

Représentation de Steinberg et identités de projecteurs

François Sauvageot

Institut de mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 5, France

Reçu le 19 avril 2002, accepté après révision le 1^{er} août 2002

Note présentée par Jean-Pierre Serre.

Résumé. Nous démontrons l’analogie dans l’anneau de Green d’un résultat de Bhama Srinivasan sur le caractère de Steinberg. L’identité obtenue a pour conséquence des isogénies entre produits de jacobiniennes de quotients de courbes projectives, lisses et géométriquement connexes.
© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Steinberg representation and idempotent relations

Abstract. *We prove an analogue in the Green ring of a result obtained by Bhama Srinivasan on the Steinberg character. This implies isogenies between products of jacobians of quotients of projective, smooth and geometrically connected curves.*
© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Un théorème de Srinivasan

Soient G un groupe algébrique réductif connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, F une application de Frobenius sur G et T_0 un tore maximal F -stable quasi-déployé de G .

On note $r(G)$ le F -rang de G , St_{G^F} la représentation de Steinberg de G^F , $W = W(T_0)$ le groupe de Weyl de T_0 dans G , \mathcal{T} l’ensemble des tores maximaux F -stables de G , $[\mathcal{T}/G^F]$ un ensemble de représentants de classes de conjugaison de \mathcal{T} sous G^F et $R_{\mathbb{C}}(G^F)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie semi-simple des G^F -modules complexes.

On pose $\varepsilon_G = (-1)^{r(G)}$. Dans [12, section 5], Bhama Srinivasan introduit explicitement des familles de caractères $(\psi_{T^F})_{T \in \mathcal{T}}$ des normalisateurs $N_G(T)^F$, triviaux sur T^F . Notons (S) l’hypothèse : p ne divise pas $|W|$ et G est un groupe de Chevalley (ou une forme tordue) de type A_n, B_n, C_n, D_n, F_4 ou G_2 ou encore un groupe de Suzuki ou un groupe de Ree.

Théorème 1.1 (Srinivasan [12]) *Dans $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} R_{\mathbb{C}}(G^F)$, on a*

$$St_{G^F} = \sum_{T \in [\mathcal{T}/G^F]} \frac{\varepsilon_G \varepsilon_T}{|W(T)^F|} \text{Ind}_{T^F}^{G^F} 1_{T^F} = \frac{1}{|G^F|} \sum_{T \in \mathcal{T}} \varepsilon_G \varepsilon_T |T^F| \text{Ind}_{T^F}^{G^F} 1_{T^F}.$$

Si on se place dans l’hypothèse (S), alors on a de plus

$$St_{G^F} = \sum_{T \in [\mathcal{T}/G^F]} \varepsilon_G \varepsilon_T \text{Ind}_{N_G(T)^F}^{G^F} \psi_{T^F} = \frac{1}{|G^F|} \sum_{T \in \mathcal{T}} \varepsilon_G \varepsilon_T |N_G(T)^F| \text{Ind}_{N_G(T)^F}^{G^F} \psi_{T^F}.$$

Adresse e-mail :sauvageo@math.jussieu.fr (F. Sauvageot)

Remarque 1. – Une démonstration de l’identité pour les tores, utilisant la théorie de Deligne-Lusztig, est donnée par Carter [2, Corollary 7.6.7]. Il serait intéressant de comprendre les caractères introduits par B.Srinivasan dans ce cadre.

À tout sous-groupe H de G^F on fait correspondre le projecteur $e_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$ de l’algèbre de groupe $\mathbf{Q}[G^F]$.

COROLLAIRE 1.2. – *Soit B un sous-groupe de Borel F -stable de G . Si G^F n’a que deux classes de conjugaison de tores maximaux rationnels F -stables représentées par T_0 et T_1 , alors, en tant que $\mathbf{Q}[G^F]$ -modules,*

$$\mathbf{Q}[G^F/T_0^F] \oplus \mathbf{Q}[G^F/G^F] \oplus \mathbf{Q}[G^F/G^F] \simeq \mathbf{Q}[G^F/T_1^F] \oplus \mathbf{Q}[G^F/B^F] \oplus \mathbf{Q}[G^F/B^F].$$

De plus, si p est impair, alors

$$\mathbf{Q}[G^F/B^F] \oplus \mathbf{Q}[G^F/N_G(T_1)^F] \simeq \mathbf{Q}[G^F/G^F] \oplus \mathbf{Q}[G^F/N_G(T_0)^F].$$

En particulier, si G^F est le groupe $GL(2)$ ou le groupe $PGL(2)$ sur un corps fini et si $B^F \supset T_0^F$, les projecteurs de $\mathbf{Q}[G^F]$, $e_{T_0^F} - e_{B^F}$ et $e_{T_1^F} + e_{B^F} - 2e_{G^F}$ sont conjugués. Si p est impair il en est de même pour les projecteurs $e_{N_G(T_0)^F}$ et $e_{N_G(T_1)^F} + e_{B^F} - e_{G^F}$.

Démonstration. – Sous les hypothèses du corollaire, le groupe de Weyl de T_0 est de cardinal 2 et la première assertion en résulte. Pour la seconde assertion, on déduit de $T_0^F \subset B^F$ et de $T_1^F B^F = G^F$, qu’on a affaire à des projecteurs de $\mathbf{Q}[G^F]$. La première assertion montre qu’ils ont même caractère et ils sont donc conjugués. \square

Remarque 2. – Imin Chen et Bas Edixhoven ont donné d’autres démonstrations de ce résultat pour le groupe $GL(2)$ [3, 4, 8]. La propriété $T_1^F B^F = G^F$ est particulière au groupe $GL(2)$. Les identités précédentes entraînent [9, 7] l’existence d’isogénies entre produits de jacobiniennes de quotients de courbes projectives, lisses et géométriquement connexes.

2. Extension à l’anneau de Green.

On peut démontrer le théorème précédent en utilisant la notion d’invariant de Steinberg en p , noté $St_p(G^F)$, définie pour un groupe fini quelconque [1, section 4.3] et utiliser le théorème d’induction d’Artin [11, Théorèmes 17 et 26]. Cette démonstration a l’avantage de se propager à l’anneau de Green. Une relation dans l’anneau de Green permet de déduire des isogénies de degré premier à ℓ [7].

Soit \mathcal{O} un anneau commutatif local noethérien complet de caractéristique résiduelle ℓ première à $|G^F|_p$, et $A_{\mathcal{O}}(G^F)$ l’anneau de Green de G^F sur \mathcal{O} , i.e. le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathcal{O}G^F$ -réseaux, pour les relations données par les décompositions en sommes directes. On note $s_p(G^F)$ l’ensemble des p -sous-groupes de G^F , $B(G^F)$ l’anneau de Burnside de G^F , $\tilde{\chi}$ l’invariant de Lefschetz et, pour H un sous-groupe de G^F , $s_p(G^F)^H$ l’ensemble des éléments de $s_p(G^F)$ invariants sous H et $e_H^{G^F}$ l’idempotent de $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} B(G^F)$ associé au G^F -ensemble G^F/H . On renvoie le lecteur à [1] pour les définitions précises de ces objets.

THÉORÈME 2.1. – *L’image de $St_p(G^F)$ dans $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} A_{\mathcal{O}}(G^F)$ est*

$$\frac{1}{|G^F|} \sum_{T \in \mathcal{T}} \varepsilon_G \varepsilon_T |T^F| \text{Ind}_{T^F}^{G^F} 1_{T^F}.$$

Démonstration. – Si X est un G^F -ensemble, par construction des idempotents $e_H^{G^F}$, on a l'identité

$$X = \sum_{H \subset G^F} \frac{|N_{G^F}(H)|}{|G^F|} |X^H| e_H^{G^F}$$

dans $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} B(G^F)$. Par conséquent, par définition de $St_p(G^F)$ et de l'invariant de Lefschetz, on a, toujours dans $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} B(G^F)$,

$$St_p(G^F) = \sum_{H \subset G^F} \frac{|N_{G^F}(H)|}{|G^F|} \tilde{\chi}(s_p(G^F)^H) e_H^{G^F} .$$

D'après [1, Lemma 4.3.7], pour tout p -sous-groupe non trivial P de G^F , $St_p(G^F)^P = 0$. Il en résulte que $\tilde{\chi}(s_p(G^F)^H)$ est nul pour tout sous-groupe H de G^F admettant un p -sous-groupe normal non trivial.

D'après le théorème d'induction de Conlon [1, Theorem 3.5.5], l'image de $e_H^{G^F}$ dans $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} A_{\mathcal{O}}(G^F)$ est nulle sauf si H est cyclique mod ℓ , i.e. sauf si le quotient de H par son plus grand ℓ -sous-groupe normal est cyclique.

Par conséquent, vu l'hypothèse faite sur ℓ , l'image de $St_p(G^F)$ dans $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} A_{\mathcal{O}}(G^F)$ est celle de

$$\sum_{H \subset G^F \mid H \text{ } p'\text{-cyclique}} \frac{|N_{G^F}(H)|}{|G^F|} \tilde{\chi}(s_p(G^F)^H) e_H^{G^F}$$

ou encore, par un théorème de Gluck [1, Theorem 3.3.2],

$$\sum_{K \subset H \subset G^F \mid H \text{ } p'\text{-cyclique}} \frac{|K|}{|G^F|} \mu(H/K) \tilde{\chi}(s_p(G^F)^H) \text{Ind}_K^{G^F} 1_K$$

où μ est la fonction de Möbius.

Par ailleurs, si T est un tore maximal F -stable de G , le même raisonnement conduit à l'égalité, dans $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} A_{\mathcal{O}}(T^F)$,

$$1_{T^F} = \frac{1}{|T^F|} \sum_{K \subset H \subset T^F \mid H \text{ cyclique}} \mu(H/K) |K| \text{Ind}_K^{T^F} 1_K .$$

Si maintenant H est un p' -sous-groupe cyclique de G^F , d'après [10, Corollary 1.12], on a

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T} \mid T \supset H} \varepsilon_G \varepsilon_T &= \sum_{T \in \mathcal{T} \mid T \subset C_{G^F}(H)^0} \varepsilon_G \varepsilon_T = \varepsilon_G \varepsilon_{C_{G^F}(H)^0} |C_{G^F}(H)^0|_p \\ &= \varepsilon_G \varepsilon_{C_{G^F}(H)^0} \tilde{\chi}(s_p(C_{G^F}(H)^0)) = \tilde{\chi}(s_p(G^F)^H) \end{aligned}$$

où $C_{G^F}(H)^0$ désigne la composante connexe de l'identité du centralisateur de H dans G^F . \square

Remarque 3. – En utilisant le théorème d'induction d'Artin au lieu du théorème d'induction de Conlon dans la démonstration précédente, on retrouve le résultat de B. Srinivasan.

Remarque 4. – On obtient un isomorphisme de $\mathcal{O}G^F$ -réseaux en regroupant les termes affectés d'un même signe dans l'identité :

$$|G^F| St_p(G^F) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \varepsilon_G \varepsilon_T |T^F| \text{Ind}_{T^F}^{G^F} 1_{T^F} .$$

Par ailleurs, on peut remplacer \mathcal{O} par $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ pour ℓ premier à $|G^F|_{p'}$, d'après [6, Proposition 30.17]. Lorsque G est $GL(2)$, ce théorème est l'un des résultats de Bart De Smit et Bas Edixhoven [7]. Dans le cas des groupes $SL(2)$ ou $PSL(2)$, on affine les résultats de Ernst Kani et Michael Rosen [9].

Comme dans le paragraphe 1, on obtient une identité similaire pour les normalisateurs :

THÉORÈME 2.2. – Si on se place dans l’hypothèse (S), l’image de $\text{St}_p(G^F)$ dans $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} A_{\mathcal{O}}(G^F)$ est égale à

$$\sum_{T \in [\mathcal{T}/G^F]} \varepsilon_G \varepsilon_T \text{Ind}_{N_G(T)^F}^{G^F} \psi_{T^F} .$$

Démonstration. – En effet un $\mathcal{O}G^F$ -module induit à partir d’un p' -sous-groupe est projectif. Par conséquent, pour démontrer que les $\mathcal{O}G^F$ -modules

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \varepsilon_G \varepsilon_T |T^F| \text{Ind}_{T^F}^{G^F} 1_{T^F} \quad \text{et} \quad \sum_{T \in \mathcal{T}} \varepsilon_G \varepsilon_T |N_G(T)^F| \text{Ind}_{N_G(T)^F}^{G^F} \psi_{T^F}$$

sont isomorphes, il suffit de les étudier après extension des scalaires au corps des fractions de \mathcal{O} d’après [6, Theorem 32.1]. L’assertion résulte donc du théorème 1.1. \square

Remerciements. Je remercie Antoine Chambert-Loir pour avoir attiré mon intérêt pour ce sujet ainsi que, pour de fructueuses conversations, Serge Bouc, Antoine Chambert-Loir et Jean Michel.

Références bibliographiques

- [1] BOUC S., *Burnside rings*, Handbook of algebra, volume 2, Elsevier, 2000
- [2] CARTER R. W., *Finite groups of Lie type*, Wiley-Interscience, 1985.
- [3] CHEN I., *The jacobian of modular curves associated to Cartan subgroups*, Ph. D thesis, University of Oxford, 1996
- [4] CHEN I., *The jacobian of non-split Cartan modular curves*, Proceedings of the London mathematical society (3) 77, 1998, pages 1-38
- [5] CHEN I., *On relations between jacobians of certain modular curves*, Journal of algebra 231, 2000, n°1, pages 414-448
- [6] CURTIS C. W., REINER I., *Methods of representation theory with applications to finite groups and orders*, Wiley-Interscience, 1981 et 1987.
- [7] DE SMIT B., EDIXHOVEN S. J., *Sur un résultat d’Imin Chen*, Mathematical Research Letters 7, 2000, pages 147-153
- [8] EDIXHOVEN S. J., *On a result of Imin Chen*, Prépublication 96-16 de l’IRMAR, Rennes, mai 1996 (mais voir aussi arXiv alg-geom/9604008)
- [9] KANI E., ROSEN M., *Idempotent relations and factors of jacobians*, Mathematische Annalen, 284, 1989, n°2, pages 307-327
- [10] LEHRER G., *Rational tori, semisimple orbits and the topology of hyperplane complements*, Commentarii Mathematici Helvetici, 67, 1992, n°2, pages 226-251
- [11] SERRE J-P., *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1978.
- [12] SRINIVASAN B., *On the Steinberg character of a finite simple group of Lie type*, Journal of the Australian Mathematical Society, 12, 1971, 1-14