Au-delà du réel

Modélisation et prédiction

François Sauvageot
Chargé de mission au CNRS
Communication en mathématiques

11e rencontre Physique et Interrogations Fondamentales
Bibliothèque Nationale de France
10 décembre 2008

Modèle

Diderot-d'Alembert

Tout ce que l'on regarde comme original et dont on se propose d'exécuter la copie.

Physique

Modèle mécanique, par exemple pour l'étude de l'électro-magnétisme.

Mathématique - Architecture

Construction en bois, carton ou plâtre afin d'illustrer un objet abstrait.

Modélisation

Modélisation mathématique

- Substituer une analogie mathématique à l’analogie mécanique dans la construction des modèles.
- Aller-retours entre expérience et modèle.
- Y a-t-il plusieurs modélisations possibles et légitimes ?

Le rapport au réel

Statut de la modélisation : rapport au réel

- Quelque soit le rapport des mathématiques au réel, la croyance en ce rapport joue un grand rôle
- La *déraisonnable efficacité des mathématiques* : un modèle peut-il être explicatif et pourquoi peut-on prédire sans expliquer ?
- La modélisation est-elle une modalité de la science ou doit-on les distinguer nettement, à supposer que ce soit effectivement possible ?

Expérimentation et polysémie

Appel à une rationalité externe

- L'unique façon de critiquer une modélisation est d'en construire une autre fondée sur d'autres principes.
- Appel à la rationalité externe, à la socio-diversité des points de vues et des lectures du monde.
- Langage hybride et multiplicité des modèles.
- Outils sortant du cadre rationnel ou réel : irrationnels, imaginaires, quaternions, octonions . . . géométrie non-commutative.

Monde mental, monde platonicien, monde physique

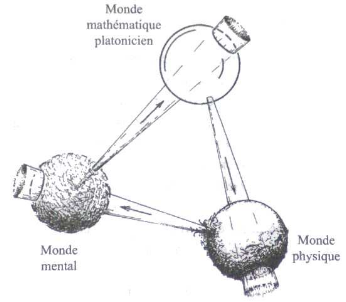
Le réel est-il rationnel ? rationnellement intelligible ?

Le monde mental est celui qui nous apparait à travers nos perceptions mentales, et il permet d'appréhender le monde platonicien, qui lui même décrit le monde physique, dont nos perceptions mentales font partie.

Monde mental, monde platonicien, monde physique

Le réel est-il rationnel ? rationnellement intelligible ?

Le monde mental est celui qui nous apparait à travers nos perceptions mentales, et il permet d'appréhender le monde platonicien, qui lui même décrit le monde physique, dont nos perceptions mentales font partie.



Monde mental, monde platonicien, monde physique

Le réel est-il rationnel ? rationnellement intelligible ?

Le monde mental est celui qui nous apparait à travers nos perceptions mentales, et il permet d'appréhender le monde platonicien, qui lui même décrit le monde physique, dont nos perceptions mentales font partie.

Unicité ?

- Le monde mental est-il commun à l'ensemble de l'humanité, unique. Le regard des mathématicien-ne-s est-il unique ?.

Monde mental, monde platonicien, monde physique

Le réel est-il rationnel ? rationnellement intelligible ?

Le monde mental est celui qui nous apparait à travers nos perceptions mentales, et il permet d'appréhender le monde platonicien, qui lui même décrit le monde physique, dont nos perceptions mentales font partie.

Unicité ?

- Le monde mental est-il commun à l'ensemble de l'humanité, unique. Le regard des mathématicien-ne-s est-il unique ?.
- La relation du monde platonicien au monde réel pourrait bien être multiple, dans un langage hybride, celui des mathématiques que Nicolas Bouleau qualifie de mixtes.

Monde mental, monde platonicien, monde physique

Le réel est-il rationnel ? rationnellement intelligible ?

Le monde mental est celui qui nous apparait à travers nos perceptions mentales, et il permet d'appréhender le monde platonicien, qui lui même décrit le monde physique, dont nos perceptions mentales font partie.

Unicité ?

- Le monde mental est-il commun à l'ensemble de l'humanité, unique. Le regard des mathématicien-ne-s est-il unique ?.
- La relation du monde platonicien au monde réel pourrait bien être multiple, dans un langage hybride, celui des mathématiques que Nicolas Bouleau qualifie de mixtes.
- Les nombres réels ne sont pas tous rationnels . . .

Monde mental, monde platonicien, monde physique

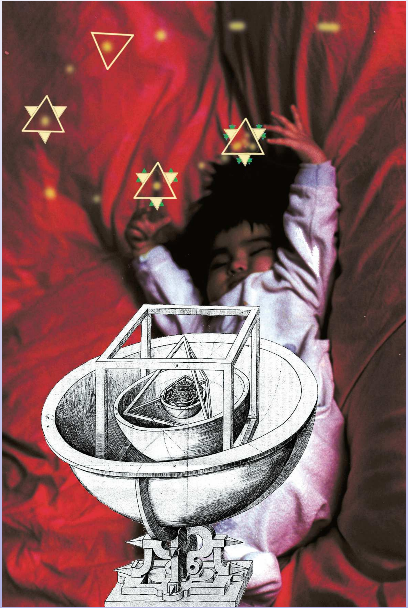
Le réel est-il rationnel ? rationnellement intelligible ?

Le monde mental est celui qui nous apparait à travers nos perceptions mentales, et il permet d'appréhender le monde platonicien, qui lui même décrit le monde physique, dont nos perceptions mentales font partie.

Unicité ?

- Le monde mental est-il commun à l'ensemble de l'humanité, unique. Le regard des mathématicien-ne-s est-il unique ?.
- La relation du monde platonicien au monde réel pourrait bien être multiple, dans un langage hybride, celui des mathématiques que Nicolas Bouleau qualifie de mixtes.
- Les nombres réels ne sont pas tous rationnels . . .
- Les yeux de la muse Uranie comme moteur de la recherche.

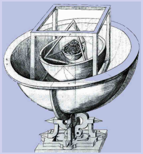
Le mystère du monde



Le mystère du monde

Mysterium Cosmographicum - Johannes Kepler

- Les formes mathématiques sont la texture même du monde.
- Réimpression du Mysterium Cosmographicum après avoir achevé l'œuvre qui l'a fait entrer dans l'histoire à travers ses trois lois (1610).
- Il sait que son œuvre de jeunesse ne décrit pas la réalité, mais elle contient toutes les idées qui l'ont poussé à consacrer sa vie à ce travail gigantesque : le soleil au centre du monde, cause physique du mouvement des planètes, le sens des rapports des grandeurs astronomiques et la musique des sphères.



La paix de l'âme

Albert Einstein - Discours en l'honneur de Max Planck

L'homme essaie de construire pour lui-même, de la manière qui lui convient le mieux, une image simplifiée et intelligible de l'univers. Il essaie alors dans une certaine mesure de substituer son propre cosmos au monde de l'expérience et aussi de le dominer. Ce but est celui que poursuivent le peintre, le poète, le philosophe dans ses spéculations et l'homme de science, chacun à la manière qui lui est propre. Il fait de ce cosmos et de sa construction le pivot de sa vie sentimentale, afin de trouver de cette façon, la paix et la sécurité qu'il ne peut atteindre dans le tourbillon rétréci de l'expérience personnelle.

The wild blue

Richard Feynman - Remise du prix Nobel (1965)

Take a risk with your lives that you will not be heard of again, and go off in the wild blue yonder to see if you can figure it out.

The wild blue

Richard Feynman - Remise du prix Nobel (1965)

Prenez un risque avec votre vie, celui qu'on ne parle plus jamais de vous, et partez là-bas dans le bleu sauvage pour voir si vous pouvez le comprendre.

The wild blue

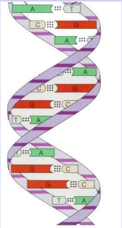
- S'exposer à l'échec, à l'erreur, à l'expérience qui ne mène à rien, s'exposer à être vaincu dans une controverse.
- Condition nécessaire de la créativité et des idées neuves.

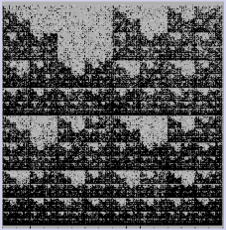
Des ponts entre les champs . . .

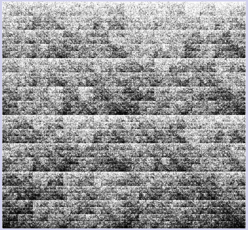
- Biologie
- Chimie
- Danse
- Économie
- Géographie
- Jonglerie
- Marchés financiers.
- Physique

L'Alphabet De la Nature

Cryptographie



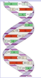


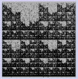


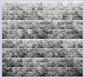
Méthode probabilistes, jeu du chaos

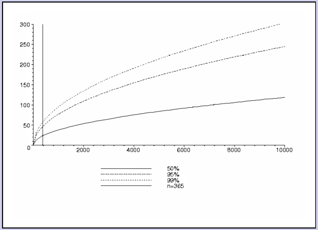
L'Alphabet De la Nature

Tests ADN



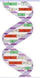
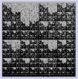
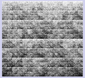
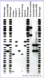
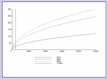
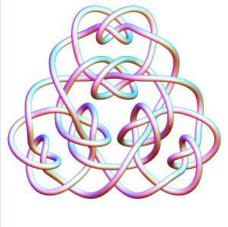






- Répétitions (erreurs non léthales de réplication) à grande variabilité : empreinte génétique, et non **identification**.
- Grands fichiers d'empreintes génétiques et paradoxe des anniversaires : un appel à la vigilance.

Bouts de ficelle

Théorie des nœuds pour comprendre l'action des enzymes.

Partage des richesses

Comment partager ? équirépartition, pro-rata . . . ?

- Postulat de rationnalité des êtres humains.

Partage des richesses

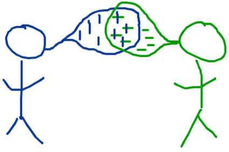
Comment partager ? équirépartition, pro-rata . . . ?

- Postulat de rationnalité des êtres humains.
- Paradoxes et dilemmes opposant intérêt collectif et intérêt individuel.

Partage des richesses

Comment partager ? équirépartition, pro-rata . . . ?

- Postulat de rationnalité des êtres humains.
- Paradoxes et dilemmes opposant intérêt collectif et intérêt individuel.
- Y a-t-il plusieurs modélisations possibles et légitimes ?



Plaidoyer pour une pratique de la modélisation dans l'enseignement

Pratiques actuelles

- Problèmes ouverts en groupe classe (rallye, narration de recherche)
- Petits groupes au sein d'une classe (hippocampe)
- Petits groupes sur la base du volontariat (Math.en.Jeans, clubs).

Plaidoyer pour une pratique de la modélisation dans l'enseignement

Pratiques actuelles

- Problèmes ouverts en groupe classe (rallye, narration de recherche)
- Petits groupes au sein d'une classe (hippocampe)
- Petits groupes sur la base du volontariat (Math.en.Jeans, clubs).

Construction du sens

Expérimenter la recherche et la modélisation pour l'ancrer dans le vécu, afin d'en construire le sens.

Modélisation en société

Nature et rôle de la modélisation dans la société

- Vu l'impact social de la modélisation, il est naturel de s'interroger sur sa nature.

Modélisation en société

Nature et rôle de la modélisation dans la société

- Vu l'impact social de la modélisation, il est naturel de s'interroger sur sa nature.
- Éclairer les ignorant-e-s ou se limiter à plaider une cause particulière ?
- Faut-il apprendre les mots des mathématicien-ne-s avant de pouvoir partager leur savoir ?

Modélisation en société

Modalités de la modélisation

- Langage technique : avancée de la connaissance, normalisation de la communication et accroissement de l’incommunicabilité.

Modélisation en société

Modalités de la modélisation

- Langage technique : avancée de la connaissance, normalisation de la communication et accroissement de l'incommunicabilité.
- Pour modéliser, il faut communiquer et savoir emprunter des ponts invisibles à l'armature mathématique : des analogies, explicatives ou non. Leurs pièges et fausses routes sont à la fois à l'origine de leur puissance créatrice et de leurs erreurs.

Modélisation en société

Modalités de la modélisation

- Langage technique : avancée de la connaissance, normalisation de la communication et accroissement de l'incommunicabilité.
- Pour modéliser, il faut communiquer et savoir emprunter des ponts invisibles à l'armature mathématique : des analogies, explicatives ou non. Leurs pièges et fausses routes sont à la fois à l'origine de leur puissance créatrice et de leurs erreurs.
- Pas de réponse opérationnelle ni unique. La modélisation s'inscrit dans un site social, en utilisant un langage hybride.

Pertinence d'un modèle

Rigueur et pertinence

La pertinence d'un modèle ne vient pas des calculs qui y sont menés. Si la logique et le calcul algébrique sont l'hygiène du modèle mathématique, là ne réside pas sa pertinence.

Pertinence d'un modèle

Rigueur et pertinence

La pertinence d'un modèle ne vient pas des calculs qui y sont menés. Si la logique et le calcul algébrique sont l'hygiène du modèle mathématique, là ne réside pas sa pertinence.

Retour à Johannes Kepler

Kepler est copernicien parce que pour lui la position centrale du Soleil est un pré-requis de son astronomie, de la physique qu'il est en train de créer. Sans cette conviction, acquise et revendiquée dès son adolescence, ses recherches se seraient vite essoufflées.

- Pourquoi Mercure et Vénus accompagnent toujours le Soleil, sans s'en écarter trop, alors qu'elles reviennent dans une même position en moins d'un an ?
- Pourquoi ces mêmes planètes inférieures n'entrent-elles jamais en opposition avec le Soleil alors que les autres oui ?

Modèles contradictoires, non explicatifs, multiples

Exemples et problèmes

- Modèles quantiques et relativistes : visions du monde différentes, d'explications divergentes sur la nature du monde.

Modèles contradictoires, non explicatifs, multiples

Exemples et problèmes

- Modèles quantiques et relativistes : visions du monde différentes, d'explications divergentes sur la nature du monde.
- Utilité des modèles prédictifs non fondés sur une explication.

Modèles contradictoires, non explicatifs, multiples

Exemples et problèmes

- Modèles quantiques et relativistes : visions du monde différentes, d'explications divergentes sur la nature du monde.
- Utilité des modèles prédictifs non fondés sur une explication.
- Crues : hauteurs d'eau et débit peuvent s'adapter à une loi gaussienne, mais pas simultanément.

Modèles contradictoires, non explicatifs, multiples

Exemples et problèmes

- Modèles quantiques et relativistes : visions du monde différentes, d'explications divergentes sur la nature du monde.
- Utilité des modèles prédictifs non fondés sur une explication.
- Crues : hauteurs d'eau et débit peuvent s'adapter à une loi gaussienne, mais pas simultanément.
- Trafic routier : microscopique, algorithmique, particulaire, macrosopique.

Modèles contradictoires, non explicatifs, multiples

Exemples et problèmes

- Modèles quantiques et relativistes : visions du monde différentes, d'explications divergentes sur la nature du monde.
- Utilité des modèles prédictifs non fondés sur une explication.
- Crues : hauteurs d'eau et débit peuvent s'adapter à une loi gaussienne, mais pas simultanément.
- Trafic routier : microscopique, algorithmique, particulaire, macrosopique.
- Peser le pour et le contre : paradoxe de Condorcet.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Modèles contradictoires, non explicatifs, multiples

Exemples et problèmes

- Modèles quantiques et relativistes : visions du monde différentes, d'explications divergentes sur la nature du monde.
- Utilité des modèles prédictifs non fondés sur une explication.
- Crues : hauteurs d'eau et débit peuvent s'adapter à une loi gaussienne, mais pas simultanément.
- Trafic routier : microscopique, algorithmique, particulaire, macrosopique.
- Peser le pour et le contre : paradoxe de Condorcet.

Nicolas Bouleau (1999)

Les mathématiques mixtes abondent de situations où les théories sont sous-déterminées par les faits. Le modèle mathématique s'ajuste aux besoins de l'ingénieur-e.

Les théories poppériennes sont l'exception

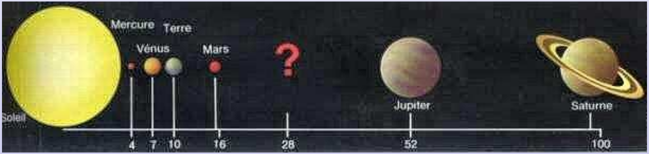
Théories poppériennes

Construire une théorie réfutable par l'expérience est une exigence extrême.

Les théories poppériennes sont l'exception

Théories poppériennes

Construire une théorie réfutable par l'expérience est une exigence extrême.



Loi de Titius-Bode

- Chaque nouvelle théorie de formation du système solaire fut jadis testée à l'aune de la loi de Titius-Bode.
- (Bérengère Dubrulle et François Graner) La loi résulte de propriétés de symétrie et d'isotropie à la naissance du système solaire, propriété commune à toutes les théories raisonnables !

Limites de l'intelligibilité des résultats

Génôme humain (2005)

- La quantité de données est telle que les scientifiques sont bien loin de l'avoir décrypté.
- Environ 1 giga-octet pour stocker l'information contenue dans une cellule humaine.
- Nécessité d'avoir des modes d'analyse et de visualisation spécifiques.

Limites de l’intelligibilité des résultats

Génôme humain (2005)

- La quantité de données est telle que les scientifiques sont bien loin de l’avoir décrypté.
- Environ 1 giga-octet pour stocker l’information contenue dans une cellule humaine.
- Nécessité d’avoir des modes d’analyse et de visualisation spécifiques.

En mathématiques - Jean-Louis Krivine

Les mathématicien-ne-s ont pour tâche, à partir d’un programme code, de reconstituer le programme source. C’est un décryptage mais dans un langage à inventer : un décryptage interprétatif et créatif.

Poursuite de la vérité

Appel à une rationalité externe

- Le modélisateur pense son modèle perfectible, amendable, mais à même d'épouser asymptotiquement toute la réalité.
- S'extirper de toutes les hypothèses implicites du modèle est très ardu et n'est pas rendu nécessaire par les procédures de validation.
- Pour critiquer une modélisation, il faut en construire une autre fondée sur d'autres principes. C'est un appel à la rationalité externe, c'est-à-dire à la socio-diversité des points de vues et des lectures du monde.

Poursuite de la vérité

Appel à une rationalité externe

- Le modélisateur pense son modèle perfectible, amendable, mais à même d'épouser asymptotiquement toute la réalité.
- S'extirper de toutes les hypothèses implicites du modèle est très ardu et n'est pas rendu nécessaire par les procédures de validation.
- Pour critiquer une modélisation, il faut en construire une autre fondée sur d'autres principes. C'est un appel à la rationalité externe, c'est-à-dire à la socio-diversité des points de vues et des lectures du monde.

Relativiste ou post-moderne ?

Même si les modèles sont multiples et les mathématiques polysémiques, les opinions, elles, ne sont pas arbitraires. La construction du sens demande du temps, du vécu.

Développement de modélisations concurrentes

Modèles concurrents

- discret, entiers, particules vs. continu, réels, topologie.
- descriptif vs. explicatif.
- quantitatif vs. qualitatif.
- déterminisme vs. probabiliste.
- imaginé, imagé vs. symbolique, symbolisé.

Développement de modélisations concurrentes

Modèles concurrents

- discret, entiers, particules vs. continu, réels, topologie.
- descriptif vs. explicatif.
- quantitatif vs. qualitatif.
- déterminisme vs. probabiliste.
- imaginé, imagé vs. symbolique, symbolisé.

Modèle et réalité

Même si le modèle colle asymptotiquement au réel, rien ne dit qu'il l'approche « de l'intérieur ». Cette rationalité externe fait que la modélisation mathématique peut être vue comme « au-delà du réel ».

Les nombres . . . au-delà du rationnel

Histoire de nombres

- Les nombres irrationnels ont été l'objet d'attentions particulières dès l'antiquité. Leur existence même pose des problèmes, comme leur nom l'indique.
- Les nombres algébriques, obtenus comme racines d'équations polynomiales à coefficients rationnels, ont été l'objet d'études constantes et sont les premiers exemples de nombres réels non rationnels. La construction du corps des nombres réels a, quant à elle, attendu la fin du XIX^{e} siècle.
- Les nombres imaginaires portent un nom chargé d'histoire.
- Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) : quaternions.
- Arthur Cayley (1821-1895) : octaves ou octonions.

Le programme d'Erlangen

Felix Klein (1849-1925)

En 1872, dans un contexte de crise due à l'apparition des géométries non-euclidiennes, Felix Klein décide de fonder la géométrie sur les notions d'action de groupe et d'invariant, la géométrie des espaces homogènes. Le groupe définit la géométrie, donne le langage pour en décrire les objets, mais plusieurs groupes peuvent agir sur le même espace. C'est ainsi que Cartan a étudié la gravitation.

Le programme d'Erlangen

Felix Klein (1849-1925)

En 1872, dans un contexte de crise due à l'apparition des géométries non-euclidiennes, Felix Klein décide de fonder la géométrie sur les notions d'action de groupe et d'invariant, la géométrie des espaces homogènes. Le groupe définit la géométrie, donne le langage pour en décrire les objets, mais plusieurs groupes peuvent agir sur le même espace. C'est ainsi que Cartan a étudié la gravitation.

Jean Piaget (1896-1980)

On ne connaît un objet qu'en agissant sur lui et en le transformant.

Groupes et symétries

Évariste Galois (1810-1831)

Équation $2x^2 + 6x = 8$.

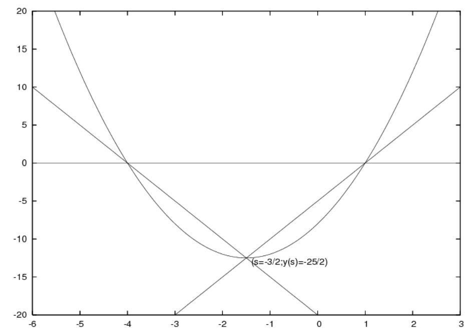
Galois introduit le groupe qui échange les racines α et β de cette équation et les quantités qu'il laisse invariantes.

On écrit $y(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, avec $a = 2$, $b = 6$, $c = 8$.

Groupes et symétries

Évariste Galois (1810-1831)

Équation $2x^2 + 6x = 8$.
Galois introduit le groupe qui échange les racines α et β de cette équation et les quantités qu'il laisse invariantes.
On écrit $y(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, avec $a = 2$, $b = 6$, $c = 8$.



Groupes et symétries - Galois

Géométrie

- $y(x) = 2x^2 + 6x - 8.$
- $y'(x) = 4x + 6 = 0.$
- $s = -3/2, y(s) = -25/2.$

Groupes et symétries - Galois

Géométrie

- $y(x) = 2x^2 + 6x - 8.$
- $y'(x) = 4x + 6 = 0.$
- $s = -3/2, y(s) = -25/2.$

Algèbre

- $\alpha + \beta$ invariant.
- $\alpha + \beta = -b/a = -3.$

Groupes et symétries - Galois

Géométrie

- $y(x) = 2x^2 + 6x - 8.$
- $y'(x) = 4x + 6 = 0.$
- $s = -3/2, y(s) = -25/2.$
- $M = (-3/2; 0)$
- Puissance $AM.BM = -AM^2 = SM/2$

Algèbre

- $\alpha + \beta$ invariant.
- $\alpha + \beta = -b/a = -3.$

Groupes et symétries - Galois

Géométrie

- $y(x) = 2x^2 + 6x - 8.$
- $y'(x) = 4x + 6 = 0.$
- $s = -3/2$, $y(s) = -25/2.$
- $M = (-3/2;0)$
- Puissance $AM.BM = -AM^2 = SM/2$
- $AM = 5/2$, $A = (-4,0)$, $B = (1,0).$

Algèbre

- $\alpha + \beta$ invariant.
- $\alpha + \beta = -b/a = -3.$

Groupes et symétries - Galois

Géométrie

- $y(x) = 2x^2 + 6x - 8.$
- $y'(x) = 4x + 6 = 0.$
- $s = -3/2$, $y(s) = -25/2.$
- $M = (-3/2;0)$
- Puissance $AM.BM = -AM^2 = SM/2$
- $AM = 5/2$, $A = (-4,0)$, $B = (1,0).$

Algèbre

- $\alpha + \beta$ invariant.
- $\alpha + \beta = -b/a = -3.$
- $\alpha - \beta$ non invariant.

Groupes et symétries - Galois

Géométrie

- $y(x) = 2x^2 + 6x - 8$.
- $y'(x) = 4x + 6 = 0$.
- $s = -3/2$, $y(s) = -25/2$.
- $M = (-3/2; 0)$
- Puissance $AM.BM = -AM^2 = SM/2$
- $AM = 5/2$, $A = (-4, 0)$, $B = (1, 0)$.

Algèbre

- $\alpha + \beta$ invariant.
- $\alpha + \beta = -b/a = -3$.
- $\alpha - \beta$ non invariant.
- $(\alpha - \beta)^2$ invariant.
- $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 3^2 + 4.4 = 25$.

Groupes et symétries - Galois

Géométrie

- $y(x) = 2x^2 + 6x - 8.$
- $y'(x) = 4x + 6 = 0.$
- $s = -3/2$, $y(s) = -25/2.$
- $M = (-3/2;0)$
- Puissance $AM.BM = -AM^2 = SM/2$
- $AM = 5/2$, $A = (-4,0)$, $B = (1,0).$

Algèbre

- $\alpha + \beta$ invariant.
- $\alpha + \beta = -b/a = -3.$
- $\alpha - \beta$ non invariant.
- $(\alpha - \beta)^2$ invariant.
- $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 3^2 + 4.4 = 25.$
- $|\alpha - \beta| = 5$ et $\{\alpha, \beta\} = \{-4, 1\}.$

Groupes et symétries - Galois

Géométrie

- $y(x) = 2x^2 + 6x - 8$.
- $y'(x) = 4x + 6 = 0$.
- $s = -3/2$, $y(s) = -25/2$.
- $M = (-3/2; 0)$
- Puissance $AM.BM = -AM^2 = SM/2$
- $AM = 5/2$, $A = (-4, 0)$, $B = (1, 0)$.

Algèbre

- $\alpha + \beta$ invariant.
- $\alpha + \beta = -b/a = -3$.
- $\alpha - \beta$ non invariant.
- $(\alpha - \beta)^2$ invariant.
- $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 3^2 + 4.4 = 25$.
- $|\alpha - \beta| = 5$ et $\{\alpha, \beta\} = \{-4, 1\}$.

Calcul différentiel

- Extremum $y(x) = -a(\alpha - x)(x - \beta)$
- $x = s = (\alpha + \beta)/2$ et $y(s) = -a(\alpha - \beta)^2/4$.

Nombres, géométries et groupes de Lie

Groupes (Sophus Lie, Wilhelm Killing, Élie Cartan 1894) ...

Théorie des symétries continues, notamment des équations différentielles. Les groupes de Lie se ramènent à des groupes dit « simples », tous issus de la géométrie classique à l'exception de cinq groupes exceptionnels.

Nombres, géométries et groupes de Lie

Groupes (Sophus Lie, Wilhelm Killing, Élie Cartan 1894) . . .

Théorie des symétries continues, notamment des équations différentielles. Les groupes de Lie se ramènent à des groupes dit « simples », tous issus de la géométrie classique à l'exception de cinq groupes exceptionnels.

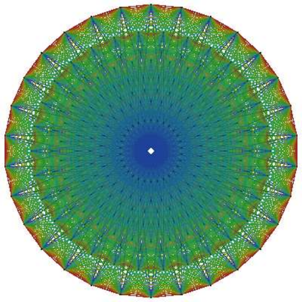
. . . et nombres

- Structure de groupe sur le cercle $\mathbf{S}^1$: nombres complexes.
- Structure de groupe sur la sphère $\mathbf{S}^3$: quaternions.
- Quasi-structure de groupe sur l'hypersphère $\mathbf{S}^7$: octonions et groupes simples exceptionnels, de G_2 (groupe des automorphismes des octonions, de dimension 14) à E_8 (dimension 248) en passant par F_4, E_6 et E_7.
- Interprétations physiques : électricité, spineurs etc.

Nombres, géométries et groupes de Lie

Groupes (Sophus Lie, Wilhelm Killing, Élie Cartan 1894) . . .

Théorie des symétries continues, notamment des équations différentielles. Les groupes de Lie se ramènent à des groupes dit « simples », tous issus de la géométrie classique à l'exception de cinq groupes exceptionnels.



Programme d'Erlangen : sur quoi opèrent ces groupes et comment ?

Théorie de Fourier et combinatoire

L'espace naturel sur lequel agit un groupe est l'ensemble des fonctions sur ce groupe. Sur la droite réelle, cette théorie est celle de Joseph Fourier. Classifier les représentations du groupe, c'est déterminer les blocs élémentaires des représentations induites. In fine la description est de nature combinatoire.

Programme d'Erlangen : sur quoi opèrent ces groupes et comment ?

Théorie de Fourier et combinatoire

L'espace naturel sur lequel agit un groupe est l'ensemble des fonctions sur ce groupe. Sur la droite réelle, cette théorie est celle de Joseph Fourier. Classifier les représentations du groupe, c'est déterminer les blocs élémentaires des représentations induites. In fine la description est de nature combinatoire.

Comment décrire l'infinité des représentations et des éléments du groupe ?

La sphère $\mathbf{S}^3$ est munie d'une structure de groupe. Le cercle $\mathbf{S}^1$ contient un représentant de chaque classe de conjugaison de $\mathbf{S}^3$ et les représentations irréductibles de $\mathbf{S}^3$ sont déterminées par un entier naturel n et le fait que la trace de cette représentation, évaluée en l'élément θ de $\mathbf{S}^1$, vaut $sin(n\theta)/sin(\theta)$.

Et au-delà ?

Lien avec les algèbres

- Algèbres de Clifford et les spineurs : simple connexité.
- Algèbres de Jordan (associée à toute algèbre normée) : théorie quantique.
- Algèbres de Lie exceptionnelles : à partir de deux algèbres normées (carré magique de Freudenthal et Tits).

Et au-delà ?

Lien avec les algèbres

- Algèbres de Clifford et les spineurs : simple connexité.
- Algèbres de Jordan (associée à toute algèbre normée) : théorie quantique.
- Algèbres de Lie exceptionnelles : à partir de deux algèbres normées (carré magique de Freudenthal et Tits).

Nombres p-adiques, adèles, géométrie commutative . . .

- Et que dire des autres façons de sortir du cadre rationnel ? Ou de les regarder toutes à la fois ?
- Pour clore, peut-on dire que l'introduction de la géométrie non-commutative est une sortie définitive du cadre des nombres réels . . . pour mieux rendre compte du réel ?


TARD LE SOIR, "RONALD LE CANARD" TRAÎNAIT DANS LES JAZZ-BARS DE LA RIVE GAUCHE...
TU COMPRENDS, CETTE FORMULE D'UNIFICATION DE LA PHYSIQUE QUANTIQUE ET DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE, JE LA TENAIS PRESQUE !!!
ET PUIS ILS ONT DÉCOUVERT QUE J'ÉTAIS UN CANARD, ET ILS M'ONT COUPÉ LES CRÉDITS !
- VODKA
- GIN
- ÉCUREUIL PRESSÉ