ARTICLE IN PRESS
JID:CRASS1 AID:3240 /FLA [m3SC+; v 1.59; Prn:26/04/2006; 13:40] P.1 (1-4)
Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ●●● (●●●●) ●●●–●●●
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des groupes

Asymptotique des variétés de Shimura

François Sauvageot

Institut de mathématiques de Jussieu, université Paris 7, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 5, France

Reçu le 24 février 2006 ; accepté le 18 avril 2006

Présenté par Hervé Jacquet

Résumé

Soit G un groupe algébrique réductif connexe sur un corps global F de caractéristique nulle. Nous introduisons la notion de famille évanescente de sous-groupes compacts K de G sur les adèles finis et l'utilisons pour calculer asymptotiquement les nombres de Lefschetz et (conjecturalement) le nombre de points des variétés de Shimura (attachées à G et K) sur les corps finis. De cette étude, nous tirons un cadre général donnant naissance à des familles de courbes de Shimura atteignant la borne de Drinfeld–Vlăduţ. ***Pour citer cet article : F. Sauvageot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ●●● (●●●●).***

Abstract

Asymptotics of Shimura varieties. Let G be an algebraic, connected, reductive group over a global field F of characteristic zero. We introduce a notion of ~~the~~ vanishing family of compact subgroups K of G over the finite adeles and use it to compute asymptotically Lefschetz numbers and (at least conjecturally) the number of points of Shimura varieties (attached to G and K) over finite fields. We deduce a general setting giving families of Shimura curves reaching the Drinfeld–Vlăduţ bound. ***To cite this article: F. Sauvageot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ●●● (●●●●).***

1. Introduction

Soit X une courbe définie sur un corps fini $\mathbf{F}_q$, $\mathrm{N}(\mathrm{X}, q)$ son nombre de points sur $\mathbf{F}_q$ et g_X son genre. Vladimir G. Drinfeld et Serge G. Vlăduţ [2] ont démontré

$$A(q) := \limsup_{\mathrm{X}} \frac{\mathrm{N}(\mathrm{X}, q)}{g_\mathrm{X}} \leqslant \sqrt{q} - 1.$$

Cette borne est optimale lorsque q est un carré [5,11].

Nous généralisons une approche de Jean-Pierre Serre [10], mais en évitant le recours à la dualité. Nos calculs reposent sur une formule conjecturale de Kottwitz [7], qui est connue pour les courbes de Shimura [9].

Adresse e-mail : sauvageot@math.jussieu.fr (F. Sauvageot).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.04.012

2. Asymptotique des variétés de Shimura

2.1. *Cadre général*

Soit G un groupe algébrique connexe réductif sur un corps global F de caractéristique nulle et $\mathrm{Z_G}$ son centre. On note **A** les adèles de F, $\mathbf{A}_f$ les adèles finis, $\mathbf{A}_f^{\mathrm{S}}$ les adèles en dehors de l'ensemble fini de places S. On fixe $\underline{\mathrm{K}} = \prod_v \underline{\mathrm{K}}_v$ un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{G}(\mathbf{A})$, hyperspécial en toute place finie où G est non ramifié, et μ_v la mesure de Haar de $\mathrm{G}_v = \mathrm{G}(\mathrm{F}_v)$ qui donne la masse 1 à $\underline{\mathrm{K}}_v$.

2.2. *Famille évanescente de compacts*

Définition 2.1. Une famille dénombrable $\mathcal{K}$ de compacts de $\mathrm{G}(\mathbf{A}_f)$ est dite évanescente si

(1) L'ensemble $\bigcup_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}} \mathrm{K}$ est relativement compact.
(2) Il existe un ensemble fini $\mathrm{Z}_{\mathcal{K}}$ de $\mathrm{G}(\mathbf{A}_f)$ tel que la limite simple de $1_{\mathrm{K}\cap \mathrm{Z_G(F)}}$ soit $1_{\mathrm{Z}_{\mathcal{K}}}$.
(3) Pour tout élément γ de G, rationnel non central, la limite simple de l'intégrale orbitale de 1_{K}, sur l'orbite de γ, est nulle.
(4) Pour tout couple (M,γ) formé d'un sous-groupe de Levi propre de G et d'un élément rationnel de M, la limite simple du terme constant de 1_{K} le long de M est nulle en γ.

Les limites sont prises selon le filtre des complémentaires des parties finies. On dira que la famille est fortement évanescente si, dans (3), on prend γ conjugué en toute place finie à un même élément rationnel non-central, sans l'être nécessairement lui-même.

Soit S un ensemble fini de places de F. On étend ce qui précède aux familles $\mathcal{K}$ de compacts de $\mathrm{G}(\mathbf{A}_f^{\mathrm{S}})$ (resp. de $\mathrm{G(F_S)}$) en demandant que, pour tout compact C de $\mathrm{G(F_S)}$ (resp. de $\mathrm{G}(\mathbf{A}_f^{\mathrm{S}})$), la famille $(\mathrm{K}\times\mathrm{C})_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}$ soit évanescente et que la condition (3) (renforcée ou non) soit vérifiée en remplaçant $\mathrm{G}(\mathbf{A}_f)$ par $\mathrm{G}(\mathbf{A}_f^{\mathrm{S}})$ (resp. $\mathrm{G(F_S)}$). On écrit $\mathrm{Z}_{\mathcal{K},\mathrm{C}}$ pour l'ensemble fini de $\mathrm{Z_G(F)}$ associé à $(\mathrm{K}\times\mathrm{C})_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}$.

2.3. *Asymptotique des nombres de Lefschetz*

L'intérêt de ces notions est d'annuler asymptotiquement la partie géométrique de la formule des traces d'Arthur, ainsi qu'en témoignent les deux propriétés suivantes. On suppose dorénavant que F est le corps **Q** des rationnels et que G contient un tore maximal défini sur **R**, anisotrope modulo $\mathrm{A_G}$ (le tore déployé maximal de $\mathrm{Z_G}$). On note $\chi(\mathrm{G})$ la constante introduite par Arthur dans [1]. Ce premier théorème résulte de [1, Theorem 6.1] et des remarques qui le suivent (voir aussi [3, 7.19]).

Théorème 2.2. *Soit* K_∞ *un sous-groupe d'indice fini de* $\underline{\mathrm{K}}_\infty \mathrm{A_G}(\mathbf{R})^0$, V *une représentation de dimension finie de* G *définie sur* F, ξ_{V} *son caractère central et* χ_{V} *la caractéristique d'Euler–Poincaré pour la cohomologie* L^2 *à valeurs dans le système local défini par* V. *Soit* $\mathcal{K}$ *une famille évanescente de sous-groupes compacts de* $\mathrm{G}(\mathbf{A}_f)$. *Pour* K *dans* $\mathcal{K}$, *on note* $\mathrm{X}(\mathrm{G},\mathrm{K}_\infty\mathrm{K}) = \mathrm{G(F)}\backslash\mathrm{G}(\mathbf{A})/\mathrm{K}_\infty\mathrm{K}$. *Alors*

$$\lim_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}} \mathrm{vol(K)}\,\chi_{\mathrm{V}}\bigl(\mathrm{X}(\mathrm{G},\mathrm{K}_\infty\mathrm{K})\bigr) = \bigl[\underline{\mathrm{K}}_\infty \mathrm{A}^0_{\mathrm{G},\infty} : \mathrm{K}_\infty\bigr]\chi(\mathrm{G})\deg(\mathrm{V})\,\mathrm{Card}(\mathrm{Z}_{\mathcal{K}}),$$

si ξ_{V} *est trivial sur* $\mathrm{Z}_{\mathcal{K}}$, *et sinon la limite est nulle.*

2.4. *Asymptotique du nombre de points sur un corps fini*

On se place maintenant dans le cas où on peut définir une structure de variété de Shimura sur $\mathrm{X}(\mathrm{G},\mathrm{K}_\infty)$ et où l'on peut compter les points de $\mathrm{X}(\mathrm{G},\mathrm{K}_\infty\mathrm{K})$ sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ de caractéristique p (voir les hypothèses dans [7, formula 3.1] et [8, Main conjecture 4.4]). En particulier G_{der} est simplement connexe, le tore **R**-déployé maximal de $\mathrm{Z_G}$ est déployé sur **Q** et G est non ramifié en p. Ce second théorème résulte de [6, Proposition 8.2], de la finitude de $H^1(\mathbf{Q}_p,\mathrm{G})$ et des remarques suivant [1, Theorem 6.1].

Théorème 2.3. *Si la conjecture principale* (4.4) *de Milne est vraie pour* G *et si* $\mathcal{K}$ *est une famille fortement évanescente de sous-groupes compacts de* $\mathrm{G}(\mathbf{A}_f^p)$*, alors le nombre de points de* $\mathrm{X}(\mathrm{G}, \mathrm{K}_\infty \mathrm{K})$ *sur* $\mathbf{F}_q$*, multiplié par le volume de* K*, tend vers*

$$-\chi(\mathrm{G}) \sum_{(\gamma_0;\gamma,\delta)} TO_\delta(1_{\mathrm{Y}_p}),$$

la somme portant sur les triplets de Frobenius effectifs tels que γ_0 *appartienne à* $\mathrm{Z}_{\mathcal{K},\mathrm{C}_p}$*, avec* C_p *l'image de* Y_p *par la norme. Voir* [8] *pour la définition de la double classe* Y_p *et pour l'intégrale orbitale tordue* TO_δ.

3. Exemples

On se place dans le cadre général où F est un corps global de caractéristique nulle et S un ensemble fini de places finies de F.

3.1. Paraboliques essentiels

Définition 3.1. Un sous-groupe parabolique rationnel P de G est dit essentiel s'il existe un tore rationnel maximal T contenu dans un sous-groupe de Levi rationnel M de P tel que l'ensemble des racines de M par rapport à T ne contient aucune composante connexe de l'ensemble des racines de G par rapport à T.

Exemple 1. Un sous-groupe parabolique minimal rationnel est essentiel. De plus lorsque G_{der} est simple, tout sous-groupe parabolique rationnel propre est essentiel.

3.2. Familles évanescentes

Théorème 3.2. *Soit* $\mathcal{K}$ *une famille dénombrable bornée de sous-groupes compacts de* $\mathrm{G}(\mathrm{F}_\mathrm{S})$ *et* A *un sous-ensemble fermé d'un sous-groupe parabolique essentiel de* $\mathrm{G}(\mathrm{F}_\mathrm{S})$*. Si* 1_K *tend vers* 1_A (*pour* K *dans* $\mathcal{K}$)*, alors* $\mathcal{K}$ *est une famille fortement évanescente de sous-groupes compacts de* $\mathrm{G}(\mathrm{F}_\mathrm{S})$.

Ceci résulte du fait qu'un sous-groupe parabolique essentiel intersecte toute orbite non réduite à un point en un ensemble de mesure nulle (car fermé au sens de Zariski).

Théorème 3.3. *Soit* $\mathcal{K}$ *une famille dénombrable bornée de sous-groupes de* $\underline{\mathrm{K}}_f^\mathrm{S}$ *de la forme* $\mathrm{K} = \Pi_v \mathrm{K}_v$ *avec* K_v *sous-groupe parahorique de* $\mathrm{G}(\mathrm{F}_v)$ (*presque partout égal à* $\underline{\mathrm{K}}_v$)*. S'il existe une famille* $(v_\mathrm{K})_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}$ *de places finies de* F *en dehors de* S*, telle que la réduction de* $\mathrm{K}_{v_\mathrm{K}}$ *sur le corps résiduel de* $\mathrm{F}_{v_\mathrm{K}}$ *soit un sous-groupe parabolique essentiel et telle que le cardinal de ce corps résiduel tende vers l'infini* (*pour* K *dans* $\mathcal{K}$)*, alors* $\mathcal{K}$ *est une famille fortement évanescente de sous-groupes compacts de* $\mathrm{G}(\mathbf{A}_f^\mathrm{S})$.

Ceci résulte de la comparaison entre les intégrales orbitales et les termes constants associés aux fonctions caractéristiques d'une part de $\underline{\mathrm{K}}_v$ et d'autre part d'un sous-groupe parahorique « essentiel ». Les quantités dans le second cas sont plus petites que celles du premier cas par un facteur inversement proportionnel au cardinal du corps résiduel.

Exemple 2. Lorsque G est GL_2 sur le corps des rationnels, des exemples sont fournis par les familles de sous-groupes de congruence classiques $\Gamma(n)$, $\Gamma_0(n)$ et $\Gamma_1(n)$ pour n tendant vers l'infini.

4. Application aux courbes de Shimura

Soit E un sous-corps totalement réel de $\mathbf{C}$, de degré m sur $\mathbf{Q}$, p un premier inerte dans E, L une algèbre de quaternions sur E, déployée en $v = p$ et en une unique place réelle et soit G la restriction des scalaires de E à $\mathbf{Q}$ de $\mathrm{GL}_1(\mathrm{L})$. Nous prenons p inerte pour simplifier l'écriture, mais les résultats sont valables en prenant une place divisant p en laquelle L est déployée.

Soit $\mathcal{K}$ famille fortement évanescente de sous-groupes compacts de $\mathrm{G}(\mathbf{A}_f^p)$. Pour K dans $\mathcal{K}$, soit $\chi(\mathrm{G},\mathrm{K})$ la caractéristique d'Euler–Poincaré (pour la cohomologie L^2) de $\mathrm{X}(\mathrm{G},\mathrm{K}_\infty\mathrm{K})$, g_{K} son genre et, pour $q=p^{mr}$, soit $\mathrm{N}(\mathrm{G},\mathrm{K},\mathbf{F}_q)$ et $\overline{\mathrm{N}}(\mathrm{G},\mathrm{K},\mathbf{F}_q)$ les nombres de points sur $\mathbf{F}_q$ de $\mathrm{X}(\mathrm{G},\mathrm{K}_\infty\mathrm{K})$ et de sa complétion.

Dans ce cadre, toutes les hypothèses de 2.3 ne sont pas satisfaites, mais les travaux de H. Reimann [9, Proposition 10.9] permettent de remplacer les intégrales orbitales tordues du Théorème 2.3 par des intégrales orbitales standard sur $\mathrm{G}(\mathrm{F}_v)$. En utilisant la formule donnée par H. Reimann [9, Remark 9.2], on obtient

Lemme 4.1. *Si $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ est un triplet de Frobenius effectif avec γ_0 central, alors $TO_\delta(1_{\mathrm{Y}_p})$ est nul sauf si r est pair et l'image de δ par l'application norme appartient à $p^{r/2}\underline{\mathrm{K}}_p$. Dans ce cas l'intégrale orbitale tordue vaut p^m-1.*

Théorème 4.2. *Si r est pair et s'il existe une unité ε de* E *telle que presque tout* K *dans $\mathcal{K}$ contienne $p^{r/2}\varepsilon$, alors*

$$\lim_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}\frac{\mathrm{N}(\mathrm{G},\mathrm{K},\mathbf{F}_q)}{\chi(\mathrm{G},\mathrm{K})}=\frac{1-p^m}{2}.$$

Sinon cette limite est nulle.

Corollaire 4.3. *Si $r=2$ et s'il existe une unité ε de* E *telle que presque tout* K *dans $\mathcal{K}$ contienne $p\varepsilon$ et* $\mathrm{X}(\mathrm{G},\mathrm{K}_\infty\mathrm{K})$ *est connexe, alors*

$$\lim_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}\frac{\overline{\mathrm{N}}(\mathrm{G},\mathrm{K},\mathbf{F}_q)}{g_{\mathrm{K}}}=\sqrt{q}-1.$$

~~Uncited references~~

~~[4]~~

Remerciements

Je remercie Jean-Pierre Labesse pour avoir attisé mon intérêt pour ce sujet.

Références

[1] J. Arthur, The L^2-Lefschetz numbers of Hecke operators, Invent. Math. 97 (1989) 257–290.
[2] V.G. Drinfeld, S.G. Vlăduţ, Number of points of an algebraic curve, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 17 (1983) 68–69.
[3] M. Goresky, R.E. Kottwitz, R.D. McPherson, Discrete series characters and the Lefschetz formula for Hecke operators, Duke Math. J. 89 (1997) 477–554.
[4] M. Goresky, R.E. Kottwitz, R.D. McPherson, Correction to "Discrete series characters and the Lefschetz formula for Hecke operators", Duke Math. J. 92 (1998) 665–666.
[5] Y. Ihara, Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 28 (1981) 721–724.
[6] R.E. Kottwitz, Stable trace formula: elliptic singular terms, Math. Ann. 275 (1984) 365–399.
[7] R.E. Kottwitz, Shimura varieties and λ-adic representations, in: L. Clozel, J.S. Milne (Eds.), Automorphic Forms, Shimura Varieties and L-Functions, in: Perspectives in Mathematics, vol. I, Academic Press, 1988, pp. 161–209.
[8] J.S. Milne, The points on a Shimura variety modulo a prime of good reduction, in: R.P. Langlands, D. Ramakrishnan (Eds.), The Zeta Functions of Picard Modular Surfaces, Les publications CRM, Montréal, 1992, pp. 151–253.
[9] H. Reimann, The semi-simple zeta function of quaternionic Shimura varieties, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1657, Springer-Verlag, 1997.
[10] J.-P. Serre, Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997) 75–102.
[11] M.A. Tsfasman, S.G. Vlăduţ, T. Zink, Modular curves, Shimura curves and Goppa codes, better than Varshamov–Gilbert bound, Math. Nachr. 109 (1982) 21–28.