Attirer les élèves vers les mathématiques : le rôle des mathématiciens

François Sauvageot

Deuxième congrès Canada-France, Montréal
Session *Éducation mathématique*
5 juin 2008

1 Introduction

Je voudrais tout d'abord remercier chaleureusement les organisateurs pour cette invitation et en profiter pour me présenter rapidement.

Je suis chercheur en formes automorphes, mais ce n'est pas ce qui m'a conduit à parler du sujet que j'évoque aujourd'hui. Ce sont plutôt mes expériences en formation (initiale et continue) des enseignants (professeurs des écoles et professeurs des lycées et collèges) et mes expériences de science populaire : fête de la science, salons mathématiques, interventions en milieu scolaire, conférences, réalisation de posters, rencontres avec des enseignants ...

J'emploie la locution « science populaire » là où d'autres emploient vulgarisation, diffusion ou popularisation. Je reviendrai sur ce choix.

2 Panorama

2.1 Motivations

Pour commencer voici un panorama (non exhaustif) des actions de chercheurs en mathématiques vers les élèves, en France.

Ces actions ont, à mon sens, avant tout un rôle social. Pourquoi attirer des enfants vers les mathématiques ? C'est une question difficile et la réponse prend des formes différentes selon la culture.

C'est pourquoi je préfère parler de science populaire au sens du XIX^{e} siècle. Il s'agit de parler de science, de mettre les questions sur la place publique et de débattre, chacun apportant ses vues, son expérience, les questions auxquelles il attend une réponse etc. Bien que les formes concrètes sont différentes selon le public visé, l'attitude est semblable que ce soit face à des enfants, des parents, des enseignants ou tout simplement des citoyens.

Il s'agit par exemple de montrer que la réponse à une question est bien souvent une autre question, d'arriver à mieux vivre face aux doutes, au hasard ou la liberté, d'accepter de se réaliser pleinement, de prendre sa vie en main et de donner du sens aux avis des experts tout en les questionnant.

John von Neumann disait : *If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is*. Le mathématicien ne vient pas pour rendre simple ce qui est complexe, ni pour vendre des recettes. Il vient pour que chacun puisse regarder la vie au fond des yeux !

C'est pourquoi, au delà des conférences, des projections de film ou encore des expositions, ce qui m'intéresse ce sont les actions où les mathématiciens s'impliquent dans le projet et n'ont pas peur de se confronter au public, dans une relation d'échange. Ou encore de permettre à chacun d'expérimenter ce qu'est la recherche.

Une remarque en pensant : si je parle de science populaire, c'est que bien évidemment j'inclus les mathématiques dans les questions de science. La mode semble être de réserver le mot science aux seules sciences expérimentales. Je m'élève contre cela que ce soit dans les programmes scolaires ou dans les rapports européens (comme le rapport Rocard par exemple).

2.2 Rencontres et échanges

Des interventions en milieu scolaire (et pas seulement en secondaire pendant des cours de math) permettent aux chercheurs de rencontrer des élèves :

– Groupes IREM : interventions en ZEP par exemple.
– Projet de la Fondation 93 : interventions en SEGPA pour discuter du rôle des maths dans la société, des métiers où les maths sont utiles etc.
– L'université dans les écoles : projet développé pour la Fête de la science par les mathématiciens de Paris centre pour aller visiter les écoles maternelles et élémentaires de leur quartier (13^{e} arrondissement de Paris)

Ces interventions peuvent être isolées ou dans un contexte plus suivi (3 ou 4 interventions dans l'année par exemple). L'objectif est de pouvoir développer une relation de confiance, de mettre en place des situations complexes et aussi de pouvoir transmettre son savoir faire aux enseignants. En particulier le lien entre les professeurs des écoles et les universitaires est important : comme référents ou comme personne ressource (dans un sens) et pour mieux connaître la réalité du terrain (dans un autre). C'est aussi valable, bien entendu, pour les enseignants du secondaire (et on pourrait imaginer des échanges aussi entre le primaire et le secondaire, ou tripartites).

Des ateliers proposés aux scolaires et au grand public en dehors des établissements scolaires permettent d'accéder aux chercheurs en direct et de les voir dans un contexte différent de celui de la recherche, tout en préservant la notion de situation de recherche :

– Fête de la science (par exemple à Nantes ou à Paris).
– Salon de la culture et des jeux mathématiques.
– Rallyes mathématiques.

Les stages en milieu professionnel pour les 3^{e}, les stages de lycées permettent aux élèves de découvrir l'université, ses laboratoires, ses chercheurs, ses ingénieurs, ses personnels non-chercheurs :

– Accueil de stagiaires dans les laboratoires (par exemple sur le site Chevaleret, Paris centre).

Les rencontres autour d'une projection de film suivie d'un débat avec un(e) mathématicien(e) soit au sein du laboratoire, soit dans l'établissement scolaire (collège ou lycée) sont également un moyen d'engager le débat. On y parle de la réalité quotidienne (et il est difficile d'échapper aux questions sur la longueur des études et sur le salaire), mais aussi de la vie des chercheurs, de leurs motivations, de leurs rêves aussi. Après avoir raconté la vie de Galois, il n'est pas rare de devoir raconter la résolution par radicaux des équations algébriques de degré 2, 3, 4 et pourquoi pas de dévisager un instant le degré 5.

Mais les rencontres peuvent aussi servir à mettre en place des situations de recherche au sein de la classe :

– Rallyes mathématiques en groupe classe (organisés par les académies et les IUFM).
– Narrations de recherche (organisées par les IREM), avec un objectif de recherche en didactique par exemple.

ou encore par petits groupes au sein d'une classe (Hippocampe, à Marseille) ou sur la base du volontariat (Math.en.Jeans, Animath).

Les problèmes de recherche sont ouverts dans leur formulation, (formulation qui n'est pas nécessairement mathématisée), dans l'approche et dans les outils mis en œuvre.

3 Enjeux

3.1 Pour les enfants

Il y a un enjeu social tout d'abord. Le chercheur se rendant auprès d'un enfant lui témoigne un intérêt et cet aspect peut être moteur. À cet égard il est important que le chercheur vienne justement en étant ouvert, et gardant à l'esprit que les enfants vont lui apporter des regards différents et enrichir sa propre pratique des mathématiques.

Le chercheur apporte aussi un changement de point de vue (sur un sujet donné tout comme sur les maths en général), une vision transverse et peut déformer une situation (pour y reconnaître les variables) de façon à la mettre en scène de façon parlante.

À ce propos, il n'y a pas de bonne situation ! On cite parfois (dans les rapports européens sur Pollen par exemple) des situations dont on aimerait que tous s'inspirent. C'est un non sens. Une bonne situation à Neuilly n'a aucune raison de refléter la réalité quotidienne d'enfants des Mureaux. Et réciproquement. Le chercheur permet donc de déformer la situation de façon à garder les enjeux mathématiques tout en l'adaptant à son public.

Il y a une profonde dimension culturelle dans ces interactions. On y parle notamment des règles, des buts et des enjeux des mathématiques, des parcours académiques aussi bien sûr.

Mais surtout on apprend à se constuire des avis indépendants. La situation de recherche amène naturellement à une approche modèle/contre-modèle, comme Nicolas Bouleau les appelle de ses vœux.

3.2 Autres enjeux

L'enjeu social existe également vis-à-vis des enseignants (de math en secondaire comme les professeurs des écoles) et vient renforcer les actions des IREM ou de l'APMEP.

En même temps que le chercheur devient référent et personne ressource, il acquiert aussi une connaissance du terrain qui lui permet de mettre en réseau ceux qui le contactent. En même temps les actions de formation continue deviennent plus pertinentes et plus adaptées aux besoins.

Quant aux chercheurs, rencontrer des parents ou le grand public leur permet d'apprendre à interagir avec eux et d'apprendre en retour. Bref de prendre part à des actions de science populaire.

4 Modes opératoires

Pour que l'approche ne soit pas factice, il faut réfléchir à la mise en scène des actions, les relier à des thèmes de société, tout en gardant présent à l'esprit le contenu mathématique ou pédagogique.

La fréquentation des mots mathématiques permet de construire le sens, peu à peu. Il est important de changer les perspectives de façon à rendre le savoir mobilisable :

- Changer les règles d'un jeu connu et voir les conséquences.
- Modifier la situation pour avoir des angles stratégiques différents (situations collaboratives ou individuelles).
- Aller vers l'abstraction et la polysémie grâce à la construction de modèles.
- S'essayer à la dérive de concept (une approche situationniste ?).

Les mathématiques permettent de constuire des situations abstraites qui sont des ponts conceptuels entre diverses situations issues de la réalité concrète ou d'autres disciplines. Abstraire permet de décrire une situation avec le vocabulaire d'une autre, mais on est vite soumis à des paradoxes quant on en vient à déformer les situations de part et d'autre du pont mathématique. En d'autres termes les situations se correspondent mais les variables didactiques ne sont pas les mêmes.

Quelques exemples :

- Ouvrir un journal gratuit et prendre un article (au hasard ?) et faire des remarques mathématiques (tout en essayant de rester calme), un peu comme le fameux exercice sur le livre *Algebra* de Serge Lang !
- Mise en scène sous forme de jeux ou de tours de magie (tours automatiques).
- Dérive du baguenodier vers la numérotation des disques durs.
  - Le baguenodier a été étudié par Édouard Lucas. Comme de nombreux jeux, il a une interprétation en termes d'écriture binaire.
  - Si on se limite à trois anneaux, les positions du baguenodier sont repérées par les sommets d'un cube. Quand on veut comprendre à quoi correspond un baguenodier à quatre anneaux, il faut constuire un hyper-cube et on est amené vers la quatrième dimension. On peut la présenter par un cube en expansion (comme l'univers ?) ou en translation, par exemple en utilisant du matériel pour polyèdres (comme Zome).
  - Les coups autorisés sur un baguenodier correspondent à certaines arêtes du cube. Quand on désosse le cube pour ne laisser que ces arêtes, on se retrouve avec un objet linéaire : un chemin hamiltonien sur le cube. On peut donc compter le nombre de coups nécessaires pour résoudre le puzzle, voir que le départ standard conduit à l'autre extrémité du chemin hamiltonien etc.
  - En revenant au binaire, on tombe sur une suite de nombres qui constitue les entiers de 0 à 127 avec la propriété que le successeur d'un terme ne diffère de son prédécesseur que par un chiffre dans son écriture en binaire. Une telle suite est utilisée pour numéroter les secteurs d'un disque dur car elle permet de minimiser les déplacements lors de changements de secteurs et fait donc gagner en vitesse de lecture.

5 Situations de Recherche en Classe

Je laisse Denise Grenier présenter les travaux de son équipe de recherche dans ce domaine.

6 Situations autour du thème de l'information

6.1 Intérêts

La théorie de l'information est centrale dans la société, et se pose de façon immédiate dès le plus jeune âge, notamment dans des situations de communication.

Elle met en jeu la structuration de l'information et par ce biais la structuration mathématique. Elle nécessite de construire des modèles et se relie de façon naturelle :
– au codage, à l'arithmétique et à la théorie des permutations ;
– aux fonctions et aux transfrormations ;
– à la transmission (envoi et réception).

Il est important de noter que, même si toute information peut être codée et donc ramenée à des nombres, les situations non-numériques sont nécessaires. Il ne faudrait pas, en particulier, réduire les maths à la science des nombres dans l'imaginaire collectif.

6.2 Situation sans recours à la lecture

De telles situations sont nécessaires, et même incontournables en maternelle.

Nous en avons emprunté une à Dominique Souder, professeur de math au lycée Valin de La Rochelle. Elle a été publiée dans le bulletin de l'APMEP (et présentée lors de journées nationales de l'APMEP ainsi qu'au salon de la culture et des jeux mathématiques).

On pose des châtaignes et deux fruits sur une table puis on forme deux groupes. Chacun des groupes reçoit des châtaignes et prend un fruit (à l'insu du mathémagicien). Selon le fruit choisi, chaque groupe prend des châtaignes supplémentaires. En étudiant ce qui reste sur la table le mathémagicien devine quel groupe a pris quel fruit.

Notons n le nombre de châtaignes initial, x et y le nombre de châtaignes données à chaque groupe, f et g les fonctions correspondant à chacun des fruits. Le nombre de châtaignes restant est donc $n-x-y-f(x)-g(y)$ ou $n-x-y-f(y)-g(x)$ selon le choix de fruit. Il suffit donc que ces nombres diffèrent, ou encore que $f(x)-f(y)$ soit différent de $g(x)-g(y)$.

On peut aussi l'écrire avec une fonction de deux variables $h(x,y)=x+y+f(x)+g(y)$. Dans ce cas, on veut que $h(x,y)$ soit différent de $h(y,x)$. En fait on touche ici à la notion d'injectivité, nécessaire pour pouvoir discriminer les informations. On condense deux données (x et y) en une seule ($h(x,y)$) et on veut que l'on puisse remonter aux données.

Pour la mise en scène, prenons $x=1$ et $y=2$, $f=Id$ et $g=2f$. La fonction h prend donc deux valeurs distinctes : $h(1,2)=8$ et $h(2,1)=7$. En particulier $9-h=x$. On prendra donc 9 châtaignes au départ et le nombre de châtaignes restantes indique quel fruit a pris le groupe à qui on a donné une châtaigne au départ ! De façon équivalente le nombre de châtaigne donne le groupe qui a choisi le fruit 1.

L'important, dans une mise en scène, est que tout soit fluide pour le magicien. Et de pouvoir l'apprendre à un enfant parmi le public, donc ici à un enfant entre 3 et 5 ans. On comprendra qu'il ne faut pas de formule à apprendre par cœur.

Si on passe à trois fruits, on cherche toujours une fonction injective $n-h$ avec $h(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3+f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_3(x_3)$. Les valeurs de h doivent être différentes sur les permutations d'un triplet fixé (x_1,x_2,x_3). Comme il n'y a pas de façon simple de numéroter les permutations, le résultat de $n-h$ n'exprimera pas de façon simple le choix des fruits et il faudra donc ici se résoudre à apprendre par cœur si on veut transmettre ce tour.

Si l'on prend $(1, 2, 3)$ comme triplet et pour (f_1, f_2, f_3) des fonctions linéaires de coefficients (a_1, a_2, a_3), alors les conditions sur les coefficients sont d'une part d'être différents et d'autre part de ne pas être en progression arithmétique (je laisse le soin au lecteur de se convaincre de cela). On peut donc prendre $(1, 2, 4)$. La valeur maximale de h est atteinte pour $h(1, 2, 3) = 23$ et on peut prendre $n = 24$ pour avoir des restes valant 1, 2, 3, 5, 6 ou 7.

Je donne maintenant quelques pistes pour approfondir la situation en fin de primaire ou au collège.

Pour se souvenir de quel résultat correspond à quoi, on peut le mémoriser directement ou chercher à approximer. L'endroit où est placé 3 détermine des valeurs de h plus ou moins grande, donc de $n-h$ plus ou moins petites. Ainsi $n-h(3, x, y)$ est relativement grand car $a_1 = 1$, $n - h(x, 3, y)$ est médian car $a_2 = 2$ et enfin $n - h(x, y, 3)$ est relativement petit. De plus quand on intervertit 1 et 2, l'écart entre les deux valeurs est l'écart entre les coefficients, donc 1, 2 ou 3. Il est égal à 1 pour $a_2 - a_1$ et ce cas apparaît donc lorsque 3 est en troisième position, i.e. pour $n - h$ minimal.

La seule combinaison possible est donc :
- valeurs petites : 1 et 2
- valeurs grandes : 7 et 5 (l'écart n'est pas 1 et vaut 2 ou 3)
- valeurs médianes : 3 et 6

Obtenues plus précisément pour les valeurs :
- valeurs petites : (1,2,3) et (2,1,3)
- valeurs grandes : (3,2,1) et (3,1,2)
- valeurs médianes : (1,3,2) et (2,3,1)

Il y a bien sûr mille autres façons d'arriver à cette conclusion. En bref, il suffit de retenir que les valeurs de $n - h$ sont 1, 2, 3, 5, 6 et 7 pour retrouver les antécédents de cette fonction.

Enfin on est amené à étudier $h(x, y, z) = x + 2y + 4z$ et donc on est vite invité à glisser vers des questions de numération.

6.3 Codes correcteurs et informations redondantes

Avoir une fonction injective des données permet aussi de les contrôler. C'est le principe des codes correcteurs d'erreur. On transmet l'information augmentée de données que l'on peut retrouver à partir d'elle. S'il y une erreur de transmission, on s'en aperçoit (c'est aussi l'idée des bits de contrôle, des clefs de numéro de sécurité sociale ou de RIB) et parfois on peut corriger l'erreur.

Une façon brutale est de transmettre trois fois l'information. S'il y a une seule erreur, la bonne information est celle transmise au moins deux fois ! Autrement dit, les sommets d'un cube se répartissent en deux groupes : les voisins de (0,0,0) et les voisins de (1,1,1). Une remarque que l'on peut faire quand on parle du baguenodier !

Voici une situation ayant d'autres intérêts.

Dans une file indienne, chacun reçoit une carte dans son dos. Chacun peut donc voir les cartes des personnes devant lui, mais ni la sienne, ni celle des personnes derrières lui. Le but du jeu est de deviner sa carte. La première personne à parler est le dernier de la file et ensuite chacun parle après la personne située derrière lui. Chacun ne peut faire qu'une chose : annoncer une carte.

On est libre de fixer les règles du jeu pour créer autant de situations que l'on veut.

On peut considérer que chacun joue pour soi et on a à faire un calcul de probabilité pour évaluer les chances de succès. Mais il faut distinguer stratégie probabiliste d'analyse probabiliste. On peut trouver des stratégies déterministes bien meilleures que les stratégies probabilistes, et le démontrer par une analyse probabiliste.

En effet si le jeu est collectif, il est plus intéressant. Chacun peut par exemple donner la carte de son successeur et ainsi on gagne exactement une fois sur deux. Mais on peut faire mieux. Le dernier peut transmettre une fonction de tout ce qu'il voit.

Si l'on joue avec 52 cartes et n joueurs, le dernier doit trouver une fonction de $n-1$ variables disons dans $\{1, \ldots, 52\}$ et à valeurs dans ce même ensemble (puisqu'il doit annoncer une carte). Une telle fonction ne saurait être injective. Néanmoins le successeur a accès à presque la même information, il ne lui manque qu'une carte, la sienne. On doit donc trouver une fonction injective si on fixe toutes les variables sauf une. La fonction somme est sans doute la plus simple et on vient en fait d'opérer une transformation d'Abel modulo 52.

Pour simplifier, on peut partir de cartes en ne retenant que rouge ou noir. Chacun doit annoncer rouge ou noir à son tour. La stratégie individuelle est donc moins catastrophique que précédemment ! J'y reviendrai.

Les joueurs conviennent que rouge est pair (0) et noir impair (1). Le dernier joueur annonce la parité du nombre de cartes noires qu'il voit, c'est-à-dire la somme, modulo 2, des cartes qu'il voit. Le suivant effectue la même somme. Si la parité est identique sa carte est rouge, sinon elle est noire. Il annonce donc la couleur de sa carte à coup sûr.

Les suivants commencent par mémoriser la couleur annoncée par le dernier de la file puis procèdent ainsi : quand quelqu'un annonce rouge, ils ne font rien, sinon ils changent la couleur mémorisée. Quand vient leur tour d'annoncer, si la somme qu'ils voient est identique à la couleur mémorisée, ils annoncent rouge et sinon ils annoncent noir.

Dans une classe, on est tenté de mettre cette situation en pratique avec peu d'élèves afin de rendre le jeu rapide. Or la stratégie optimale assure $n-1$ gagnants et le dernier a une chance sur deux de gagner. Pour $n = 4$, l'espérance de gain est donc $3,5$ avec variance 1/2.

En jouant au hasard, on a une espérance 2 et une variance de 1. Dans la pratique cette méthode peut donner des résultats satisfaisants, y compris en jouant en parallèle avec un groupe de quatre animateurs appliquant la stratégie optimale ! En d'autres termes, coopérer ne devient une nécessité que lorsqu'on répète le jeu assez longtemps. Ou encore : dans une stratégie probabiliste il ne faut pas se contenter d'étudier l'espérance.

Autres variantes : modulo 4 en gardant les couleurs, modulo 10 en ne gardant que les hauteurs des cartes et en enlevant les figures. On pourrait donner le droit aux joueurs de poser une question (et une seule) de façon à pouvoir tous gagner.

7 Situations autour du thème de la justice et du hasard

7.1 Intérêts

Une fois encore la situation est omniprésente, par exemple les situations de partage dans un contrat de mariage. Les notions de partage équitable (juste) apparaissent très tôt à l'école et ailleurs et elles confrontent les individus à la maîtrise du hasard, ou tout au moins à sa compréhension. L'enjeu est d'accepter le hasard, d'être bien en sa présence et de ne pas toujours chercher des recettes pour le réduire à des causes purement déterministes.

C'est un enjeu majeur car les probabilités et leur langage ne sont pas perçues simplement. La plupart de nos concitoyens en ont des idées fausses, qu'ils soient politiques, banquiers, assureurs ou même scientifiques (et parfois même mathématiciens ...).

7.2 Débat sur un problème de cour d'école

Les enfants jouent souvent aux billes dans la cour. On va supposer qu'à chaque fois chacun peut gagner la bille de son adversaire ou perdre la sienne, et ce une fois sur deux.

Un enfant n'ayant presque plus de billes va voir son copain et lui propose de s'associer en lui donnant ses billes. Au bout d'un certain temps, ils stoppent leur association pour partir en vacances. Question : comment répartissent-ils les gains ou les pertes ?

C'est la question que posent aussi les contrats de mariage.

Plusieurs réponses naturelles : partager les gains ou les pertes à parts égales ; ou au prorata de ce que chacun a amené.

Une classe d'handicapés à qui je posais la question m'a instantanément répondu que le partage se faisait à parts égales mais sur l'ensemble des billes, pas sur les gains. La justification était sans appel : *c'est ça une association !*

En fait il n'y a pas de réponse meilleure qu'une autre et, mieux, le point de vue de chaque individu évolue au cours de sa vie. On touche ici à la polysémie des mathématiques. Tous les calculs que l'ont peut faire dans cette situation sont exacts, et fournissent une unique réponse, mais leur sens est variable. Ils sont plus ou moins acceptables, socialement. Le chemin que prend le mathématicien est bien balisé, mais l'endroit où il le conduit n'est pas déterminé à l'avance. Deux voyageurs prenant le même chemin ne découvriront pas le même paysage au bout de ce chemin.

Si l'on veut, une réponse de mathématicien consiste à poser le problème en termes de ruine du joueur. La question est donc plutôt quand est-ce que l'apport de quelques billes est crucial et quand est-ce qu'il est sans intérêt. La réponse dépend de l'adversaire. L'apport est crucial face à un adversaire ayant le même nombre de billes. Et, aussi étonant que ça puisse paraître les contrats de mariage ne font pas référence aux tierces parties.

7.3 Une marelle gaussienne

On trace au sol une marelle spéciale, une sorte de triangle rempli de triangles (un morceau de réseau triangulaire). Le jeu est le suivant : on part d'un sommet (disons celui du haut) et on doit aller à un point précis de la base (qui est en bas). Pour cela on tire à pile ou face si on prend une arête ou l'autre (vers le bas et soit à gauche, soit à droite).

Bien sûr faire droite/gauche ou gauche/droite amène au même point.

Pour que ce soit jouable on donne 2 ou 3 jokers à chacun. Ce joker permet de forcer le sort en modifiant le jeté de pile ou face.

Si le jeu est individuel, ceux qui ont pour but d'aller sur une des extrémités de la base auront des ennuis. Il leur faut en effet toujours tirer pile ou toujours tirer face. Ceux qui doivent aller au centre devraient y arriver assez facilement.

Le jeu devient intéressant quand il s'agit d'un partage de ressources. Avec disons 5 points d'arrivée possibles, on forme des groupes de 5 et on leur donne 10 jokers. Par ailleurs chacun des 5 doit aller sur un point d'arrivée différent. La question est de savoir comment répartir les richesses (jokers).

Bien sûr le partage uniforme peut paraître équitable, mais mathématiquement on voit vite qu'il n'est pas juste. Cette situation amène à des questionnements sur le hasard, sur le partage des richesses et la justice au milieu de tout ça.

7.4 Dernier exemple

On part des preuves par ADN et du débat de société autour de cela. Avant de commencer une analyse mathématique, on peut évoquer les questions de hasard, de risque dans la société et en particulier en biologie.

Le test ADN utilisé par la police scientifique s'opère sur la partie non codante de l'ADN en raison de sa plus grande biodiversité, et aussi pour des questions éthiques. On veut pouvoir ficher des criminels sans pour autant faire des statistiques sur leur race ou leur origine géographique par exemple. C'est une question de fond, et ce débat éthique est loin d'être clos.

En France, on a des tests opérés sur 13 sites de l'ADN, chacun ayant une probabilité au pire 1/5 d'être identique à un même site issu de l'ADN d'un autre individu. La puissance de ce test est donc environ $1/5^{13}$. C'est un bon exercice de chercher à donner une valeur approchée de tête de cette quantité.

Quoiqu'il en soit la question posée par les mathématiciens est de savoir si le fait d'avoir un grand fichier d'empreintes génétiques ne peut pas conduire à des problèmes amenant peut-être à des erreurs judiciaires. En d'autres termes, si deux éléments d'un fichier ont en gros une chance sur un million d'être identiques, quand est-ce que le fichier contient des doublons . . . à coup sûr, à 99%, à 95%, à 50% ?

C'est le célèbre paradoxe des anniversaires. La réponse est que pour 50%, la taille est en gros en $\sqrt{n}$, soit ici 1000.

On peut évidemment mettre en place le paradoxe des anniversaires dans la classe ou, sur une place un peu fréquentée lors de la fête de la science par exemple, chercher deux personnes nées le même jour à la même heure.

Le paradoxe est subtil car il y a un renversement de certitudes, tout en gardant des incertitudes fortes. On est sûr de trouver un doublon, mais on ne peut pas dire où. Autre point qui frappe les esprits : un test ADN positif indique une probabilité que les deux individus (suspect et criminel) soient une seule et même personne, alors qu'un test négatif indique une **certitude** qu'ils sont distincts.

8 Conclusion

Il reste cependant une question ouverte sur laquelle je n'ai pas beaucoup de lumières à apporter et c'est la suivante

Comment amener les mathématiciens à attirer les élèves vers les mathématiques ?