A stairway to heaven

François Sauvageot

24 mars 2009

1 Préambule

Cette année 2009 a été déclarée par l'UNESCO année mondiale de l'astronomie, en hommage à la première fois où un téléscope a été tourné vers le ciel, par Galileo Galilei, en 1609. Mais c'est aussi le 400$^{\text{e}}$ anniversaire d'un ouvrage majeur pour l'astronomie, sans doute le premier ouvrage d'astrophysique : l'Astronomia Nova de Johannes Kepler. Je n'oublie pas que c'est aussi le 200$^{\text{e}}$ anniversaire de la naissance de Charles Darwin et le 150$^{\text{e}}$ de la publication de l'Origine des espèces, mais pour rester dans les sphères d'intérêt de Kepler, j'évoquerai aussi Ludwig Schläfli, mort un 20 mars, il y a 114 ans.

2 Introduction

Les mathématiques sont souvent présentées comme un produit fini, aux enchaînements logiquement clairs. Pourtant le formalisme et les démonstrations ne sont que l'ultime étape de la recherche : ils constituent l'habillage du savoir. Les chercheurs passent, de leur côté, par nombre d'errances plus ou moins fertiles. Même si l'aboutissement, la découverte d'une vérité, est très souvent une délivrance et un grand moment de satisfaction, les chemins empruntés pour y arriver restent gravés dans la mémoire. Ils peuvent être eux aussi sources de plaisir et, parfois, de nouvelles théories.

Depuis Platon et jusqu'à la reconnaissance de l'existence du chaos, la quête de l'ordre et de la régularité dans l'univers a influencé de nombreuses théories physiques. L'explication de la distribution des distances planétaires est un bon exemple, c'est-à-dire l'explication de la relation entre le rang de la n^{e} planète et sa distance d_n au centre du système.

1. Dans l'antiquité grecque, c'est Plutarque (50-120) qui propose le premier une relation, selon une suite liée aux puissances de 3, en accord avec la vision pythagoricienne du monde.
2. Vers 200, Cassius Dio interprète les données obtenues par Ptolémée, dans son système géocentrique, grâce à des intervalles de musique. Ce n'est bien entendu pas très différent puisque c'est l'école pythagoricienne qui a influencé la définition de nos gammes de musique en mettant en jeu puissances de 2 et puissances de 3.
3. Vers 230 Hipolyte affirme que c'est une hérésie de penser qu'il n'y a pas d'ordre dans la distribution des planètes et met en jeu des puissances alternées de 2 et de 3.
4. Plus proche de nous, c'est Johannes Kepler qui s'y intéresse pour la première fois dans un système héliocentrique. En 1596 il propose un agencement lié aux 5 solides platoniciens.

5. En 1766 Johann Titius de Wittenberg propose une loi géométrique, reformulée par Johann Bode, sous la forme $d_n = 0.4{+}0.3.2^{n-2}$ où la distance est donnée en unités astronomiques[1]. C'est cette loi qui a conduit les astrophysiciens à chercher de nouvelles planètes, quête qui connut un succès avec la découverte d'Uranus en 1781 et de Cérès (le plus gros astéroïde de la ceinture d'astéroïdes) en 1801.
6. En 1994, deux astrophysiciens français, Bérengère Dubrulle et François Graner, montrent qu'en fait une loi comme la loi de Titius-Bode résulte de deux symétries importantes : l'invariance d'échelle et l'invariance par rotation.

Uranus est donc la première planète à avoir été prédite. Mais ce n'est que la première. En effet Urbain Le Verrier, durant l'été 1845, cherche l'origine des perturbations observées pour la trajectoire d'Uranus. Il part de la loi de Titius-Bode pour deviner, par le calcul, une nouvelle planète. Le 18 septembre 1846, il écrit à l'astronome Gottfried Galle à Berlin. Ce dernier reçoit la lettre le 23 septembre et il pointe le soir même sa lunette à l'endroit indiqué par Le Verrier et y voit Neptune ! Il répond à Le Verrier : « Monsieur, la planète dont vous nous avez signalé la position existe réellement ».

Il est à noter que les calculs de Le Verrier donnant les positions des planètes du système solaire ont été utilisés jusqu'en 1984 par les éphémérides officiels français.

Le Verrier espéra reproduire son exploit en étudiant le mouvement du périhélie de Mercure qui restait inexpliqué. Il introduisit une nouvelle planète, cette fois-ci entre Mercure et le Soleil, mais il n'arriva à aucune solution satisfaisante. C'est Albert Einstein qui donna la clef, par sa théorie de la relativité générale, en 1917.

À la fin du XX^{e} siècle, on a découvert un autre corps céleste entre Saturne et Uranus, grâce à la puissance des téléscopes modernes. Appelé Chiron, comme le Centaure de la mythologie grecque, il possède lui aussi une dualité qui fait qu'il est classé à la fois comme astéroïde et comme comète.

3 Johannes Kepler (1571–1630)

Pour commencer, je vais vous parler de l'astronome et mathématicien du début du XVII^{e} siècle, Johannes Kepler. C'est lui qui le premier a énoncé les lois qui régissent le mouvement des astres. En fait le mouvement de deux corps soumis uniquement à leurs attractions gravitationnelles est donné par les lois de Kepler. On parle souvent de mouvement Képlérien. Par contre on ne connaît pas les lois qui régissent plus de 2 corps (3, 4, ...) uniquement soumis à leurs attractions gravitationnelles respectives. Un progrès a néanmoins été accompli récemment, en 2003. Comme quoi ces problèmes difficiles sont toujours d'actualité.

Mais vous avez peut-être entendu parler récemment de Kepler puisqu'une fameuse conjecture (mathématique) portant son nom vient d'être démontrée en utilisant des moyens informatiques. Kepler était un homme de questionnement et il a laissé beaucoup de témoignages de ses investigations dans ses livres, notamment le « Songe » qui parle d'un voyage imaginaire sur la Lune ou encore l'« Étrenne » qui évoque la forme des flocons de neige et où il énonce ce qu'on a appelé par la suite la conjecture de Kepler : la façon d'empiler des sphères (ou des oranges) qui

[1] c'est-à-dire la distance de la Terre au Soleil. Comme cette distance n'est pas constante, il faut en fait être plus précis dans la définition. On retiendra que cette distance est environ 150 millions de kilomètres.

prend le moins de place est celle qu'utilisent les abeilles pour leurs ruches et tous les marchands d'agrumes : en quinconce.

Cette conjecture, maintenant résolue, a des liens avec d'autres questions. Les empilements de sphères ont un sens dans le monde habituel, tri-dimensionnel, mais aussi dans d'autres contextes. Ainsi dans les télécommunications, on ne transmet pas le son directement, on le code avec des nombres (des suites de 0 et de 1). Transmettre de telles suites de nombres de telle façon que s'il y a des erreurs de transmission, mais pas trop, on puisse reconstituer le message est un problème d'empilement de sphères : les messages sont les centres des sphères et la sphère est l'ensemble des messages obtenus en bruitant les transmissions. Il est aussi remarquable de noter que la technique de résolution de la conjecture de Kepler passe par des études de diagrammes qui permettent aussi d'étudier la meilleure façon d'implanter des antennes de télécommunication, par exemple.

Une fois encore on voit quel est l'objet des mathématiques. Un-e rêveur-se regarde le monde et se pose une question. Évidemment la résolution de cette question l'éloigne infiniment d'elle, mais c'est là l'abstraction. Cette abstraction qui peut sembler si futile (comme un dessin d'enfant, un poème ou un rayon de soleil) mais qui est le terreau de la création. Laurent Schwartz disait « Je cherche en zigzags et j'arrive finalement plus près du point de départ que je n'avais pensé. Alors j'éprouve le besoin de trouver le plus court chemin conduisant à ce résultat et d'oublier les étapes par lesquelles je suis passé. Néanmoins le plus court chemin est très déductif. J'essaye aussi de trouver le plus court chemin intuitif, mais c'est tout un travail. »

Bien entendu il faut aussi dire que les rêves de chacun prennent des formes différentes et que les mathématiques n'en sont qu'une parmi tant d'autres. Derrière le besoin qu'ont certain-e-s mathématicien-ne-s de créer on trouve une soif insatiable, une quête éternelle.

Kepler est né myope et avec une polyopie monoculaire (il voyait plusieurs images à la fois). C'est peut-être pour cette raison qu'il imagine le monde. À quatre ans, il dit à sa mère Katherina « Tu savais que même quand il fait très chaud en haut dans les airs, tout en haut il fait froid ! ». Sa mère le toise mais il se défend « Les oeufs de glace qui sont tombés... ils étaient froids. »

En fait Kepler est avant tout un mystique. Il entre en 1589 à l'Université de Tübingen alors que Galilée obtient la chaire de mathématiques de Pise. Son désir premier est de devenir prêtre car Tübingen est un des séminaires les plus importants de son temps, dirigé par des prêtres ayant connu personnellement Luther.

Son esprit ne parvient pourtant à se résoudre à croire au déterminisme (doctrine enseignée par Luther niant l'existence du libre-arbitre et soumettant tous les hommes à la volonté de Dieu) et ses dissertations ainsi que ses discussions avec ses professeurs trahissent ses incertitudes. Pour cette raison, en 1594, il est envoyé à Graz comme professeur de mathématiques de l'école protestante de la ville et mathématicien des états de Styrie.

Toute sa vie il cherche à approcher Dieu et sa création. C'est pourquoi il est fasciné par les astres mais aussi prompt à la mystique. Ainsi sa conclusion du Mysterium Cosmographicum est un hymne à l'Architecte de la plus parfaite œuvre : *Créateur du monde [...] pour reconnaître ta divinité dans ce vaste monde, étonné, je tournerai mon regard vers ta grande œuvre du vaste ciel, vers l'œuvre du grand artisan, vers le miracle de sa droite infaillible [...].*

Kepler n'est pas seulement mystique, il est docteur en théologie. Ainsi à l'heure où Galilée est mis en procès (1616), Kepler part défendre sa mère Katherina qui est accusée de Sorcellerie. En 1617 il deviendra son avocat et la sauve du bûcher. On ne peut pas en dire autant de Galilée qui perdit son procès (même si la peine fut très légère et accomplie par sa fille ...).

Arrêtons-nous quelques instants sur la comparaison entre ces deux hommes. Si Galilée est monté aux nues par la science moderne, comme précurseur de la dynamique et du mode de pensée scientifique, Kepler est oublié d'eux. Or Galilée était avant tout un homme de pouvoir, un politique. Malgré (et peut-être en raison de) son génie, il fut haï de ses pairs. Galilée fut arrogant, un homme de cour, refusant de partager ses connaissances mais les clamant haut et fort. Ainsi il écrit à Kepler par anagramme. En voici un exemple : SMAISMRMILMEPOETA-LEUMIBUNENUGTTAURIAS, ce qui signifie *Altissimum planetam tergeminum observavi* ou encore *J'ai observé deux bosses sur Saturne.* Alors que Kepler a toujours cherché à partager ses découvertes, expliquant jusqu'au chemin qu'il a suivi, Galilée louvoie et se protège. Et pourtant Kepler, malgré les vexations infligées par Galilée, n'a cessé de défendre les thèses du messager céleste et de les discuter.

Toujours est-il que le 9 juillet 1595, alors qu'il est en train de faire un cours à ses élèves, Kepler regarde son propre dessin au tableau, représentant un triangle équilatéral, son cercle inscrit et son cercle exinscrit. Il est soudainement frappé par une illumination et croit tenir entre ses mains le secret de la création de l'univers. Il écrit à ce propos : *Je ne pourrai jamais décrire avec des mots le plaisir que j'ai eu en faisant cette découverte.*

Depuis qu'il était étudiant, il avait toujours cherché la raison cachée derrière le nombre des planètes (six seulement était connues à l'époque : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne), leurs distances au soleil (il fut toujours un copernicien convaincu) et leurs vitesses. Comme le fera Titius quelques années plus tard il va même jusqu'à insérer des planètes « invisibles » pour rendre les proportions agréables, mais rien n'y fait.

4 Pavages du plan par des polygones réguliers

Que pouvait bien dire Kepler à ses étudiants pour songer tout à coup que les planètes et leurs positions sont liées aux cinq polyèdres de Platon ? Kepler était un géomètre, il pensait d'ailleurs que la géométrie a existé avant la création. Il qualifie d'archétypales ces images primordiales que l'âme pourrait percevoir grâce à son instinct inné, proches parentes des idées originelles de Platon ou des archétypes fonctionnant comme des instincts de représentation, comme Jung les a introduits en psychologie moderne.

Cette question, avec ou sans la mystique qui l'accompagne, est toujours d'actualité. Ainsi Einstein avait eu besoin d'imaginer un éther comme support du monde. La question qui se pose est la suivante : l'espace préexiste-t-il aux choses ? Peut-on voir l'espace comme un contenant et les choses comme un contenu ? Bref, est-il possible d'imaginer le vide ? C'est loin d'être une boutade puisqu'un colloque a eu lieu récemment où les physiciens se sont posé cette question. Si le vide est la superposition de la matière et de l'anti-matière (ce qui, mathématiquement, est une banalité) et si on peut séparer ces deux choses, alors on peut créer à partir du vide. Il y a donc une énergie dans le vide. En dehors de l'aspect science-fiction, présent par exemple dans un roman comme Hypérion de Dan Simmons, c'est là une question fondamentale qui est liée, entre autres, à la question de savoir si l'univers est en continuelle expansion ou s'il va un jour se rétracter sur lui-même et de nouveau donner lieu à un big bang.

Mais revenons à Kepler. Comme il prenait de nombreuses notes, on sait, grâce aux cahiers qui ont été préservés, notamment par Catherine de Russie, qu'il faisait des calculs sur les polygones réguliers. Or, même s'il existe des polygones réguliers ayant un nombre arbitraire de côtés, il n'en va pas de même si on espère pouvoir paver le plan avec. Ainsi tout carreleur sait que les mosaïques régulières sont formées de triangles, de carrés ou d'hexagones. Il n'y a pas d'autres possibilités. En effet soit P un polygône régulier à n côtés. Si T est un triangle élémentaire formé avec le centre O de P et deux de ses sommets consécutifs, l'angle en O vaut $2\pi/n$. Par conséquent l'angle en les autres sommets de T vaut $\pi(1-2/n)/2$ et donc l'angle en un sommet de P vaut $\pi(1-2/n)$. Pour que l'on puisse paver le plan il faut au minimum qu'un multiple entier de cet angle vaille 2π. Cela revient à exiger que

$$\frac{2}{1-\frac{2}{n}} = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

soit entier et donc que $n-2$ divise 4. Ainsi $n-2$ doit être choisi parmi 1, 2 et 4, i.e. n vaut 3, 4 ou 6.

5 Le mystère du monde

Or donc voici à quoi Kepler se met à rêver. À cette époque on pensait que les corps célestes se déplaçaient sur des sphères, nommées orbes. Il écrit dans le Mystère du monde : *« J'attribue aux orbes eux-mêmes autant d'épaisseur que requièrent les mouvements d'approche et d'éloignement de la planète [puisque le mouvement d'une planète n'est pas circulaire]. Si les figures sont intercalées comme je l'ai dit, il faut que la surface intérieure de l'orbe supérieur s'identifie avec l'orbe circonscrit à la figure, et la surface supérieure de l'orbe inférieur avec l'orbe inscrit dans la figure ; quant aux figures, elles doivent être disposées dans l'ordre suivant : le cube entre Saturne et Jupiter, le tétraèdre entre Jupiter et Mars, le dodécaèdre entre Mars et la Terre, l'icosaèdre entre la Terre et Vénus, l'octaèdre entre Vénus et Mercure. »*

Kepler sait en effet que seuls existent cinq polyèdres réguliers convexes (même si ce résultat n'a été démontré qu'en 1850 par Schläfli), les cinq solides de Platon.

Rappelons comment les construire :

Le cube On prend simplement l'ensemble des points de l'espace dont toutes les coordonnées sont de valeur absolue 1.

L'octaèdre On prend les centres des faces d'un cube.

Le tétraèdre – ou pyramide On prend un sommet sur deux dans le cube. Autrement dit on prend un sommet, on retire ses proches voisins et le sommet opposé, et on garde ses trois « voisins suivants ».

L'icosaèdre On part d'un pentagone régulier P situé dans un plan Π. Soit D l'axe perpendiculaire à Π passant par le centre O de P et P' l'image de P par un vissage d'axe D et d'angle $\pi/5$ (de sorte que les deux pentagones P et P' se retrouvent en quinconce) de telle sorte que la distance d'un sommet de P à son image soit justement la longueur du côté de P. Les sommets de P et P' sont alors sur une même sphère (de centre le point de D milieu de O et de son image). Cette sphère recoupe D en deux points qui, avec les dix sommets des deux polygones, forment un icosaèdre.

Le dodécaèdre On prend les centres des faces d'un icosaèdre.

Au vu de cette construction on voit le lien qu'il existe entre cube et octaèdre, ainsi qu'entre dodécaèdre et icosaèdre. On dit que ces polyèdres sont duaux. Il est à noter également qu'en prenant les centres des faces d'un tétraèdre, d'un octaèdre ou d'un dodécaèdre on obtient respectivement un tétraèdre, un cube et un icosaèdre. En particulier on voit que le tétraèdre est son propre dual.

Kepler a également découvert deux autres polyèdres réguliers, des polyèdres étoilés. Le petit dodécaèdre étoilé, obtenu en prolongeant les pentagones d'un dodécaèdre en pentagrammes, et le grand dodécaèdre étoilé, obtenu en faisant la même chose mais au sein d'un icosaèdre sur les pentagones formés par les plus proches voisins de chaque sommet.

Il existe encore deux autres tels polyèdres, découverts par Poinsot au XIX^{e} siècle : le grand dodécaèdre, obtenu comme son cousin étoilé mais en solidifiant les pentagones plutôt qu'en les prolongeant en pentagrammes, et le grand icosaédre, obtenu à partir d'un icosaèdre en formant des triangles équilatéraux à partir d'un sommet et de deux de ses cinq « voisins suivants ». Le fait que la liste est complète a été démontré par Cauchy.

Toujours est-il que Kepler a calculé le rapport entre les rayons de la sphère circonscrite et de la sphère inscrite pour chacun de ces solides. Les calculs sont assez élémentaires pour le tétraèdre (on trouve 3) et pour le cube ou l'octaèdre (on trouve $\sqrt{3}$). Pour le dodécaèdre et l'icosaédre, c'est plus compliqué. On trouve $\sqrt{15-6\sqrt{5}}$.

Notons que c'est bien ce que trouve Kepler à ceci près qu'il donne les résultats calculés au millième (comme le voulait l'époque) et non en notation algébrique. Les rapports sont donc : 3, $1,732$ et $1,258$.

Évidemment on connaît la suite de l'histoire ! Kepler a découvert les trois lois qui font sa renommée et ont balayé son rêve de jeunesse. Néanmoins, même après avoir publié son *Astronomie Nouvelle* en 1609 (un an avant le *Messager céleste* de Galilée) et son *Harmonie du monde* en 1619, c'est-à-dire même après avoir publié ses trois lois, Kepler réédite le Mystère du Monde tel quel. Bien sûr des notes apportent des commentaires et dénoncent ce qu'il sait être faux, mais cela montre à quel point ce rêve lui était cher et même, sûrement, qu'il n'aurait jamais découvert la loi des ellipses sans lui. Ainsi que l'écrit Arthur Koestler, *la mesure du génie de Kepler est l'intensité de ses contradictions, et l'usage qu'il en fait.*

Une autre façon de dire les choses à propos de Kepler est qu'il n'a pu donner la mesure de son génie qu'à travers sa ténacité à conduire des calculs, une ténacité due au fait qu'il est guidé et même poussé par ses rêves. Comme l'écrit Wolfgang Pauli, l'orientation du regard et l'intuition jouent un rôle dans l'institution des concepts et des idées qui sont nécessaires à l'élaboration d'un système de lois naturelles (c'est-à-dire d'une théorie scientifique), alors même que ces concepts et ces idées dépassent généralement de beaucoup la simple expérience.

Signalons par exemple que Kepler est le précurseur de l'utilisation des logarithmes, de l'optique, de la cristallographie, du traitement des données redondantes et l'auteur du premier test de rejet statistique. Et, même s'il a « aimé » ses erreurs, il a toujours été en quête de vérité. C'est en refusant des erreurs de 8" d'arc entre sa théorie et les observations de Tycho Brahe qu'il comprend enfin Mars et qu'il entre dans l'histoire avec ses deux premières lois. C'est parce qu'il ne voit que très mal et qu'il ne peut s'offrir de télescope de qualité (comme celui de Galilée par exemple !) qu'il développe sa théorie de l'optique géométrique et des télescopes képlériens (construits après sa mort).

On a longtemps cru que Kepler était un mauvais calculateur (et c'est vrai qu'il fait deux erreurs de calcul dans ses calculs sur les orbites elliptiques, calculs qui, parce qu'ils sont menés en un sommet de l'ellipse, se compensent !). Mais c'est en fait erroaé. Et, en cherchant à comprendre pourquoi on a eu cette impression, les historiens ont pu percevoir la réalité des calculs menés par Kepler et, à travers eux, ils ont pu percevoir son génie pur et simple.

6 Les cinq solides platoniciens

On peut se demander, à la suite de ces considérations, pourquoi il n'y a que cinq polyèdres réguliers. Soit donc P un tel polyèdre. Notons S son nombre de sommets, A son nombre d'arêtes et F son nombre de faces. Puisque le polyèdre est régulier c'est que chacune de ses faces est un polygone régulier, disons à n côtés, et que chaque sommet appartient à un nombre constant de faces, disons m. Remarquons aussi que les trois nombres S, A et F vérifient toujours (il suffit même que le polyèdre soit convexe) la relation (dite formule d'Euler)

$$\mathrm{S} - \mathrm{A} + \mathrm{F} = 2 .$$

Nous y reviendrons, mais montrons comment s'en servir. Si on place des triangles en un sommet, on ne peut en mettre qu'entre trois et cinq. Avec moins, on ne forme pas un solide. Avec plus, le solide est plat. Si on place des cubes ou des pentagones, on ne peut en mettre que trois. Enfin avec des polygones ayant plus de côtés, on ne peut rien faire : avec trois hexagones, on a un solide plat, et trois polygones plus grands se recouvrent nécessairement.

Avec des triangles, on a donc $A = 3F/2$ car une arête appartient à deux faces, et $S = 3F/3$, $3F/4$ ou $3F/5$ car un sommet appartient à 3, 4 ou 5 triangles. Il vient $2 = F - 3F/2 + F = F/2$, $2 = 3F/4 - 3F/2 + F = F/4$ ou $2 = 3F/5 - 3F/2 + F = F/10$, soit $F = 4$, 8 ou 20 : un tétraèdre, un octaèdre ou un icosaèdre.

Avec des carrés, on a $A = 4F/2 = 2F$ et $S = 4F/3$, d'où $F = 6$, et c'est un cube. Avec des pentagones, $A = 5F/2$ et $S = 5F/3$, d'où $F = 12$, et c'est un dodécaèdre.

Si on veut le faire plus formellement, on peut compter le nombre de couples (a, f) formés d'une face f et d'une arête a lui appartenant, et obtenir

$$2\mathrm{A} = n\mathrm{F}$$

puisque chaque arête appartient à deux faces et que chaque face contient n arêtes. Si on s'intéresse aux couples (s, f) formés d'une face f et d'un sommet s lui appartenant, on trouve

$$n\mathrm{F} = m\mathrm{S}$$

puisque chaque sommet appartient à m faces et que chaque face contient n sommets.

En divisant par 2A la relation S+F=2+A, on trouve, pour un polyèdre régulier

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} + \frac{1}{2} .$$

Par définition de m et n, chacune de ces quantités est supérieure à 3 et, puisque A est strictement positif, m et n ne peuvent être chacun supérieur à 4. Par conséquent l'un d'eux vaut 3 et on se retrouve avec l'équation

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{6} + \frac{1}{A}$$

où k est soit m, soit n. Donc k est inférieur strictement à 6. On trouve donc cinq possibilités pour les couples (m, n) à savoir $(3, 3)$ (le tétraèdre), $(3, 4)$ (le cube), $(4, 3)$ (l'octaèdre), $(3, 5)$ (le dodécaèdre) et $(5, 3)$ (l'icosaèdre).

Revenons à la démonstration de la formule d'Euler. Pour cela projetons le polyèdre à partir d'un point s extérieur au polyèdre, proche d'une face f, sur un plan parallèle à cette face (mais situé de l'autre côté de la face par rapport à lui). Par convexité du polyèdre régulier, tout segment joignant s à un point du polyèdre coupe la face f et, toujours par convexité, ceci montre que l'image du polyèdre par la projection stéréographique précédente est un polygone (l'image de f) découpé par d'autres polygones (les images des autres faces). On obtient en fait F-1 petits polygones, comportant en tout A arêtes et S sommets.

Notons k le nombre de sommets de la face f, i.e. du grand polygone extérieur. La somme de tous les angles de tous les polygones est égale à

$$(\mathrm{S}-k)2\pi + k\pi\left(1-\frac{2}{k}\right) = \pi(2\mathrm{S}-k-2)\ .$$

De plus si on note f_i le nombre de faces formées de polygones à i côtés, la somme précédente peut se calculer à partir de chacun des petits polygones et on trouve

$$\sum_i (f_i-\delta_{i,k})i\pi\left(1-\frac{2}{i}\right) = \pi(2\mathrm{A}-k-2\mathrm{F}+2)$$

et la formule d'Euler en résulte par comparaison.

En voici une démonstration plus simple, mais qui triche un peu. Gonflons le polyèdre comme un ballon de baudruche. Ceci revient à le dessiner, un peu déformé, sur une sphère. Puis effaçons un arête. En faisant cela nous faisons disparaître une arête (A chute donc de 1) et fusionner deux faces (F chute donc aussi de 1). Si des sommets se retrouvent avec juste deux arêtes, effaçons-les. Pour chaque sommet effacé, on enlève ce sommet (S chute donc de 1) et deux arêtes fusionnent (A chute donc aussi de 1). Au final, dans tous les cas, $S-A+F$ est constant.

Réitérons le procédé jusqu'à ce qu'il ne reste que deux faces. Dans ce cas on a juste dessiné un polygone sur le ballon. On a $F=2$ et $S=A$ et donc $S-A+F=2$. Comme cette quantité n'a pas varié durant la procédure, c'est qu'elle valait déjà 2 dès le départ !

7 La loi de Titius-Bode (1772 et 1778)

Dans un ordre d'idées totalement différent, Johann Titius de Wittenberg crut lui aussi trouver une loi régissant l'agencement des planètes dans l'espace. Elle fut publiée six ans plus tard par Johann Bode et prétend que la n^{e} planète se situe à la distance $d_n = 0.4 + 0.3 \times 2^{n-2}$ unités astronomiques du soleil (avec $n=-\infty$ pour Mercure).

Voici un tableau donnant les valeurs observées et celles prédites par Titius et Kepler. L'unité est l'U.A. i.e. la distance moyenne de la Terre au Soleil. On a également indiqué la meilleure approximation « moderne », à savoir 0.21×1.7^n.

Planète	d_n	n	Kepler	n	Titius	n	Moderne
Mercure	0.39	1	0.459	$-\infty$	0.4	1	0.36
Vénus	0.72	2	0.794	2	0.7	2	0.63
Terre	1.00	3	1	3	1	3	1.09
Mars	1.52	4	1.258	4	1.6	4	1.88
Cérès	2.77			5	2.8	5	3.25
Jupiter	5.20	5	3.775	6	5.2	7	5.63
Saturne	9.54	6	6.538	7	10	8	9.73
Uranus	19.2			8	19.6	10	16.85
Neptune	30.1			9	38.8	11	27.65
Pluton	39.4			10	77.2	12	50.43

Il faudrait y rajouter Chiron et la seconde ceinture d'astéroïdes ...ou au contraire enlever Cérès et Pluton qui ne sont plus acceptées comme planètes (on dit planètes naines).

Titius, tout comme Kepler, ne connaissait que six planètes. Et, grâce à Neper mais aussi surtout à Kepler, il savait utiliser les logarithmes. Aussi, constatant que la distance d_n croît rapidement en fonction de n, il a l'idée de chercher une relation linéaire entre, non pas n et d_n, mais entre n et $\log(d_n)$. En traçant le nuage de points correspondant il trouve que les points représentant les quatre premières planètes sont situés sur une même droite tandis que les deux suivants sont sur une droite parallèle ! Il a ainsi l'idée d'insérer, tout comme l'avait fait Kepler avant lui, une planète pour satisfaire une véritable relation linéaire. Et de fait, en supposant que Jupiter est la sixième planète (et Saturne la septième), tous les points du nuage sont alignés.

C'est ainsi que Titius et Bode prédirent l'existence d'une planète entre Mars et Jupiter. En 1801 on crut voir dans le ciel un astre inconnu mais on n'eut pas le temps de l'observer plus avant. Grâce à de savants calculs menés par Gauß, on arriva à prédire où il devait apparaître en la fin de l'année 1801 et on y trouva effectivement ce qui fut nommé Cérès. En fait cette planète est l'un des nombreux astéroïdes formant la ceinture d'astéroïdes entre Mars et Jupiter.

Une fois encore le rêve a rejoint la réalité. En effet la découverte d'Uranus confirma la loi de Titius-Bode, mais celle de Neptune et Pluton l'infirma.

Les outils actuels permettent de se poser diverses questions sur cette loi. La première est de savoir quelle est la meilleure droite passant par le nuage de points $(n, \log(d_n))$. Le mot meilleur est évidemment à prendre avec des pincettes mais il est d'usage en statistiques de chercher la droite des moindres carrés, i.e. la droite minimisant la somme des carrés des écarts verticaux entre les points observés et la droite.

Il y a une raison à cela ! Il serait technique de l'expliquer, mais on peut dire que c'est lié à la loi des grands nombres, qui donne le comportement asymptotique d'une erreur « aléatoire ». Notons au passage que l'on ne minimise pas la somme des carrés des distances à la droite ...

Toujours est-il que cette droite admet approximativement pour équation $\log(d_n) = 0.54n - 1.56$ et donc $d_n = 0.21 \times 1.7^n$. C'est assez loin de la formule de Titius et Bode.

Par contre si on trace d_n en fonction de 2^{n-2} et que l'on cherche la droite des moindres carrés, on trouve cette fois-ci $d_n = 0.29 \times 2^{n-2} + 0.39$ ce qui est bien la loi de Titius-Bode.

8 Références

Johannes Kepler, *Le secret du monde*, traduction d'Alain Segonds, Les Belles Lettres, Paris, 1984

Johannes Kepler, *Astronomie nouvelle*, traduction de Jean Peyroux, A. Blanchard, Paris, 1979

Johannes Kepler, *Harmonie du monde*, traduction de Jean Peyroux, A. Blanchard, Paris, 1979

Johannes Kepler, *L'étrenne ou la neige sexangulaire*, traduction de Robert Halleux, Vrin, Paris, 1975

Max Caspar, *Kepler*, translated by C. Doris Hellman, Dover, New York, 1993

Owen Gingerich, *The eye of heaven - Ptolemy, Copernicus, Kepler*, Masters of modern physics, The american institute of physics, 1993

Wolfgang Pauli, *Le cas Kepler*, bibliothèque Albin Michel Sciences, Paris 2002

Arthur Koestler, *The Sleepwalkers*, Penguin books, 1959

Henriette Chardak, *Kepler, le chien des étoiles*, Librairie Séguier, Paris, 1989

Henriette Chardak, *Kepler, le visionnaire de Prague*, Presses de la renaissance, Paris, 2004

Nicolas Bouleau, *Dialogues autour de la création mathématique*, Association Laplace-Gauss, Paris, 1997

Norreddine Mahammed, *Histoire des équations algébriques*, Diderot éditeur, Paris, 1998

Marcel Berger, *Géométrie I et II*, Nathan, Paris, 1990

François Boule, *Questions sur la géométrie et son enseignement*, Nathan pédagogie, Paris, 2001

Claudine Robert, *L'empereur et la girafe*, Diderot éditeur, Paris, 1995

A stairway to heaven – François Sauvageot

On peut dire que l'objet des mathématiques c'est d'étudier les êtres abstraits, mais pourquoi ? Les raisons sont aussi nombreuses que les mathématicien-ne-s ! Comprendre le monde, être en harmonie avec lui ... Le-a mathématicien-ne cherche avant tout à abstraire la réalité, à la modéliser pour la comprendre, la contempler dans son intimité, mais pas pour la dominer. Les mathématiques sont avant tout un art même si leur apport technique est sans aucun doute une réalité quotidienne.

Qu'est-ce que faire des mathématiques ? C'est avant tout rêver, rêver que l'esprit peut appréhender l'intangible. Cette activité est bien loin du discours rationnel que l'on prête trop souvent aux mathématiciens. Mais il faut se garder de cette première image. Comme en art copier un tableau de Picasso, n'est pas être Picasso. Considérer un tableau comme une oeuvre achevée, comme un aboutissement technique, c'est passer à côté de la réalité du peintre pour se contenter de la peinture !

« Si mes figures fausses approchèrent la réalité, c'est par pure chance. Cependant cela me fait plaisir de me souvenir combien de détours j'ai dû emprunter, le long de combien de murs j'ai dû grimper dans l'obscurité de mon ignorance jusqu'à ce que je trouve la porte qui laisse passer la lumière de la vérité. C'est de cette façon que j'ai rêvé de la vérité. »

Johannes Kepler

Les mathématiques ont aussi des aboutissements, ceux que l'on enseigne et qui donnent parfois une image figée de ce qu'elles sont. Mais c'est bien de cela dont il s'agit : d'une image figée, morte pourrait-on dire. Car, semblables en cela à une barrière de corail, les mathématiques s'appuient sur leur histoire, sur ce qui les ont précédées, pour continuer à vivre.

Une branche des mathématiques où tout semble avoir été compris est une branche morte ! Bien sûr on continue de l'enseigner pour montrer ce qui a été vu par d'autres, mais personne ne continue de chercher dans cette direction. C'est ce qui explique l'incrédulité de tous ceux qui, même en se destinant à une carrière scientifique (comme des ingénieur-e-s par exemple), n'arrivent pas à imaginer que l'on puisse encore être chercheur-e en mathématiques aujourd'hui et que parfois on trouve de nouvelles choses !

« Quoique les mathématiques apparaissent de nos jours comme un produit fini, aux enchaînements logiquement clairs (ou supposés comme tels) il n'en demeure pas moins que la recherche et la production mathématiques [ne s'élaborent et ne progressent qu'en liaison avec la pratique]. Autrement dit, l'aspect hypothético-déductif et le formalisme du discours mathématique ne constituent que l'ultime étape du processus de théorisation de la connaissance mathématique ; en fait ils n'en constituent souvent que l'habillage. »

Norreddine Mahammed

On évoquera dans cette promenade l'apport des erreurs en mathématiques, qu'elles soient de vraies erreurs, de fausses erreurs, qu'elles soient ferments d'une nouvelle idée ou au contraire un rêve dont on a du mal à se débarrasser. Au cours de l'exposé, seront évoqués Johannes Kepler, Johann Titius, Augustin-Louis Cauchy, Max Planck, Albert Einstein, à la lumière de la science actuelle.