Au-delà du réel : modélisation et prédiction

François Sauvageot
Chargé de mission au CNRS - Communication en mathématiques

11e rencontre Physique et Interrogations Fondamentales
10 décembre 2008

1 Introduction

L'encyclopédie Diderot-d'Alembert définit un modèle comme *tout ce que l'on regarde comme original et dont on se propose d'exécuter la copie*. Pour les physicien-ne-s, un modèle a rapidement été un modèle mécanique, par exemple pour l'étude de l'électro-magnétisme. Pour les mathématicien-ne-s, comme pour les architectes, il s'agit plutôt d'une construction en bois, carton ou plâtre afin d'illustrer un objet abstrait.

Bien qu'une branche des mathématiques se nomme *Théorie des modèles*, cet exposé ne s'y intéressera pas et se concentrera sur la modélisation mathématique, c'est-à-dire une certaine forme de mathématisation touchant à de nombreux domaines des sciences et des techniques. En donner une définition est déjà une difficulté et il est plus aisé de s'en faire une idée en la pratiquant. En modélisation, rien ne remplace une pratique personnelle afin de mesurer les obstacles, de suivre soi-même des chemins menant à des impasses et, ce faisant, d'en constuire le sens, les possibilités, les limites et d'en réaliser les biais. L'obstacle principal est qu'il faut souvent emprunter concepts, idées et vocabulaire à plusieurs sciences.

La modélisation amène à substituer une analogie mathématique à l'analogie mécanique dans la construction des modèles. Mais cette mathématisation ne se fait pas dans l'espoir d'unifier plusieurs sciences, ni de poursuivre une vérité : les modèles mathématiques se comparent rarement entre eux et il est difficile de les invalider, comme on aimerait le faire en suivant Popper. Bien entendu, la modélisation mathématique se fonde sur des aller-retours entre expérience et modèle : initialement abstraction de l'expérience, elle se valide à son contact. Mais y a-t-il plusieurs modélisations possibles et légitimes ?

La pratique de la modélisation amène notamment à se poser la question de savoir si elle est une modalité de la science ou si on doit les distinguer nettement, à supposer que ce soit effectivement possible. Cela posé, quelque soit le rapport des mathématiques au réel, la croyance en ce rapport joue un grand rôle : notamment comme moteur et catalyse de la recherche, que ce soit en physique, chimie, économie, biologie, neurosciences, géographie, danse, arts du cirque ou dans les marchés financiers dérivés. Pourtant la *déraisonnable efficacité des mathématiques* peut rapidement troubler : un modèle peut-il être explicatif et pourquoi peut-on prédire sans expliquer ?

J'aimerais insister sur la nature expérimentale et polysémique des mathématiques, son langage souvent hybride et la multiplicité des modèles, sans pour autant aller vers le relativisme : les opinions ne sont pas arbitraires. La construction du sens demande du temps, du vécu, car l'unique façon de critiquer une modélisation est d'en construire une autre fondée sur d'autres principes. C'est un appel à la rationalité externe, c'est-à-dire à la socio-diversité des points de vues et des lectures du monde, et c'est le sens du titre de cet exposé. La modélisation mathématique est, a priori, au-delà du réel et les mathématiques ont dû développer des outils qui sortent du cadre du réel : irrationnels, imaginaires, quaternions, octonions ou encore géométrie non-commutative.

2 Monde mental, monde platonicien, monde physique

Dans sa poursuite des lois de l'univers, Roger Penrose introduit trois mondes reliés par trois mystères : le monde mental, le monde platonicien et le monde physique. Le monde mental est celui qui nous apparait à travers nos perceptions mentales, et il permet d'appréhender le monde platonicien, qui lui même décrit le monde physique, dont nos perceptions mentales font partie.

Dans sa description Penrose attribue au monde platonicien des qualités exclusivement mathématiques, rejoignant en cela Galilée. Pourtant je ne vois aucune raison pour que le monde mental soit commun à l'ensemble de l'humanité : se pose la question de son unicité, et par là-même, l'unicité du regard des mathématicien-ne-s. La relation du monde platonicien au monde réel pourrait bien être multiple, dans un langage hybride, celui des mathématiques que Nicolas Bouleau qualifie de mixtes.

Quoi qu'il en soit et quelque soit le rapport des mathématiques au réel, la croyance en ce rapport joue un grand rôle. Ce regard porté sur le monde, à travers les yeux de la muse Uranie, est un élément dynamique et moteur de la recherche.

La vie de Johannes Kepler illustre cet élan. La conviction que les formes mathématiques sont la texture même du monde le pousse à réimprimer son Mysterium Cosmographicum alors même qu'il a achevé l'œuvre qui l'a fait entrer dans l'histoire à travers ses trois lois. Même s'il sait que les planètes n'obéissent pas à cet ordre qu'il a cru entrevoir en dessinant un triangle inscrit et circonscrit à deux cercles, il fait réimprimer son œuvre de jeunesse parce qu'elle contient toutes les idées qui l'ont poussé à consacrer sa vie à ce travail gigantesque : le soleil au centre du monde, cause physique du mouvement des planètes, le sens des rapports des grandeurs astronomiques et la musique des sphères. Ce qu'il cherche c'est le monde tel que le voit Dieu !

Albert Einstein ne témoigne pas autrement lorsqu'il s'interroge sur le fait que la mathématique s'adapte d'une si admirable manière aux objets de la réalité. Il suit les pas de Kepler en cherchant une vision du monde que son prédécesseur aurait qualifiée de divine. Ce qui est au centre des motivations d'Einstein, c'est un modèle (mathématique) : « L'homme essaie de construire pour lui-même, de la manière qui lui convient le mieux, une image simplifiée et intelligible de l'univers. Il essaie alors dans une certaine mesure de substituer son propre cosmos au monde de l'expérience et aussi de le dominer. Ce but est celui que poursuivent le peintre, le poète, le philosophe dans ses spéculations et l'homme de science, chacun à la manière qui lui est propre. Il fait de ce cosmos et de sa construction le pivot de sa vie sentimentale, afin de trouver de cette façon, la paix et la sécurité qu'il ne peut atteindre dans le tourbillon rétréci de l'expérience personnelle. » (Discours prononcé en l'honneur de Max Planck.)

Richard Feynman, tout aussi lyrique, ne dit pas autre chose lorsque, après la remise de son prix Nobel de physique en 1965, il implore ses interlocuteurs « de prendre un risque avec leur vie, qu'on ne parle plus jamais d'eux, et de partir là-bas dans le bleu sauvage pour voir s'ils peuvent le comprendre». Autrement dit, selon les mots d'Isabelle Stengers et Bernadette Bernaude-Vincent : s'exposer à l'échec, à l'erreur, à l'expérience qui ne mène à rien, s'exposer à être vaincu dans une controverse, c'est la condition pour être vraiment créatif, pour avancer des idées neuves.

Les modèles mathématiques ont donc une puissance indéniable comme moteurs de la recherche. De nombreux domaines de l'activité humaine peuvent être étudiés à travers de tels modèles, avec une certaine efficacité : en physique, en chimie, en économie, en biologie, en géographie, en danse ou en jonglerie au point d'inspirer des mathématiciens comme René Thom (Thom, 1991). D'une façon très concrète les modèles mathématiques pèsent sur notre vie quotidienne via leur importance dans les marchés financiers.

3 Ponts mathématiques

Vu l'impact social de la modélisation, il est naturel de s'interroger sur sa nature. La modélisation est-elle une modalité de la science ou doit-on les distinguer nettement ? Est-ce effectivement possible ? Corrélativement le rôle des modélisateur-e-s est-il d'éclairer les ignorant-e-s ou bien la fonction d'une modélisation est-elle seulement de plaider une cause particulière ? Y a-t-il plusieurs modélisations possibles et légitimes ?

On peut percevoir la modélisation comme « pont mathématique » entre disciplines. Voici deux exemples :

1. L'Alphabet De la Nature (ADN). Les mathématicien-ne-s portent plusieurs regards sur l'ADN. On peut voir l'ADN comme une ficelle et l'étudier à travers la théorie des nœuds, notamment pour comprendre l'action des enzymes. Une autre approche, liée au décryptage du génôme, est de voir une molécule d'ADN comme un mot écrit dans un alphabet, l'alphabet de la nature, comprenant quatre lettres : A, C, G et T. On peut alors appliquer des méthodes issues des chaînes de Markov (les mêmes que celles qu'utilise Google) et d'autres purement statistiques. C'est par exemple sur l'existence de répétitions dans l'ADN, dues probablement à des erreurs non léthales de réplication, que se fondent les tests ADN. La volonté de créer de grands fichiers d'empreintes génétiques relève ainsi du paradoxe des anniversaires, et doit en conséquence être étudiée avec vigilance.
2. Le partage des richesses. Les mathématiques sont entrées en économie et en finance en se fondant le plus souvent sur un postulat de rationnalité des êtres humains. Postulat loin d'être évident et conduisant à de nombreux paradoxes et dilemmes opposant intérêt collectif et intérêt individuel. Le simple exemple du partage montre la diversité des modèles, comme l'illustrent par exemple les contrats de mariage.

Ce dernier exemple est sans aucun doute fondamental et est expérimenté par tou-te-s dès le plus jeune âge. Face à une situation de partage, les réactions sont diverses et surtout évoluent au cours de la vie. Expérimentées en milieu scolaire, elles donnent toujours matière à discussion et amènent à des modèles mathématiques rapidement sophistiqués. Au départ les outils se cantonnent à de simples divisions ou règles de proportionnalité, mais très vite se pose la question de l'équiprobabilité (c'est-à-dire des lois de probabilités non uniformes) et de l'adversité (partage-t-on indépendamment des risques encourus ?).

Ces considérations amènent naturellement à un plaidoyer pour une pratique de la modélisation dans l'enseignement, que ce soit sous la forme de problèmes ouverts en groupe classe (rallye, narration de recherche), par petits groupes au sein d'une classe (hippocampe) ou par petits groupes sur la base du volontariat (Math.en.Jeans, clubs). Il faut en effet expérimenter la recherche et la modélisation pour l'ancrer dans le vécu, afin d'en construire le sens.

Les mathématicien-ne-s ont toujours été réticent-e-s à faire pratiquer les mathématiques sans en avoir appris le vocabulaire avec son sens précis, propre à leur discipline. Mais faut-il apprendre les mots des mathématicien-ne-s avant de pouvoir partager leur savoir ? Certes le langage technique est nécessaire à l'avancée de la connaissance, mais il normalise la communication interne et il accroit l'incommunicabilité. Or, pour pouvoir modéliser à bon escient, il faut pouvoir communiquer, et savoir emprunter des ponts mathématiques.

Les analogies, qu'elles soient explicatives ou non, permettent de dresser des ponts invisibles dont l'armature est mathématique. L'analogie recèle de nombreux pièges et fausses routes, là réside à la fois sa puissance créatrice et son erreur. En d'autres termes, la science ne fournit pas de réponse opérationnelle et unique. La modélisation s'inscrit dans un site social, en utilisant un langage hybride.

4 Polysémie et sous-détermination

La pertinence d'un modèle ne vient pas des calculs qui y sont menés. Les mathématiques d'un modèle sont d'une nature bien différente de celles des calculs algébriques : en paraphrasant André Weil, si la logique et le calcul algébrique sont l'hygiène du modèle mathématique, là ne réside pas sa pertinence. Kepler est copernicien, non pas parce que l'hypothèse de Copernic est plus élégante ou plus efficace, mais parce que pour lui la position centrale du Soleil est un pré-requis de son astronomie, de la physique qu'il est en train de créer. Sans cette conviction, acquise et revendiquée dès son adolescence, ses recherches se seraient vite essoufflées et Isaac Newton n'aurait pas pu y puiser une de ses sources d'inspiration. En effet, pour Kepler, le système copernicien est le seul qui réponde aux « questions importantes » :

– Pourquoi Mercure et Vénus accompagnent toujours le Soleil, sans s'en écarter trop, alors qu'elles reviennent dans une même position en moins d'un an ?

– Pourquoi ces mêmes planètes inférieures n'entrent-elles jamais en opposition avec le Soleil alors que les autres oui ?

C'est par la critique d'un modèle par un autre modèle que Kepler, Newton ou Einstein ont fait progresser la physique. Mais contrairement à ce qu'on pourrait penser à l'évocation de ces théoriciens, un modèle n'est pas toujours fondé sur des causalités et sa validation n'est pas non plus une validation de son schéma logique. La quête d'une théorie permettant d'englober à la fois le modèle de la gravitation issu de la relativité générale et la mécanique quantique est une quête de la conciliation de modèles en essence contradictoires, car fondés sur une perception du temps différente : la mécanique quantique prend le temps pour acquis, externe au modèle, tandis que la relativité l'incorpore dans un espace-temps. Si la relativité restreinte permet encore une caractérisation unique du temps, grâce à un découpage de l'espace suivant une direction favorisée, ce n'est plus le cas de la relativité générale qui engendre une multiplicité des temps : il n'y a pas de façon unique de découper des « tranches d'espace » dans l'espace-temps de la relativité générale.

La contradiction entre les modèles quantiques et relativistes est issue de visions du monde différentes, d'explications divergentes sur la nature du monde. Dans d'autres circonstances des modèles prédictifs ne se fondent pas sur une explication. Ils n'en sont pas pour autant moins utiles. Après tout on a utilisé l'aspirine bien avant de comprendre ses mécanismes. Si l'on s'intéresse aux crues, par exemple, on peut vouloir les modéliser en étudiant les hauteurs d'eau ou le débit de la rivière. Dans les deux cas un modèle gaussien sera pertinent et pourtant si la hauteur d'eau obéit à une loi gaussienne, ce n'est pas le cas pour le débit, et réciproquement.

En modélisation, on sort vite de la dichotomie et de l'opposition simple entre deux modèles. Par exemple, pour le trafic routier, on peut trouver un modèle microscopique, un modèle algorithmique (automates cellulaires), un modèle particulaire (probabiliste), un modèle macrosopique (lié au précédent par une limite hydrodynamique). Peser le pour et le contre dans une situation qui n'est pas binaire amène inévitablement à des dilemmes, comme le souligne le paradoxe de Condorcet.

D'autant que, comme le note Nicolas Bouleau (Bouleau, 1999) « les mathématiques mixtes abondent de situations où les théories sont sous-déterminées par les faits ». Autrement dit le modèle mathématique permet d'approcher d'aussi près que l'on veut la réalité que l'on a observée. C'est dans cette propriété que résident à la fois sa puissance et sa limite. Comme on peut rendre compte de façon aussi réaliste que l'on veut des observations, quitte à modifier le modèle en lui rajoutant des paramètres, le modèle mathématique s'ajuste aux besoins de l'ingénieur-e.

La première limite se trouve dans le fait que l'adéquation du modèle ne permet en rien de lui imputer des vertus explicatives. Pour rester dans les problèmes qui fascinaient Kepler, on a longtemps cherché une explication à la loi de Titius-Bode donnant la distance du Soleil aux planètes en fonction de leur rang dans le système solaire et chaque nouvelle théorie de formation du système solaire était testée à l'aune de la loi de Titius-Bode jusqu'à ce que deux astrophysiciens, Bérengère Dubrulle et François Graner, expliquent qu'une telle loi résultait de propriétés de symétrie et d'isotropie à la naissance du système solaire. Or tous les modèles raisonnables de formation du système solaire vérifient ces propriétés de symétrie et d'isotropie : la loi de Titius-Bode ne permet donc pas de les séparer. Ce cas n'est nullement pathologique : c'est même le cas général. « Au contraire, ce sont les théories poppériennes qui sont l'exception. Construire une théorie réfutable par l'expérience est une exigence extrême. » Pour pouvoir y parvenir avec un modèle déterministe, il faut suffisamment de données ; quant à un modèle probabiliste, il faut pouvoir augmenter librement la taille des échantillons.

La seconde limite se trouve dans l'intelligibilité des résultats du modèle. Ainsi il n'est pas facile d'appréhender le génome humain et, même si le projet international visant à donner la séquence complète de l'ADN humain a été mené à bien en 2005, la quantité de données est telle que les scientifiques sont bien loin de l'avoir décrypté. Il faut en effet environ 1 giga-octet pour stocker l'information contenue dans une cellule humaine. Avec ce niveau de complexité, il est nécessaire d'avoir des modes d'analyse et de visualisation spécifiques.

Ces questions existent même au sein des mathématiques. Ainsi que le formule Jean-Louis Krivine, *les mathématicien-ne-s ont pour tâche, à partir d'un programme code, de reconstituer le programme source. C'est un décryptage mais dans un langage à inventer : un décryptage interprétatif et créatif.*

5 Expertise et contre-expertise

S'extirper de toutes les hypothèses implicites du modèle est très ardu et sans intérêt pour le modélisateur qui pense son modèle perfectible, amendable, mais à même d'épouser asymptotiquement toute la réalité. Ceci remet en question les procédures de validation comme seul examen de passage. En fait l'unique façon de critiquer une modélisation est d'en construire une autre fondée sur d'autres principes. C'est un appel à la rationalité externe, c'est-à-dire à la socio-diversité des points de vues et des lectures du monde.

Ce plaidoyer pour les changements de point de vue peut sembler par trop relativiste. À choisir, je préfèrerais un qualificatif comme post-moderne. Car, même si les modèles sont multiples et les mathématiques polysémiques, les opinions, elles, ne sont pas arbitraires. La construction du sens demande du temps, du vécu.

D'où l'importance du développement de la modélisation concurrente :

– discret, entiers, particules vs. continu, réels, topologie.
– descriptif vs. explicatif.
– quantitatif vs. qualitatif.
– déterminisme vs. probabiliste.
– imaginé, imagé vs. symbolique, symbolisé.

Cette rationalité externe fait que la modélisation mathématique peut être vue comme « au-delà du réel ». Même si le modèle colle asymptotiquement au réel, rien ne dit qu'il l'approche « de l'intérieur » !

6 Les mathématiques au-delà du réel

C'est même une activité commune en mathématique que de sortir de la réalité objective et rationnelle, de sortir du réel.

– Les nombres irrationnels ont été l'objet d'attentions particulières dès l'antiquité. Leur existence même pose des problèmes, comme leur nom l'indique.
– Les nombres algébriques, obtenus comme racines d'équations polynomiales à coefficients rationnels, ont été l'objet d'études constantes et sont les premiers exemples de nombres réels non rationnels. La construction du corps des nombres réels a, quant à elle, attendu la fin du XIXe siècle.
– Les nombres imaginaires portent un nom chargé d'histoire. Ils permettent de comprendre les phénomènes bi-dimensionnel et de munir le plan euclidien d'une structure d'algèbre et de corps.
– Les nombres de Hamilton, ou quaternions, s'attaquent aux dimensions 3 et 4 et sont présents en électricité, dans la théorie des spineurs etc.
– Les nombres de Cayley, ou octaves ou octonions, apparaissent quant à eux de façon surprenante dans le modèle standard.
– Enfin Alain Connes a introduit la géométrie non-commutative pour décrire l'univers.

En 1872, Félix Klein fonde le programme d'Erlangen. Dans un contexte de crise due à l'apparition des géométries non-euclidiennes, il décide de fonder la géométrie sur les notions d'action de groupe et d'invariant, la géométrie des espaces homogènes. Le groupe définit la géométrie, donne le langage pour en décrire les objets, mais plusieurs groupes peuvent agir sur le même espace. C'est ainsi que Cartan a étudié la gravitation. On peut rapprocher cette approche du point de vue de Jean Piaget : « on ne connaît un objet qu'en agissant sur lui et en le transformant. »

Un exemple fondateur d'étude via la notion de groupe et de symétrie provient des travaux d'Évariste Galois (1830) sur les équations algébriques. Prenons l'exemple simple de l'équation $2x^2 + 6x = 8$. On peut l'étudier à travers la parabole d'équation (dans le plan euclidien) $y = 2x^2+6x-8$. Son sommet est l'endroit où la tangente à la parabole est horizontale, i.e. le point $(s, y(s) = 2s^2 + 6s - 8)$ pour lequel $y'(s) = 4s + 6$ est nul. Dans notre cas le sommet a donc pour coordonnées $(-3/2, -25/2)$.

Galois introduit le groupe qui échange les racines α et β de cette équation et les quantités qu'il laisse invariantes. Dans notre cas, on a une symétrie de la parabole par rapport à un axe vertical passant par son sommet, d'équation $x = (\alpha + \beta)/2 = s = -3/2$. La symétrie peut s'interpréter comme une invariance de l'équation de l'axe par échange de α et β.

L'équation $\alpha+\beta = 2s = -3$ est plus agréable que l'équation du second degré. Pour conclure l'étude, algébriquement, il nous suffirait de connaître $\alpha - \beta$. On aurait alors deux équations linéaires. Mais $\alpha - \beta$ n'est pas invariant par échange de α et β, et on ne peut donc le calculer à partir de l'équation.

Néanmoins, $(\alpha - \beta)^2$ est invariant. Géométriquement cette quantité est liée à l'ordonnée du sommet de la parabole, que l'on connaît puisque ce sommet est invariant par échange de α et β ! En général, si a est le coefficient de degré 2, $y(s) = -a(\alpha - \beta)^2/4$. Ici on a donc $(\alpha - \beta)^2 = -2y(s) = 25$. (On aurait pu le calculer algébriquement ainsi : $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 3^2 + 4.4 = 25$.) On peut donc calculer α et β en supposant, par exemple, $\alpha > \beta$. Dans ce cas $\alpha - \beta = 5$ et donc $\alpha = (-3 + 5)/2 = 1$ et $\beta = (-3 - 5)/2 = -4$.

Géométriquement la conique dégénérée, formée des deux droites passant par le sommet et l'un des points d'intersection de la parabole et l'axe des abscisses, est invariante par échange de α et β. On peut donc en calculer l'équation. Le fait qu'elle soit dégénérée nous assure que cette équation est un produit de deux équations linéaires. On voit donc les liens entre les idées de Galois, groupes et symétries, et la géométrie.

Notons au passage, pour les mathématicien-ne-s, que le groupe de Galois de l'équation que nous venons d'étudier est en fait trivial : les deux racines sont rationnelles. Les valeurs numériques n'étant choisies ici que pour illustrer concrètement la démarche, tout en restant simples.

Sophus Lie (1842-1899), proche de Klein, étudie les groupes de Lie (de 1873 à 1893), c'est-à-dire la théorie des symétries continues, notamment des équations différentielles, afin d'y étendre les théories de Galois. Ses théories incluent par exemple le plan, l'espace, le cercle ... et les groupes issus de la géométrie. Les groupes de Lie ont été classifiés en 1894 par Élie Cartan.

La classification des groupes de Lie se ramène à des groupes dit « simples ». Tout groupe de Lie se déduit (théoriquement) d'eux. Il y a les groupes classiques et cinq groupes exceptionnels (Killing - 1890). On retrouve parmi ces groupes des nombres qui étendent les nombres réels.

- La structure de groupe sur le cercle $\mathbf{S}^1$ se rattache aux nombres complexes, via l'écriture en coordonnées polaires.
- La structure de groupe sur la sphère $\mathbf{S}^3$ est liée à l'existence des quaternions de Hamilton.

Avec ces nombres, on construit tous les groupes de la géométrie classique. On peut leur donner des interprétations physiques : électricité, spineurs etc.

Les groupes de Lie simples exceptionnels, quant à eux, sont liés à une quasi-structure de groupe de Lie sur l'hypersphère $\mathbf{S}^7$, liée aux octonions. Le plus petit groupe simple exceptionnel est G_2 (groupe des automorphismes des octonions, de dimension 14). Le plus grand est E_8 de dimension 248.

Une fois les groupes connus, la question fondamentale en relation avec le programme d'Erlangen est : sur quoi opèrent-ils et comment ? C'est l'objet de la théorie des représentations. L'espace naturel sur lequel agit un groupe est l'ensemble des fonctions sur ce groupe. On parle de représentation induite. Par exemple, sur la droite réelle, cette théorie est celle de Fourier.

Classifier les représentations du groupe, c'est déterminer les blocs élémentaires des représentations induites. In fine la description est de nature combinatoire. Pour illustrer ce sujet, voici un exemple montrant comment décrire l'infinité des représentations et des éléments du groupe. La sphère $\mathbf{S}^3$ est munie d'une structure de groupe. Le cercle $\mathbf{S}^1$ contient un représentant de chaque classe de conjugaison de $\mathbf{S}^3$ et les représentations irréductibles de $\mathbf{S}^3$ sont déterminées par un entier naturel n et le fait que la trace de cette représentation, évaluée en l'élément θ de $\mathbf{S}^1$, vaut $sin(n\theta)/sin(\theta)$.

Pour comprendre un peu mieux ces groupes exceptionnels, on peut faire une construction à partir d'algèbres. Différents types d'algèbres ont été introduites pour répondre à différents problèmes. Les algèbres de Clifford et les spineurs permettent de rendre compte d'un problème de simple connexité. Les algèbres de Jordan ont été introduites pour la théorie quantique. Une telle algèbre est associée à toute algèbre normée. La construction des algèbres de Lie exceptionnelles peut se faire, quant à elle, à partir de deux algèbres normées grâce au carré magique de Freudenthal et Tits.

Mais il peut être intéressant de noter que Landsberg et Manivel obtiennent la construction des algèbres de Lie exceptionnelles via la géométrie projective.

Pour clore, peut-on dire que l'introduction de la géométrie non-commutative est une sortie définitive du cadre des nombres réels ... pour mieux rendre compte du réel ?

Et que dire des autres façons de sortir du cadre rationnel, comme les nombres p-adiques par exemple ?

Références

[1] Adams, J. F., Lectures on exceptional Lie groups, Chicago lectures in mathematics, The University of Chicago Press, 1969, Chicago and London

[2] Bouleau, N., Philosophies des mathématiques et de la modélisation - Du chercheur à l'ingénieur, L'Harmattan, 1999, Paris et Montréal

[3] Israel, G., La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique, Science ouverte, Seuil, 1996, Paris

[4] Nouvel, P. (sous la direction de), Enquête sur le concept de modèle, Science, histoire et société, PUF, 2002

[5] Penrose, R., À la découverte des lois de l'univers - La prodigieuse histoire des mathématiques et de la physique, Sciences, Odile Jacob, 2007, Paris

[6] Sauvageot, F., Modélisation des crues de la Loire, Bulletin de l'APMEP, 459 (2005), 483–493

[7] Sauvageot, F., Les yeux d'Uranie : le regard et les mots des mathématiciens, in Actes des Rencontres Jules Verne, Le partage du savoir, École Centrale de Nantes, 24 et 25 janvier 2008, Coiffard Libraire Éditeur 2008, Nantes

[8] Sharpe, R. W., Differential geometry : Cartan's generalization of Klein's Erlangen program, Springer, 1997

[9] Stewart, I., La nature et les nombres - L'irréelle réalité des mathématiques, Sciences, Hachette, 1998

[10] Thirion, M., Les mathématiques et le réel, IREM - Histoire des mathématiques, Ellipses, 1999