs de glace qui sont tombés ... ils étaient froids !* »
- 1589 : Université de théologie de Tübingen
- 1594 : Professeur de mathématiques à l'école protestante de Graz
- 1595 : il découvre le Mystère du Monde !
« *Je ne pourrai jamais décrire avec des mots le plaisir que j'ai eu en faisant cette découverte!* »

Kepler et Galilée

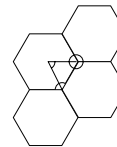
- Depuis 1591, Kepler est sans aucun doute le premier Copernicien, plus que Copernic lui-même !
- 1595 : Le *Mysterium Cosmographicum* est résolument Copernicien
- Galilée tait ses thèses coperniciennes et dialogue par anagrammes avec ses pairs, par peur de se faire voler des découvertes.
- 1616 : Galilée est mis en procès par l'inquisition. Il perd, mais sa peine est accomplie par sa fille.
- 1616-1617 : Kepler sauve sa mère du bûcher en la défendant lors d'un procès pour Sorcellerie.
- Kepler, comme plus tard Evariste Galois, s'oppose à ceux qui confondent science avec pouvoir ou secret !

Kepler, Einstein et la géométrie

- Kepler pense que la géométrie a existé avant la création du monde
- Einstein se pose également la question de savoir si l'espace préexiste aux choses. Il invente l'éther, comme support du monde.
- Encore maintenant les physiciens se posent la question de la nature du vide et de l'énergie qui lui est liée.

Pavages du plan

- Angle au centre $\omega=2\pi/n$
- Angle au sommet $\alpha=\pi-2\pi/n$
- $2\pi/\alpha=2+4/(n-2)$
- $n-2 \mid 4$
- $n-2 = 1, 2$ ou 4 .
- $n=3, 4$ ou 6 .



Le Mystère du monde

- « *J'attribue aux orbites eux-mêmes autant d'épaisseur que requièrent les mouvements d'approche et d'éloignement de la planète puisque le mouvement d'une planète n'est pas circulaire.* »
- *Si les figures sont intercalées comme je l'ai dit, il faut que la surface intérieure de l'orbite supérieure s'identifie avec l'orbite circonscrite à la figure, et la surface supérieure de l'orbite inférieure avec l'orbite inscrite dans la figure.*
- *Quant aux figures, elles doivent être disposées dans l'ordre suivant : le cube entre Saturne et Jupiter, le tétraèdre entre Jupiter et Mars, le dodécaèdre entre Mars et la Terre, l'icosaèdre entre la Terre et Vénus, l'octaèdre entre Vénus et Mercure. »*

Le génie de Kepler

- Selon Arthur Koestler *la mesure du génie de Kepler est l'intensité de ses contradictions et l'usage qu'il en fait !*
- Kepler est le père de
 1. L'utilisation des logarithmes
 2. L'optique géométrique « moderne »
 3. La cristallographie
- Il est le premier à traiter des données redondantes. On peut ainsi dire qu'il est également le père de l'analyse statistique des données !
- Kepler a refusé
 1. La non-adéquation de ses théories aux observations. C'est en refusant une erreur de 8" d'arc entre sa théorie et les observations de Mars (par le génial et mégalomane astronome Danois Tycho Brahé) qu'il trouve ses trois lois.
 2. Sa mauvaise vision et sa pauvreté. C'est parce qu'il ne voit que très mal et qu'il ne peut s'offrir un télescope de qualité (comme celui de Galilée par exemple) qu'il développe l'optique.

Le Tétraèdre



$$S=4 \quad A=6 \quad F=4$$

$$S-A+F=2$$

Le Cube



$$S=8 \quad A=12 \quad F=6$$

$$S-A+F=2$$

L'octaèdre



$$S=6 \quad A=12 \quad F=8$$

$$S-A+F=2$$

Le dodécaèdre



$$S=12 \quad A=30 \quad F=20$$

$$S-A+F=2$$

L'icosaèdre



$$S=20 \quad A=30 \quad F=12$$

$$S-A+F=2$$

Les 5 solides de Platon

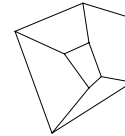
- On étudie les polyèdres réguliers ayant S sommets, A arêtes et F faces.
- Chaque face est un polygone régulier à n côtés.
- Chaque sommet appartient à m faces.
- En comptant le nombre de couples formés par une face et une arête lui appartenant, on obtient : $nF=2A$
- En comptant le nombre de couples formés par une face et un sommet lui appartenant, on obtient : $nF=mS$
- La relation $S+F=A+2$ donne $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} + \frac{1}{2}$
- On a donc $m=3$ ou $n=3$.
- Il vient $(m,n) = (3,3), (3,4), (4,3), (3,5)$ ou $(5,3)$.

La Formule d'Euler

Projection sur un plan du polyèdre



Figure obtenue



La Formule d'Euler

- Somme des angles, comptée à partir des sommets

$$2\pi(S - k) + (\pi - \frac{2\pi}{k})k = (2S - k - 2)\pi$$

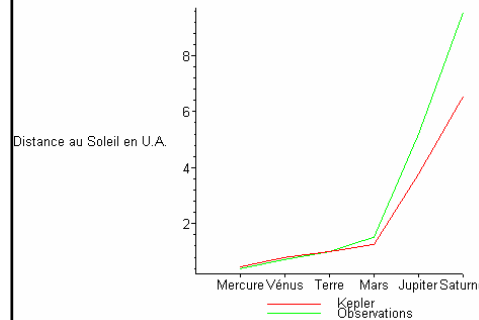
- Somme des angles, comptée à partir des polygones

$$\sum_i f_i(i-2)\pi - (k-2)\pi = (\sum_i if_i - 2\sum_i f_i - k + 2)\pi = (2A - 2F - k + 2)\pi$$

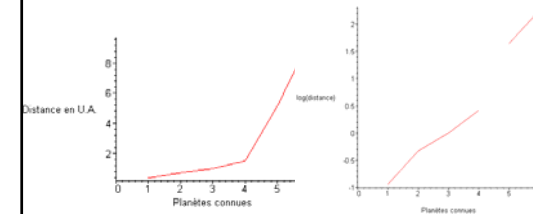
Les observations au temps de Kepler et de Titius

n	Planète	d_n	Selon le mystère du monde
1	Mercure	0.39	0.46
2	Vénus	0.72	0.79
3	Terre	1	1
4	Mars	1.52	1.26
5	Jupiter	5.2	3.78
6	Saturne	9.54	6.54

Mystère et réalité



Les observations de Titius



Et si ?

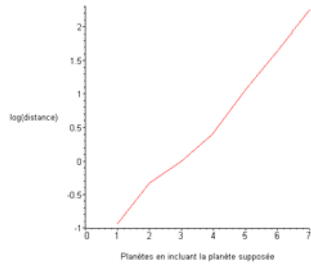


Tableau comparatif

n	Planète	d_n	Kepler	Titius	Graner
1	Mercure	0.39	0.46	0.4	0.36
2	Vénus	0.72	0.79	0.7	0.63
3	Terre	1	1	1	1.09
4	Mars	1.52	1.26	1.6	1.88
5	Cérès	2.90		2.8	3.25
6	Jupiter	5.20	3.78	5.2	5.63
7	Saturne	9.54	6.54	10	9.73
8	Uranus	19.18		19.6	16.85
9	Neptune	30.10		38.8	27.65
10	Pluton	39.50		77.2	50.43

Loi de Titius-Bode et Réalité

