Principe de densité pour les groupes réductifs

François Sauvageot
U.F.R. de mathématiques
Université Denis Diderot
2 place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05

à Solène, pour son premier sourire

Sommaire

Introduction

Soient G un groupe localement compact unimodulaire, $\Pi_u(G)$ son dual unitaire, μ^G la mesure de Plancherel de G . Si Γ est un sous-groupe discret de G , co-compact, la représentation régulière droite de G dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ est somme directe dénombrable de représentations unitaires π avec multiplicités finies $m_\Gamma(\pi)$. La mesure associée à la décomposition spectrale de la trace dans la représentation régulière droite de G dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ est :

$$\mu_\Gamma = \text{vol } (\Gamma\backslash G)^{-1} \sum_{\pi\in\Pi_u(G)} m_\Gamma(\pi)\delta_\pi \ .$$

D. De George et N. Wallach ont énoncé une conjecture qu'il est naturel de généraliser :

Principe de Corwin, De George et Wallach. *Nous dirons qu'un groupe localement compact unimodulaire G satisfait au principe de Corwin-De George-Wallach si pour toute famille $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes discrets co-compacts de G telle que :*

1. *pour tout n , Γ_n est normal dans Γ_0 ,*
2. *pour tout n , $\Gamma_n \supset \Gamma_{n+1}$,*
3. *l'intersection des Γ_n est réduite à $\{1\}$,*

et pour tout ouvert U de $\Pi_u(G)$, relativement quasi-compact et dont la frontière est de μ^G-mesure nulle,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\Gamma_n}(U) = \mu^G(U) \ .$$

Ce principe a été établi par L. Corwin (Corwin, 1977) pour les groupes nilpotents connexes et simplement connexes (sans l'hypothèse de normalité (i)) et par P. Delorme (Delorme, 1986) pour les groupes de Lie linéaires semi-simples connexes. Notre preuve repose sur un principe de densité que nous établirons pour les groupes linéaires réductifs connexes sur un corps local de caractéristique zéro.

Soient G un groupe localement compact unimodulaire, μ une mesure borélienne positive sur le dual unitaire $\Pi_u(G)$ de G et $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de convolution de l'algèbre $L^1(G)$ formée de fonctions telles que pour toute représentation unitaire irréductible $\pi \in \Pi_u(G)$ l'opérateur $\pi(\phi)$ soit à trace. La transformée de Fourier scalaire de ϕ est la fonction sur le dual unitaire :

$$\widehat{\phi} \ : \ \pi \mapsto \ \mathrm{tr}\ \pi(\phi) \ .$$

Principe de densité. *Nous dirons que le triplet $(G, \mathcal{H}, \mu)$ satisfait au principe de densité si l'assertion suivante est vérifiée : soit f la fonction caractéristique d'un ouvert U relativement quasi-compact μ-régulier de $\Pi_u(G)$; pour tout ϵ strictement positif, il existe ϕ et ψ dans $\mathcal{H}$ telles que*

$$|f - \widehat{\phi}| \leq \widehat{\psi} \qquad \text{et} \qquad \mu(\widehat{\psi}) \leq \epsilon \ .$$

L'intérêt du principe de densité vient de la proposition suivante (Proposition 1.3) :

Proposition. *Soient G un groupe localement compact unimodulaire, $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke de G et μ^G une mesure de Plancherel sur le dual unitaire de G . Si le triplet $(G, \mathcal{H}, \mu^G)$ satisfait au principe de densité, alors G vérifie le principe de Corwin-De George-Wallach.*

Nous établissons un théorème de densité pour les groupes réductifs sur un corps local de caractéristique zéro et plus généralement pour les produits d'un nombre fini de tels groupes.

Théorème de densité (7.3 (b)). *Considérons un ensemble fini de groupes linéaires algébriques réductifs $\mathbf{G}_i$ définis sur des corps locaux F_i de caractéristiques zéro. Soient $G_i = \mathbf{G}_i(F_i)$ et G le produit de groupes G_i . Soient $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke de G et μ^G la mesure de Plancherel sur le dual unitaire de G , alors $(G, \mathcal{H}, \mu^G)$ vérifie le principe de densité.*

Nous en déduisons le théorème de Delorme généralisé au cas d'un produit de groupes réductifs sur des corps réels ou non-archimédiens ; cela permet en particulier de traiter le cas des tours de sous-groupes S-arithmétiques.

Théorème (1.6). *Soit G comme ci-dessus et soit $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-groupes discrets co-compacts de G vérifiant les hypothèses du principe de Corwin-De George-Wallach. Alors pour tout ouvert U relativement quasi-compact μ^G-régulier, la suite des mesures μ_{Γ_n} est telle que*

$$\mu_{\Gamma_n}(U) \to \mu^G(U) \ .$$

Si les sous-groupes discrets sont seulement supposés de co-volume fini, les choses se compliquent. Par exemple il existe des suites de sous-groupes arithmétiques de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dont le co-volume tend vers l'infini mais pour lesquels la variété quotient est de genre 1 . On peut tout de même espérer que, sous certaines conditions, la mesure associée à la décomposition spectrale de la trace dans le spectre discret de $L^2(\Gamma\backslash G)$ (voire dans le spectre cuspidal si G est réductif) converge vers la mesure de Plancherel lorsque Γ tend vers $\{1\}$. Il n'y a pas encore de résultats complets dans cette direction, néanmoins, sans autre restriction sur Γ , Savin (Savin, 1989) a obtenu la convergence de $\mu_\Gamma(U)$ vers la mesure de Plancherel de U dans le cas où U est réduit à un singleton du spectre discret de G .

Nous avons bon espoir de démontrer un énoncé général en utilisant la formule des traces invariante d'Arthur. Nous avons d'ailleurs déjà obtenu des résultats partiels pour le cas PGL_2 .

1. Principe de Corwin-De George-Wallach

Mesure associée à un sous-groupe discret co-compact. Soit $\widetilde{G}$ un groupe localement compact unimodulaire, notons $\Pi_u(\widetilde{G})$ le dual unitaire de $\widetilde{G}$, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de $\widetilde{G}$, muni de la topologie de Fell (Fell, 1960). Nous fixons une mesure de Haar sur $\widetilde{G}$ et en déduisons une mesure de Plancherel sur $\Pi_u(\widetilde{G})$, notée $\mu^{\widetilde{G}}$. Soit Γ un sous-groupe discret co-compact dans $\widetilde{G}$. La représentation régulière droite ρ_Γ de $\widetilde{G}$ dans $L^2(\Gamma\backslash\widetilde{G})$ est somme directe dénombrable de représentations unitaires $\widetilde{\pi}$ avec multiplicités finies, $m_\Gamma(\widetilde{\pi})$. La mesure

$$\mu_\Gamma = \text{ vol } (\Gamma\backslash\widetilde{G})^{-1} \sum_{\widetilde{\pi}\in\Pi_u(\widetilde{G})} m_\Gamma(\widetilde{\pi})\delta_{\widetilde{\pi}}$$

est, au facteur vol $(\Gamma\backslash\widetilde{G})^{-1}$ près, la mesure associée à la décomposition spectrale de la trace dans la représentation régulière droite de $\widetilde{G}$ dans $L^2(\Gamma\backslash\widetilde{G})$. En effet, soit $f \in C_c^\infty(\widetilde{G})$ une fonction lisse et à support compact sur $\widetilde{G}$, l'opérateur $\rho_\Gamma(f)$ a pour trace

$$\text{tr } (\rho_\Gamma(f)) = \sum_{\widetilde{\pi}\in\Pi_u(\widetilde{G})} m_\Gamma(\widetilde{\pi}) \text{ tr } (\widetilde{\pi}(f))$$

et donc

$$\text{tr } (\rho_\Gamma(f)) = \text{ vol } (\Gamma\backslash\widetilde{G}) \ \mu_\Gamma(\widehat{f})$$

($\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier scalaire de f). La formule des traces de Selberg, qui est simple à prouver et à écrire dans le cas co-compact, donne une expression "géométrique" pour cette trace. Notons $\{\Gamma\}$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans Γ . Nous avons (Godement, 1962; Labesse, 1990)

$$\text{tr } (\rho_\Gamma(f)) = \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} \text{vol } (\Gamma_\gamma\backslash\widetilde{G}_\gamma) \ \Phi_{\widetilde{G}}(\gamma, f)$$

où Γ_γ et $\widetilde{G}_\gamma$ désignent les centralisateurs de γ dans Γ et $\widetilde{G}$ respectivement et $\Phi_{\widetilde{G}}(\gamma, f)$ est l'intégrale orbitale de f sur l'orbite de γ :

$$\Phi_{\widetilde{G}}(\gamma, f) = \int_{\widetilde{G}_\gamma\backslash\widetilde{G}} f(x^{-1}\gamma\, x)\, d\dot{x} \ .$$

Toutes les sommes et intégrales sont absolument convergentes.

Mesure associée à une fonction lisse à support compact. Appliquons ce qui précède à un groupe $\widetilde{G}$ qui est un produit :

$$\widetilde{G} = G \times G' \ .$$

Soit f une fonction sur $G \times G'$ décomposée, i.e. une fonction de la forme $f = \phi \otimes h$.

LEMME 1.1. *Soit h dans $C_c^\infty(G')$ de type positif; alors, pour toute représentation π dans $\Pi_u(G)$, la série*

$$\sum_{\pi' \in \Pi_u(G')} m_\Gamma(\pi \otimes \pi') \widehat{h}(\pi')$$

est convergente. Nous noterons sa somme $m_\Gamma(\pi, h)$.

Proof. Soit π dans $\Pi_u(G)$, il existe ϕ dans $C_c^\infty(G)$ de type positif et dont la transformée de Fourier scalaire ne s'annule par sur π . Nous savons que l'opérateur $\rho_\Gamma(\phi \otimes h)$ est à trace et donc

$$\left(\sum_{\pi' \in \Pi_u(G')} m_\Gamma(\pi \otimes \pi') \widehat{h}(\pi') \right) \widehat{\phi}(\pi) \leq \text{ tr } (\rho_\Gamma(\phi \otimes h)) \leq \infty \ .$$

Sous ces conditions, nous définissons une mesure borélienne positive sur $\Pi_u(G)$ en posant

$$\mu_h = \frac{1}{\text{vol } (\Gamma \backslash \widetilde{G})} \sum_{\pi \in \Pi_u(G)} m_\Gamma(\pi, h) \delta_\pi \ ,$$

où δ_π est la masse de Dirac en π. La mesure μ_h est telle que

$$\mu_h(\widehat{\phi}) = \frac{1}{\text{vol } (\Gamma \backslash \widetilde{G})} \text{tr } (\rho_\Gamma(\phi \otimes h)) \ .$$

Tours.

DÉFINITION . *Nous dirons qu'une suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $C_c^\infty(G')$ est une tour de fonctions tendant vers 1 si :*

- *pour tout n dans $\mathbb{N}$, $h_n(1) = 1$,*
- *pour tout x dans G' distinct de 1 , $\lim_{n \to \infty} h_n(x) = 0$,*
- *il existe une fonction g continue et à support compact sur G' qui majore absolument tous les éléments de la suite : pour tout x dans G' et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|h_n(x)| \leq g(x)$,*
- *pour tout n dans $\mathbb{N}$, h_n est une fonction de type positif, c'est-à-dire que, pour tout π dans $\Pi_u(G)$ et tout n dans $\mathbb{N}$, $\widehat{h}_n(\pi) \geq 0$.*

PROPOSITION 1.2. *Soit* Γ *un sous-groupe co-compact de* $\widetilde{G} = G \times G'$ *qui se projette injectivement dans le second facteur et* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une tour de fonctions tendant vers* 1 *. Alors, pour toute fonction* ϕ *lisse et à support compact sur* G *, nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{h_n}(\widehat{\phi}) = \mu^G(\widehat{\phi}) \ .$$

Proof. Les intégrales orbitales sont absolument convergentes. Le théorème de convergence dominée montre que, si $x \neq 1$, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{G'}(x, h_n) = 0 \ .$$

Comme

$$\Phi_{\widetilde{G}}(\gamma, \phi \otimes h_n) = \Phi_G(\gamma, \phi)\Phi_{G'}(\gamma, h_n) \ ,$$

la contribution de chaque classe de conjugaison non triviale tend vers 0 . Par ailleurs, par hypothèse, $\Phi_{G'}(1, h_n) = h_n(1) = 1$. Comme toutes les expressions qui entrent dans la formule des traces sont absolument convergentes, une nouvelle application du théorème de convergence dominée montre qu'à la limite

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{tr}\ (\rho_\Gamma(\phi \otimes h_n)) = \mathrm{vol}\ (\Gamma\backslash\widetilde{G})\ \phi(1) \ .$$

PROPOSITION 1.3. *Soit* Γ *un sous-groupe co-compact de* $\widetilde{G} = G \times G'$ *qui se projette injectivement dans le second facteur et* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une tour de fonctions tendant vers* 1 *. Alors, pour toute fonction sur* $\Pi_u(G)$ *,* f *, borélienne bornée et telle que, pour tout* ϵ *strictement positif, il existe* ϕ *et* ψ *lisses à supports compacts sur* G *vérifiant* $|f - \widehat{\phi}| \leq \widehat{\psi}$ *sur* $\Pi_u(G)$ *et* $\mu^G(\widehat{\psi}) \leq \epsilon$ *, nous avons :*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{h_n}(f) = \mu^G(f) \ .$$

Proof. En effet, pour tout ϵ strictement positif, il existe ϕ et ψ lisses à supports compacts sur G telles que

$$|f - \widehat{\phi}| \leq \widehat{\psi} \qquad \text{et} \qquad \mu^G(\widehat{\psi}) \leq \epsilon \ .$$

Et donc

$$\begin{aligned} |\mu_{h_n}(f) - \mu^G(f)| &\leq \ \mu_{h_n}(\widehat{\psi}) + |\mu_{h_n}(\widehat{\phi}) - \mu^G(\widehat{\phi})| + \mu^G(\widehat{\psi}) \\ &\leq \ |\mu_{h_n}(\widehat{\psi}) - \mu^G(\widehat{\psi})| + 2\mu^G(\widehat{\psi}) + |\mu_{h_n}(\widehat{\phi}) - \mu^G(\widehat{\phi})| \\ &\leq \ 4\epsilon \end{aligned}$$

dès que n est assez grand.

Nous allons maintenant construire divers exemples de cette situation.

Exemple fondamental. Soit G un groupe localement compact unimodulaire et soit $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-groupes discrets co-compacts de G tels que

1. Pour tout n , Γ_n est normal dans Γ_0 ,
2. Pour tout n , $\Gamma_n \supset \Gamma_{n+1}$,
3. L'intersection des Γ_n est réduite à $\{1\}$.

Nous dirons qu'une telle famille de sous-groupes est une tour de sous-groupes tendant vers 1. Soit G' le groupe profini limite projective des quotients $\Gamma_n\backslash\Gamma_0$:

$$G' = \lim_{\leftarrow} \Gamma_n\backslash\Gamma_0 \ .$$

Nous pouvons identifier Γ_0 à un sous-groupe dense de G'. Soit Γ le sous-groupe de $\widetilde{G} = G \times G'$ obtenu par le plongement diagonal de Γ_0 dans le produit. L'adhérence de Γ_n dans G' est un sous-groupe ouvert compact H_n . La projection de $\Gamma\backslash\widetilde{G}$ sur $\Gamma_n\backslash G$ admet pour fibres H_n ; en effet

$$\Gamma\backslash\widetilde{G}/H_n = \Gamma\backslash(G \times G'/H_n) \simeq \Gamma_n\backslash G \ .$$

Notons h_n la fonction caractéristique de H_n . La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une tour de fonctions qui tend vers 1 . La projection ci-dessus montre que, dans ce cas, les mesures μ_{h_n} ne sont autres que les mesures μ_{Γ_n} construites au début de ce paragraphe :

$$\mu_{h_n}(\widehat{\phi}) = \frac{1}{\text{vol }(\Gamma\backslash\widetilde{G})} \text{tr }(\rho_\Gamma(\phi\otimes h_n)) = \frac{1}{\text{vol }(\Gamma_n\backslash G)} \text{tr }(\rho_{\Gamma_n}(\phi)) = \mu_{\Gamma_n}(\widehat{\phi}) \ .$$

Nous en déduisons le

THÉORÈME 1.4. *Soient G un groupe localement compact et $\mathcal{H}$ une algèbre de fonctions lisses à supports compacts sur G tels que le triplet $(G, \mathcal{H}, \mu^G)$ vérifie le principe de densité. Soit $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une tour de sous-groupes discrets co-compacts de G tendant vers 1. Alors pour tout ouvert U de $\Pi_u(G)$ relativement quasi-compact et μ^G-régulier, la suite des mesures μ_{Γ_n} est telle que*

$$\mu_{\Gamma_n}(U) \to \mu^G(U) \ .$$

Proof. Le théorème résulte immédiatement des deux propositions précédentes.

Un cas particulier. Soit F un corps de nombres et $\mathbf{G}$ un groupe linéaire algébrique réductif connexe défini sur F . Soit F_v la complétion de F à la place v . Soit S un ensemble fini de places de F ; nous posons

$$F_S = \prod_{v \in S} F_v \qquad \text{et} \qquad \mathbb{A}^S = \prod_{v \notin S}{}' F_v \ ,$$

i.e. $\mathbb{A}^S$ est le "produit restreint" des complétés en dehors de S . Nous posons

$$G = \mathbf{G}(F_S) \qquad\qquad G' = \mathbf{G}(\mathbb{A}^S) \qquad\qquad \Gamma = \mathbf{G}(F) \ .$$

Supposons que S contienne les places archimédiennes et soit H_n une famille emboîtée de sous-groupes ouverts compacts de G' dont l'intersection est réduite à l'élément neutre. Soit h_n la fonction caractéristique de H_n . La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une tour de fonctions tendant vers 1 . Si de plus $\mathbf{G}$ est F-anisotrope, les groupes G et Γ vérifient les hypothèses de la proposition 1.2.

Théorème de De George, Wallach et Delorme : le cas S-arithmétique co-compact.

THÉORÈME 1.5. *Soit F un corps de nombres, S un ensemble fini de places de F et $\mathbf{G}$ un groupe linéaire algébrique réductif défini sur F . Soit G le produit des groupes $(\mathbf{G}(F_v))_{v\in S}$. Soient G' un groupe localement compact et Γ un sous-groupe discret co-compact de $G \times G'$ qui se projette injectivement dans le second facteur. Si h_n est une tour de fonctions sur G' tendant vers 1 , alors pour tout ouvert $U \subset \Pi_u(G)$ relativement quasi-compact μ^G-régulier, la suite des mesures μ_{h_n} est telle que*

$$\mu_{h_n}(U) \to \mu^G(U) \ .$$

Proof. Le théorème résulte immédiatement du théorème 1.4 et du théorème de densité 7.3.

Le théorème 1.5 ci-dessus redonne les théorèmes de De George, Wallach et Delorme (DeGeorge et al., 1978; DeGeorge et al., 1979; Delorme, 1986) en les généralisant au cadre S-arithmétique co-compact.

THÉORÈME 1.6. *Soient F un corps de nombres, S un ensemble fini de places de F contenant les places archimédiennes et $\mathbf{G}$ un groupe linéaire algébrique réductif défini sur F . Soit $G = \mathbf{G}(F_S)$ et soit $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une tour de sous-groupes discrets co-compacts de G tendant vers 1 . Alors pour tout ouvert U relativement quasi-compact μ^G-régulier, la suite des mesures μ_{Γ_n} est telle que*

$$\mu_{\Gamma_n}(U) \to \mu^G(U) \ .$$

2. Préliminaires de topologie générale

Soit X un espace topologique localement compact, nous noterons $C_0(X)$ l'ensemble des fonctions sur X à valeurs complexes et tendant vers 0 à l'infini. Nous dirons qu'un sous-ensemble Y de X est régulier pour la mesure μ (définie sur X) si la μ-mesure de sa frontière est nulle. Un tel ensemble sera aussi dit μ-régulier.

LEMME 2.1. *Soient X un espace topologique localement compact, ν une mesure de Radon positive sur X et A une sous-algèbre de $C_0(X)$, auto-adjointe, séparant les points de X et telle que pour tout $x \in X$, il existe $f \in A$ pour laquelle $f(x) \neq 0$. Soit f une fonction ν-Riemann-intégrable sur X ; pour tout ϵ strictement positif, il existe des fonctions g et h dans A telles que*

$$|f-g| \leq h \quad et \quad \nu(h) \leq \epsilon \ .$$

Proof. Par compacité et auto-adjonction, il existe une fonction h_0 dans A qui est réelle positive et supérieure à 1 sur le support de f . Le réel ϵ étant donné, soit ϵ_1 tel que

$$\epsilon_1(||h_0||_\infty + 3\nu(h_0)) \leq \epsilon \ ,$$

où

$$||h_0||_\infty = \sup_{x \in X} |h_0(x)| \ .$$

Il existe f_1 à support compact, ν-Riemann-intégrable et telle que $f = f_1 h_0$. En effet, nous pouvons supposer que l'ensemble des points de discontinuité de f_1 est le même que celui de f, car h_0 est continue, et nous pouvons utiliser le critère classique de Riemann-intégrabilité (Schwartz, 1981, Théorème 63), à savoir que ses points de discontinuité sont de ν-mesure nulle. Donc, il existe g_1 et h_1 continues à supports compacts telles que $|f_1 - g_1| \leq h_1$ et $\nu(h_1) \leq \epsilon_1$. Par le théorème de Weierstraß-Stone, il existe g' et h' dans A telles que $|g' - g_1| \leq \epsilon_1$ et $|h' - h_1| \leq \epsilon_1$. Nous pouvons de plus supposer $h' \geq 0$: en effet nous pouvons approcher la racine carrée de h_1 à ϵ_2 près par une fonction $h'' \in A$. Or si ϵ_2 est assez petit

$$\begin{aligned}
|h''\overline{h''} - h_1| &\leq |h'' - \sqrt{h_1}|.|\overline{h''}| + |\overline{h''} - \sqrt{h_1}|.|\sqrt{h_1}| \\
&\leq \epsilon_2(2||\sqrt{h_1}||_\infty + \epsilon_2) \\
&\leq \epsilon_1 \ .
\end{aligned}$$

Posons maintenant $h = h'h_0 + 2\epsilon_1 h_0$ et $g = g'h_0$; ce sont des fonctions de A telles que $|f - g| \leq h$. En effet :

$$|f - g| \leq |f_1 - g_1|h_0 + |g_1 h_0 - g' h_0|$$

$$\begin{aligned} &\leq h_1 h_0 + \epsilon_1 h_0 \\ &\leq (h_1 h_0 - h' h_0) + h' h_0 + \epsilon_1 h_0 \\ &\leq h' h_0 + 2\epsilon_1 h_0 = h \ . \end{aligned}$$

De plus :

$$\nu(h) \leq \nu(h_1 h_0) + \nu(|h' h_0 - h_1 h_0|) + 2\epsilon_1 \nu(h_0) \leq \epsilon_1(||h_0||_\infty + 3\nu(h_0)) \leq \epsilon \ .$$

Soient Π un espace topologique (non-séparé) et μ une mesure borélienne positive sur Π . Nous noterons B l'espace des fonctions boréliennes et bornées sur Π . Nous nous donnons un sous-espace F auto-adjoint de $B \cap L^1(\mu)$. Soit $\epsilon > 0$; nous définissons

$$U_\epsilon = \{ f \in B \mid \exists\, h \in F \quad \text{avec} \quad |f| \leq h \quad \text{et} \quad \mu(h) < \epsilon \} \ .$$

Les $(U_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ forment une base de voisinages de l'origine d'une topologie $\mathcal{T}(\mu, F)$ (non-séparée) sur B . Nous souhaitons étudier l'adhérence $\overline{F}$ de F pour cette topologie :

$$\overline{F} = \{ f \in B \mid \forall \epsilon > 0, \exists\, g\,,\, h \in F \quad \text{avec} \quad |f - g| \leq h \quad \text{et} \quad \mu(h) < \epsilon \} \ .$$

Nous pouvons aussi considérer la topologie $\mathcal{T}(\mu, \overline{F})$ dont les

$$W_\epsilon = \{ f \in B \mid \exists\, h_1 \in \overline{F} \quad \text{avec} \quad |f| \leq h_1 \quad \text{et} \quad \mu(h_1) < \epsilon \}$$

forment une base de voisinages de l'origine.

LEMME 2.2. *Les topologies* $\mathcal{T}(\mu, F)$ *et* $\mathcal{T}(\mu, \overline{F})$ *coïncident sur* B *.*

Proof. Il suffit de remarquer que $U_\epsilon \subset W_\epsilon \subset U_{\epsilon'}$ si $\epsilon < \epsilon'$.

Soit Θ un espace localement compact séparé muni d'une application continue de Π dans Θ . Par abus de notation, nous noterons par la même lettre une fonction sur Θ et son image réciproque sur Π . Nous notons $C_0(\Theta)$ l'espace des fonctions continues sur Θ tendant vers 0 à l'infini. Soit A une sous-algèbre de $C_0(\Theta)$ auto-adjointe et séparant les points du compactifié d'Alexandrov de Θ . En particulier A est dense dans $C_0(\Theta)$. Nous supposons que F est un module sur A pour le produit des fonctions et que la propriété suivante est vraie :

$(\star)$ Pour tout $g \in F$, il existe $h \in F$ avec $|g| \leq h$.

LEMME 2.3. *Soient* $c \in C_0(\Theta)$ *et* $g_1 \in F$ *alors* $f = c g_1$ *appartient à* $\overline{F}$ *.*

Proof. Notons h_1 une fonction de F avec $|g_1| \leq h_1$. Pour tout ϵ_1 strictement positif, il existe $a \in A$ avec $|c-a| \leq \epsilon_1$; posons $g = ag_1$ et $h = \epsilon_1 h_1$; ce sont des éléments de F . Nous avons

$$|f-g| \leq \epsilon_1 |g_1| \leq \epsilon_1 h_1 = h$$

et $\mu(h) = \epsilon_1 \mu(h_1)$ peut être rendu aussi petit qu'on veut.

Nous en déduisons immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.4. *L'espace $\overline{F}$ est un $C_0(\Theta)$-module pour le produit des fonctions.*

COROLLAIRE 2.5. *Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures boréliennes positives sur Π telle que tout $g \in F$ soit μ_n-intégrable (pour tout n) et vérifie*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(g) = \mu(g) \ .$$

Alors, pour tout $f \in \overline{F}$, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \mu(f) \ .$$

Proof. En effet, il existe g et h dans F telles que

$$|f-g| \leq h \qquad \text{et} \qquad \mu(h) \leq \epsilon \ .$$

Et donc

$$\begin{aligned} |\mu_n(f) - \mu(f)| &\leq \mu_n(h) + |\mu_n(g) - \mu(g)| + \mu(h) \\ &\leq |\mu_n(h) - \mu(h)| + 2\mu(h) + |\mu_n(g) - \mu(g)| \\ &\leq 4\epsilon \end{aligned}$$

dès que n est assez grand.

Nous aurons enfin besoin d'un lemme de topologie. Ce lemme est à rapprocher des théorèmes de recouvrement à la Besicovitch (Evans et al., 1992, Theorem 1.5.2).

LEMME 2.6. *Soit C un compact de $\mathbb{R}^n$. Nous supposons donné, pour tout point x de C, un voisinage ouvert $\mathcal{V}_x$ de x . Il existe un ensemble fini d'ouverts $(\mathcal{W}_i)_{i\in I}$ tel que*

1. *Pour tout $i \in I$, il existe x dans C tel que $\overline{\mathcal{W}_i} \subset \mathcal{V}_x$.*
2. *Les $(\mathcal{W}_i)_{i\in I}$ recouvrent C.*
3. *Tout point de C appartient à au plus 2^n ouverts $\mathcal{W}_i$.*

Proof. Raffinons d'abord les $\mathcal{V}_x$ et choisissons, pour tout x dans C , un voisinage ouvert $\mathcal{U}_x$ de x tel que $\overline{\mathcal{U}_x} \subset \mathcal{V}_x$ et tel que $\mathcal{U}_x$ soit un pavé de la forme

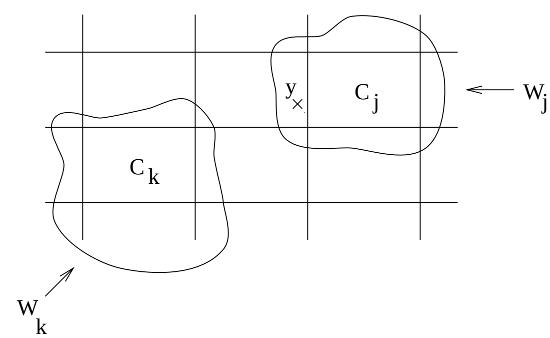
$$\mathcal{U}_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{pour tout } 1 \leq i \leq n,\ |p_i(y) - p_i(x)| < c_i(x)\}$$

où les $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les projections sur les axes de coordonnées. Extrayons un sous-recouvrement fini de $(\mathcal{U}_x)_{x \in C}$: soient $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ tels que les $\mathcal{U}_{x_i}$ recouvrent C . Considérons la famille $\mathcal{F}$ des hyperplans définis par les faces des $\mathcal{U}_{x_i}$. Cette famille d'hyperplans définit des pavés ouverts $(C_j)_{1 \leq j \leq m}$: ce sont les composantes connexes de

$$\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{H \in \mathcal{F}} H \right) .$$

A chaque C_j nous associons un ouvert $\mathcal{W}_j$ tel que

1. Si $\overline{C_j} \subset \overline{\mathcal{U}_{x_i}}$, alors $\overline{\mathcal{W}_j} \subset \mathcal{V}_{x_i}$.
2. $\overline{C_j} \subset \mathcal{W}_j$.
3. Pour tout y de $\mathcal{W}_j$ et tout indice k , si $d(C_j, C_k) \neq 0$, alors $d(y, C_j) < \dfrac{1}{2} d(C_j, C_k)$.



Soit y de C un point qui appartient à deux ouverts, $\mathcal{W}_j$ et $\mathcal{W}_k$. Comme

$$d(C_j, C_k) \leq d(C_j, y) + d(y, C_k) ,$$

d'après la propriété (iii) des $\mathcal{W}_j$, les ouverts C_j et C_k sont nécessairement adjacents : $d(C_j, C_k) = 0$. Il y a au plus 2^n pavés C_j adjacents deux à deux. Il en résulte que y ne peut appartenir à plus de 2^n ouverts $\mathcal{W}_j$.

Remarquons que l'énoncé précédent se généralise immédiatement aux variétés différentiables dont les composantes connexes ont des dimensions bornées, ainsi qu'aux quotients de ces variétés par des groupes finis. Il peut donc être appliqué à la variété (quasi-)algébrique des caractères infinitésimaux (définis au paragraphe suivant). La dimension des composantes connexes de cette variété est majorée par une constante ne dépendant que du groupe.

3. Préliminaires de théorie des représentations

Jusqu'au paragraphe 5 inclus, F est un corps local de caractéristique nulle et $G = \mathbf{G}(F)$ l'ensemble des points sur F d'un groupe linéaire, réductif, connexe $\mathbf{G}$, défini sur F . Nous fixons K un sous-groupe compact maximal de G (dans le cas p-adique, il convient de prendre un “bon compact”, au sens de Bruhat-Tits). Nous notons $C_c^\infty(G)$ l'espace vectoriel des fonctions sur G , à valeurs complexes, lisses, à supports compacts et K-finies à droite et à gauche (cette dernière propriété n'étant utile que pour F archimédien). Nous appellerons “algèbre de Hecke” l'algèbre de convolution des mesures à supports compacts sur G qui sont le produit d'une fonction de $C_c^\infty(G)$ et d'une mesure de Haar sur G . Nous la notons $\mathcal{H}(G)$ ou simplement $\mathcal{H}$. Nous noterons $\Pi(G)$ (respectivement $\Pi_{temp}(G)$, $\Pi_u(G)$, $\Pi_2(G)$, $\Pi_{cusp}(G)$) l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles (respectivement tempérées, unitaires, dans la série discrète, cuspidales) de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{R}(G)$ le groupe de Grothendieck des représentations de G admissibles, virtuelles et de longueur finie. Nous munissons $\Pi(G)$ de la topologie de Fell. Une fonction f sur $\Pi(G)$ se prolonge naturellement en une forme linéaire sur $\mathcal{R}(G)$ que nous noterons encore f . C'est en particulier le cas de $\widehat{\phi}$ pour $\phi \in \mathcal{H}$.

Nous fixons P_0 un sous-groupe parabolique minimal de G et M_0 un sous-groupe de Levi de P_0 . Dans le cas archimédien, nous supposons de plus P_0 stable par l'involution de Cartan associée à K . Nous noterons $\mathcal{L}^G(M)$ les sous-groupes de Levi de G qui contiennent M . L'ensemble des sous-groupes de Levi de G contenant M_0 sera simplement noté $\mathcal{L}^G$; de même $\mathcal{L}^M$ désignera l'ensemble des sous-groupes de Levi contenus dans M et contenant M_0 . Nous notons W_G le groupe de Weyl de G relatif à M_0 . Si F est archimédien nous notons $W_G^{\mathbb{C}}$ le groupe de Weyl complexe de G . Soient M et L dans $\mathcal{L}^G$, nous noterons W_G^{ML} un ensemble de représentants dans W_G de $W_L \backslash W_G / W_M$ qui soient de longueur minimale dans leur double classe. Soit M un sous-groupe de Levi, nous notons m son algèbre de Lie, A_M le tore déployé maximal du centre de M , $X^{rat}(M)$ l'ensemble des caractères rationnels de M et

$$a_M = \text{Hom }(X^{rat}(M), \mathbb{R}) .$$

Soit $\chi \in X^{rat}(M)$, notons λ_χ son image dans $a_M^* = X^{rat}(M) \otimes \mathbb{R}$. Nous définissons une application H_M de M dans a_M en imposant que

$$|\chi(m)| = q_F^{\langle H_M(m), \lambda_\chi \rangle}$$

pour tout $m \in M$ et tout $\chi \in X^{rat}(M)$; ici q_F est égal à e si F est archimédien et à la caractéristique résiduelle q de F sinon. Nous notons M^1 le noyau de H_M , $X^{nr}(M)$ l'ensemble des caractères non-ramifiés de M et $X_u^{nr}(M)$ ceux d'entre eux qui sont unitaires. Soit $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^*$ (le complexifié de a_M^*); nous posons

$$\chi_\lambda(m) = q_F^{\langle H_M(m), \lambda \rangle} .$$

Soit P un sous-groupe parabolique de sous-groupe de Levi M ; soient $\sigma \in \Pi(M)$ et $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^*$; notons σ_λ la représentation de M définie par

$$\sigma_\lambda(m) = \chi_\lambda(m)\sigma(m)$$

et $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ l'induite parabolique normalisée de P à G , de σ_λ . Quand λ est nul, nous l'omettrons dans la notation. La suite de composition de l'induite est finie et ne dépend que de M non de P ; il est donc légitime de poser

$$i_{GM}(\sigma) = [\mathcal{I}_{P,\sigma}^G] ,$$

où, pour une représentation admissible de longueur finie π , nous écrivons $[\pi]$ son image dans $\mathcal{R}(G)$. Nous dirons que $\pi \in \Pi(G)$ est un composant de $i_{GM}(\sigma)$ si π est isomorphe à un sous-quotient irréductible de $\mathcal{I}_{P,\sigma}^G$. L'application i_{GM} se prolonge par linéarité en un homomorphisme entre groupes de Grothendieck

$$i_{GM} \ : \mathcal{R}(M) \to \mathcal{R}(G) .$$

Nous dirons qu'une représentation est standard si elle est de la forme $i_{GM}\sigma \otimes \chi$ où M appartient à $\mathcal{L}^G$, σ à $\Pi_{temp}(M)$ et χ à $X^{nr}(M)$ avec χ réel et régulier (i.e. stabilisé par aucun élément non trivial de W_G).

Supposons F archimédien et rappelons quelques faits énoncés par Delorme dans (Delorme, 1986, paragraphe 2.1). Soit $\sigma \in \Pi_2(M)$, avec $M \in \mathcal{L}^G$, nous notons $A(\sigma)$ l'ensemble des K-types minimaux de $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ (c'est indépendant de λ) et R_σ le R-groupe. Tout K-type minimal τ dans $A(\sigma)$ est contenu avec multiplicité 1 dans $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ (Vogan, 1979, Theorem 1.1). Le R-groupe opère simplement transitivement sur $A(\sigma)$. Nous notons $\Pi_{l.s.d.}(M)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations de M^1 qui sont des limites de séries discrètes à données non-dégénérées. Cet ensemble est vide sauf si M a un sous-groupe de Cartan compact et Vogan montre que les représentations $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$, pour

$M \in \mathcal{L}^G$, $\sigma \in \Pi_{l.s.d.}(M)$ et $\lambda \in a^*_{M,\mathbb{C}}$ engendrent $\mathcal{R}(G)$ (Vogan, 1981, proposition 6.6.7). Si $L \in \mathcal{L}^G$ est le centralisateur de $Re(\lambda)$ dans G , nous avons une décomposition orthogonale $\lambda = \lambda_L + \lambda^L_M$ avec λ_L dans $a^*_{L,\mathbb{C}}$. La représentation $\mathcal{I}^L_{P\cap L,\sigma,\lambda^L_M}$ est alors unitairement induite et se décompose en somme directe de limites de séries discrètes :

$$\mathcal{I}^L_{P\cap L,\sigma,\lambda^L_M} = \bigoplus_{i=1}^{T} \sigma_i$$

et donc, si $Q = PL$:

$$\mathcal{I}^G_{P,\sigma,\lambda} = \oplus_{i=1}^T \mathcal{I}^G_{Q,\sigma_i,\lambda_L} \ .$$

Pour τ dans $A(\sigma)$, nous notons $\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$ l'unique constituent $\mathcal{I}^G_{Q,\sigma_i,\lambda_L}$ qui contient τ et $\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$ l'unique sous-quotient irréductible contenant τ . Nous savons alors que $\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau) = \mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau')$ si et seulement si $\tau' \in R^{\perp}_{\sigma,\lambda}\tau$, où $R_{\sigma,\lambda}$ est le stabilisateur de (σ, λ) dans R_σ . Rappelons qu'il existe une relation d'ordre notée $\prec$, sur les séries discrètes des différents sous-groupes de Levi de G , définie ainsi : $\sigma \prec \sigma'$ si et seulement si tous les éléments de $A(\sigma)$ sont de longueur moindre que ceux de $A(\sigma')$.

Supposons F non-archimédien. Nous disposons du foncteur de restriction, aussi appelé foncteur de Jacquet; il est adjoint à gauche de l'induction. Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de Levi $M \in \mathcal{L}^G$ et soit $\pi \in \Pi(G)$. Nous noterons $r_{PG}(\pi)$ l'image dans le groupe de Grothendieck de M de la représentation obtenue par restriction de Jacquet de G à P . Il faut prendre garde que, même après semi-simplification, contrairement au cas de l'induction parabolique, le foncteur de restriction dépend du sous-groupe parabolique P et pas seulement du sous-groupe de Levi M .

Nous notons $\Theta(G)$ l'ensemble des caractères infinitésimaux. Précisons ce que nous entendons par là. Dans le cas p-adique, nous reprenons la notion introduite par Bernstein (Bernstein et al., 1986, paragraphe 2.2) ; un caractère infinitésimal est un caractère du centre de Bernstein $Z(G)$ non trivial sur la sous-algèbre $Z^0(G)$ engendrée par les mesures e_H images directes par l'inclusion de la mesure de Haar normalisée sur H, pour H sous-groupe ouvert compact de G . Dans le cas archimédien, nous appelons caractère infinitésimal un caractère de l'algèbre enveloppante $Z(G)$ de G . L'espace $\Theta(G)$ est l'ensemble des points complexes d'une variété algébrique dans le cas archimédien et est une union disjointe infinie de tels ensembles dans le cas p-adique. Nous munissons $\Theta(G)$ de la topologie de la convergence simple. Si π appartient à $\Pi(G)$ nous notons θ_π son caractère infinitésimal. Si $\sigma \in \Pi(L)$ admet $\theta_\sigma \in \Theta(L)$ comme caractère infinitésimal, nous noterons $\Theta^G_L(\theta_\sigma)$ le caractère infinitésimal commun des sous-quotients de $\mathcal{I}^G_{P,\sigma}$.

Nous allons maintenant définir une algèbre de fonctions $\mathcal{A}(G)$ qui joue un rôle crucial dans la suite. Si F est p-adique, $\Theta(G)$ est homéomorphe à l'ensemble $\mathcal{C}(G)$ des données cuspidales à conjugaison près par le normalisateur de M_0 . L'algèbre $\mathcal{A}(G)$ est l'image par cet homéomorphisme des fonctions régulières sur $\mathcal{C}(G)$, c'est-à-dire des fonctions régulières sur chaque composantes connexes de $\mathcal{C}(G)$. Les algèbres $Z(G)$ et $\mathcal{C}(G)$ sont isomorphes par l'application (de Gelfand) $z \mapsto f_z$ où $f_z(\theta) = \theta(z)$. Pour montrer l'analogie avec le cas archimédien, remarquons que les fonctions régulières sur $X^{nr}(M)$ sont les transformées de Fourier-Mellin des fonctions dans $C_c^\infty(M/M^1)$. Si F archimédien, soit h une sous-algèbre de $m_0 \otimes \mathbb{C}$ de la forme $h = a_{M_0} \oplus i b_K$, où b_K est une sous-algèbre de Cartan de $k \cap m_0$. En particulier $h \otimes \mathbb{C}$ est une sous-algèbre de Cartan de $g \otimes \mathbb{C}$. L'algèbre $\mathcal{A}(G)$ est l'image des transformées de Fourier-Laplace des fonctions $W_G^{\mathbb{C}}$-invariantes dans $C_c^\infty(h)$ par l'isomorphisme d'Harish-Chandra :

$$h_{\mathbb{C}}^*/W_G^{\mathbb{C}} \simeq \Theta(G) \ .$$

L'algèbre $\mathcal{A}(G)$ est munie d'une involution $f \mapsto f^*$ compatible avec l'involution naturelle sur l'algèbre de Hecke. Cela définit par dualité une involution $\theta \mapsto \widetilde{\theta}$ sur l'ensemble des caractères infinitésimaux :

$$\widetilde{\theta} \ : \ f \mapsto \overline{f^*(\theta)} \ .$$

Ici $z \mapsto \overline{z}$ est la conjugaison complexe. Un caractère infinitésimal θ est dit hermitien si $\widetilde{\theta} = \theta$ et nous notons $\Theta_h(G)$ l'ensemble des caractères infinitésimaux hermitiens.

LEMME 3.1. *L'ensemble $\Theta_h(G)$ des caractères hermitiens est un espace topologique localement compact. Les restrictions des fonctions de l'algèbre $\mathcal{A}(G)$ à $\Theta_h(G)$ forment une algèbre auto-adjointe qui sépare les points.*

Proof. L'involution étant continue l'ensemble des caractères hermitiens est un fermé $\Theta_h(G)$ de $\Theta(G)$ et l'involution sur $\mathcal{A}(G)$ restreinte à $\Theta_h(G)$ est la conjugaison complexe. Enfin deux points distincts de $\Theta_h(G)$ correspondent à des caractères distincts de $\mathcal{A}(G)$, ils sont donc séparés par des fonctions de $\mathcal{A}(G)$.

THÉORÈME 3.2. (J-L. Waldspurger). *Supposons F non archimédien et soient $P = MN$ un sous-groupe parabolique muni de sa décomposition de Levi, σ une représentation irréductible de M ; il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $a_{M,\mathbb{C}}^*$ tel que, pour λ dans $\mathcal{V}$ vérifiant $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \neq 0$ pour toute racine α de A_M dans g , l'induite $I = \mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ est irréductible.*

Proof. Soient R un sous-groupe parabolique inclus dans P et de Levi L , ρ une représentation cuspidale irréductible de L tels que σ soit une sous-représentation de $\mathcal{I}^M_{R\cap M,\rho}$. Si π est un sous-quotient irréductible de I , il existe un sous-groupe parabolique Q de Levi L tel que $r_{QG}\pi$ est non nul, de par les propriété des données cuspidales.

D'après (Bernstein et al., 1986, Lemme 5.4), nous avons la relation suivante dans $\mathcal{R}(L)$:

$$[r_{QG}I] = \sum_w [w.\left(r_{(M\cap w^{-1}Qw)M}\sigma_\lambda\right)]$$

où la somme en w est prise sur les w de W_G tels que $wMw^{-1} \supset L$ modulo la multiplication à droite par W_M . Remarquons que $\mathcal{V}$ peut être choisi suffisamment petit pour que, dans les conditions du théorème, les représentations intervenant dans la somme précédente soient toutes disjointes. En effet, soient w_1 et w_2 appartenant à l'ensemble précédent et ρ_1, ρ_2 deux représentations irréductibles de M telles qu'il existe une suite de λ comme dans l'hypothèse du théorème et tendant vers 0 avec $w_1.(\rho_1)_\lambda = w_2.(\rho_2)_\lambda$; une telle suite d'égalités entraîne $w_1\rho_1 = w_2\rho_2$ et donc, a posteriori, $w_1\chi_\lambda = w_2\chi_\lambda$. Vu l'hypothèse faite sur λ , il en résulte $w_1 = w_2$.

Fixons un sous-module irréductible π de I ; il nous suffit de prouver que, pour tout sous-groupe parabolique Q de sous-groupe de Levi L et tout w tel que $wMw^{-1} \supset L$, $[r_{QG}\pi]$ contient $[w.r_{(M\cap w^{-1}Qw)M}\sigma_\lambda]$. Ou encore : pour tout L' sous-groupe de Levi conjugué à L dans G et inclus dans M , pour tout sous-groupe parabolique P' de Levi L', $[r_{P'G}\pi]$ contient $[r_{(M\cap P')M}\sigma_\lambda]$.

On fixe maintenant le sous-groupe de Levi L' . Pour P' (respectivement P'') un sous-groupe parabolique de Levi L' , nous posons $Q' = (M\cap P')N$ (respectivement $Q'' = (M\cap P'')N$). Nous allons raisonner par récurrence sur la distance $d(P',Q')$.

Si $d(P',Q') = 0$, alors $P' \subset P$. Par réciprocité de Frobenius, σ_λ est un quotient de $r_{PG}\pi$ et donc $r_{P'G}\pi$ admet $r_{(M\cap P')M}\sigma_\lambda$ comme quotient.

Supposons $d(P',Q') = d > 0$ et la propriété démontrée pour tout parabolique P'' de Levi L' tel que $d(P'',Q'') < d$. Nous choisissons un tel P'' tel que $d(P',P'') = 1$ et $d(P'',Q') = d-1$. Remarquons que cela impose $Q'' = Q'$. En effet, soit α une racine de $A_{L'}$ dans m ; supposons que α soit positive pour l'ordre défini par Q' et négative pour celui défini par P'' . Par additivité des longueurs, α est alors aussi négative pour P' . Mais par définition de Q' , α est de même signe pour Q' et P' . Donc un tel α est de même signe pour Q' et P'' ; il en résulte $Q'' = Q'$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence, nous en déduisons que $[r_{P''G}\pi]$ contient $[r_{(M\cap P'')M}\sigma_\lambda] = [r_{(M\cap P')M}\sigma_\lambda]$. Il nous reste donc à prouver l'assertion suivante : soit τ une représentation cuspidale irréductible de L' telle que $\Theta^G_{L'}\theta_\tau = \Theta^G_M\theta_\sigma$, il est possible de choisir $\mathcal{V}$

suffisament petit pour que, pour toute représentation de G de longueur finie Π , la multiplicité de τ_λ est identique dans $r_{P'G}\Pi$ et dans $r_{P''G}\Pi$.

Soit Q un sous-groupe parabolique ayant P' et P'' comme sous-groupes paraboliques maximaux. Par composition des foncteurs de Jacquet, nous pouvons supposer $Q = G$. Nous nous ramenons au cas où Π est irréductible en décomposant la semisimplifiée de Π en somme de représentations irréductibles et en utilisant l'exactitude du foncteur de Jacquet. Soit maintenant τ' ayant un caractère infinitésimal comme dans l'assertion que l'on veut démontrer et tel que τ'_λ soit un quotient irréductible de $r_{P'G}\Pi$. Alors Π est un sous-module de l'induite $\mathcal{I}^G_{P',\tau',\lambda}$. Or, si α est la racine positive séparant P' et P'', comme $Q' = Q''$, la restriction de α à A_M est non nulle. En conséquence, pour λ comme dans l'énoncé, nous avons $\langle\check{\alpha},\lambda\rangle \neq 0$ et donc l'induite $\mathcal{I}^G_{P',\tau',\lambda}$ est irréductible pour λ assez petit. Il en résulte $\Pi = \mathcal{I}^G_{P',\tau',\lambda}$ et donc, grâce à (Bernstein et al., 1986, Lemme 5.4), les semisimplifiées de $r_{P'G}\Pi$ et $r_{P''G}\Pi$ sont égales.

Cela achève la démonstration.

COROLLAIRE 3.3. *Supposons F non archimédien et soient $\theta \in \Theta(G)$ et, pour tout Levi M , un voisinage $\mathcal{V}_M$ du caractère trivial dans $X^{nr}(M)$; il existe un voisinage $\mathcal{W}_\theta$ de θ tel que, pour tout $\pi \in \Pi(G)$ de caractère infinitésimal $\theta_\pi \in \mathcal{W}_\theta$, il existe un Levi M , une représentation $\sigma \in \Pi(M)$, telle que $i_{GM}\sigma$ admet θ comme caractère infinitésimal, et un caractère non ramifié $\chi \in \mathcal{V}_M$ tels que*

$$[\pi] = i_{GM}(\sigma \otimes \chi) \ .$$

Proof. Soit (L,ρ) une donnée cuspidale associée à θ . Soit π dont le caractère infinitésimal est proche de θ , une donnée cuspidale associée à π peut être prise de la forme $(L, \rho\otimes\chi_\lambda)$ avec λ dans un voisinage $\mathcal{V}_0$ de 0 dans $a^*_{L,\mathbb{C}}$.

Il existe un sous-groupe de Levi standard M tel que l'ensemble des racines de A_M dans g soit exactement l'ensemble des α tels que $\langle\check{\alpha},\lambda\rangle =$ 0

Nous pouvons identifier λ à un élément de $a^*_{M,\mathbb{C}}$ grâce à la décomposition $a^*_L = a^*_M \oplus (a^M_L)^*$. Soit P un sous-groupe parabolique de Levi L tel que $Q = MP$ soit un sous-groupe parabolique; π est alors un sous-quotient de $\mathcal{I}^G_{P,\rho,\lambda}$. De plus

$$\mathcal{I}^G_{P,\rho,\lambda} = \mathcal{I}^G_Q\left(\mathcal{I}^Q_{P,\rho}\right) \otimes \chi_\lambda \ ,$$

et donc il existe σ dans $\Pi(M)$, un sous-quotient irréductible de $\mathcal{I}^Q_{P,\rho}$, tel que π soit un sous-quotient de $\mathcal{I}^G_{Q,\sigma,\lambda}$.

Comme Q est de Levi M et que $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \neq 0$ pour toute racine de A_M dans g , l'assertion résulte donc du théorème précédent.

Dans le cas archimédien, nous appelons pseudo bande verticale à partie réelle compacte de $\Theta(G)$ l'image d'une bande verticale à partie réelle compacte dans $h^* \otimes \mathbb{C}$. Dans le cas p-adique, nous appelons pseudo bande verticale à partie réelle compacte de $\Theta(G)$ un ensemble de caractères infinitésimaux attachés à des données cuspidales de la forme (M, σ_λ) avec σ dans un ensemble compact de $\Pi_{cusp}(M)$ et λ imaginaire pur, i.e. $\lambda \in ia_M^*$. Dans le cas p-adique une pseudo bande verticale à partie réelle compacte de $\Theta(G)$ est compacte. Dans une pseudo bande verticale à partie réelle compacte, les fonctions de $\mathcal{A}(G)$ tendent vers zéro à l'infini.

LEMME 3.4. *Soit C un compact de $\Theta(G)$; l'ensemble E des couples formés d'un Levi M dans $\mathcal{L}^G$ et d'une orbite sous $X_u^{nr}(M)$ d'une représentation σ dans $\Pi_2(M)$, telle qu'il existe λ dans $X^{nr}(M)$ avec $\Theta_M^G \theta_{\sigma_\lambda}$ dans C , est fini.*

Réciproquement, soit E un ensemble fini formé de couples (M, σ) où M est un Levi et σ est dans $\Pi_2(M)$; il existe une pseudo bande verticale à partie réelle compacte B dans $\Theta(G)$ vérifiant, pour tout (M, σ) dans E et tout λ dans $X^{nr}(M)$,

1. *dans le cas archimédien, si $\tau \in A(\sigma)$ est tel que $\mathcal{J}_{\sigma,\lambda}^G(\tau) \in \Pi_u(G)$ alors $\Theta_M^G \theta_{\sigma_\lambda} \in B$,*
2. *dans le cas p-adique, si $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ a un sous-quotient unitaire, alors $\Theta_M^G \theta_{\sigma_\lambda} \in B$.*

Proof. Traitons tout d'abord la première assertion. Remarquons que Θ_M^G est propre; aussi si $\Theta_M^G \theta_{\sigma_\lambda}$ appartient à un compact C , θ_{σ_λ} appartient à un compact C' . Remarquons que l'ensemble des caractères infinitésimaux de séries discrètes de M est l'orbite sous $X_u^{nr}(M)$ d'un ensemble discret. Cela résulte de (Tadić, 1988, Thoerem 4.5) et (Silberger, 1979, Theorem 5.4.5.1) dans le cas p-adique et de (Lipsman, 1970, Theorem 7.2) dans le cas archimédien. En conséquence l'ensemble des caractères infinitésimaux de la forme θ_{σ_λ} avec $\sigma \in \Pi_2(M)$ et $\lambda \in X^{nr}(M)$ est l'orbite sous $X^{nr}(M)$ d'un ensemble discret. Par conséquent, son intersection avec C' est incluse dans l'orbite sous $X^{nr}(M)$ d'un ensemble fini.

Pour la seconde, il suffit de montrer le résultat dans le cas où l'ensemble est réduit à un couple. Soit donc (M, σ) un Levi et une série discrète de M . Dans le cas p-adique, d'après (Tadić, 1988, Theorem 2.5), l'ensemble des λ dans $X^{nr}(M)$ tels que $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ a un sous-quotient unitaire est un compact de $X^{nr}(M)$. Il en résulte, par continuité de

Θ_M^G que l'ensemble des caractères infinitésimaux des représentations de la forme $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ ayant un sous-quotient unitaire est un compact et le résultat en découle. Dans le cas archimédien, d'après (Vogan, 1981, Theorem 6.6.15), $\mathcal{J}_{\sigma,\lambda}^G(\tau)$ est le quotient de Langlands attaché à une représentation tempérée σ_i , avec $\mathcal{I}_{P\cap L,\sigma,\lambda_M^L}^L = \bigoplus_{i=1}^T \sigma_i$, en reprenant des notations que nous avons introduites ci-dessus. Puisque $\lambda = \lambda_M^L + \lambda_L$ avec λ_M^L unitaire et $||Re(\lambda_L)||$ borné, d'après (Borel et al., 1980, Theorem IV.5.2), l'existence de la pseudo bande verticale à partie réelle compacte ayant la propriété de l'énoncé en résulte.

LEMME 3.5. *Soit $\phi \in \mathcal{H}$; il existe $\psi \in \mathcal{H}$ telle que*

$$|\widehat{\phi}(\pi)| \leq \widehat{\psi}(\pi) \qquad \textit{pour tout } \pi \in \Pi_u(G) \ .$$

Proof. D'après le théorème de Dixmier et Malliavin (Dixmier et al., 1978) tout $\phi \in \mathcal{H}$ est somme finie de produits de convolution et donc ϕ peut s'écrire comme combinaison linéaire finie de fonctions de type positif :

$$\phi = \sum_i \lambda_i \ \phi_i * \phi_i^*$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Si π est unitaire l'opérateur $\pi(\phi_i * \phi_i^*)$ est positif. La fonction

$$\psi = \sum_i |\lambda_i| \ \phi_i * \phi_i^* \ ,$$

est donc une solution à notre problème.

4. Contrôle μ-presque partout

Soit μ^G la mesure de Plancherel sur $\Pi_u(G)$ (unique si une mesure de Haar est fixée sur G) et soit f une fonction f sur $\Pi_u(G)$, μ^G-intégrable. Nous avons l'expression suivante pour $\mu^G(f)$:

$$\mu^G(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}^G} \sum_{\sigma \in \Pi_2(M)} \mu_{M,\sigma}^G(f)$$

où

$$\mu_{M,\sigma}^G(f) = \int_{X_u^{nr}(M)} f(i_{GM}(\sigma \otimes \chi)) \ \tilde{\mu}_{M,\sigma}^G(\chi) d\chi \ .$$

Les fonctions $\chi \mapsto \tilde{\mu}_{M,\sigma}^G(\chi)$ sont :

1. invariantes par W_G , i.e. $\tilde{\mu}_{wM,w\sigma}^G(w\chi) = \tilde{\mu}_{M,\sigma}^G(\chi)$, si $w \in W_G$,

2. méromorphes sur $X^{nr}(M)$ et holomorphes sur un voisinage de $X_u^{nr}(M)$,

3. dans le cas archimédien, elles sont à croissance lente sur $X_u^{nr}(M)$, c'est-à-dire que il existe $C_\sigma > 0$ et $r_\sigma > 0$ tels que

$$\tilde{\mu}^G_{M,\sigma}(\chi) \leq C_\sigma(1 + ||\chi||)^{r_\sigma}.$$

   La norme est une norme quelconque sur $X_u^{nr}(M)$ qui est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas p-adique, la condition de croissance est inutile puisque $X_u^{nr}(M)$ est compact.

DÉFINITION . *Nous dirons qu'une forme linéaire f sur $\mathcal{R}(G)$ est discrète si, pour toute $\sigma \in \Pi(M)$ avec $M \neq G$, $f(i_{GM}(\sigma)) = 0$.*

THÉORÈME 4.1. *Étant donnés une représentation π_0 de la série discrète de G et f dans $\mathcal{A}(G)$, il existe ψ dans $\mathcal{H}$ telle que*

1. Pour toute représentation π dans $\Pi_{temp}(G)$, $\widehat{\psi}(\pi) = \begin{cases} f(\theta_\pi) & si\ \pi \simeq \pi_0 \otimes \chi \\ 0 & sinon. \end{cases}$

2. La forme linéaire définie par $\widehat{\psi}$ est discrète.

Nous dirons alors que ϕ est un pseudo-coefficient attaché à π_0 et f .

Proof. (a) cas archimédien. Cela est essentiellement contenu dans le corollaire de la proposition 4 dans (Clozel et al., 1984). Nous allons construire une famille de fonctions satisfaisant aux conditions du théorème de Paley-Wiener scalaire (Clozel et al., 1990, Théorème 1). Nous posons donc $f_L(\tau, \lambda) = 0$ sauf si $L = G$ et τ est une translatée de π_0 . Si $\pi = \pi_0 \otimes \chi_\lambda$ nous posons $f_G(\pi_0, \lambda) = f(\theta_\pi)$. Les propriétés de régularité, de support fini et d'invariance par conjugaison (i.e. les conditions 1, 2 et 3 du théorème (Clozel et al., 1990, Théorème 1)) sont immédiates. En ce qui concerne la dernière propriété (décompositions) les fonctions en jeu sont soit trivialement égales soit toutes nulles puisque π_0 ne peut apparaître dans une telle décomposition ni dans le membre de droite (c'est le théorème de disjonction de Langlands, voir par exemple (Knapp, 1986, Theorem 14.90)), ni dans le membre de gauche puisque c'est une représentation de G et qu'il n'existe donc aucun Levi qui contienne proprement G .

(b) cas p-adique. Cela est essentiellement contenu dans (Clozel, 1986, Proposition 1). Le groupe de Grothendieck $\mathcal{R}(G)$ admet pour base les représentations standard. Nous définissons une forme linéaire g sur $\mathcal{R}(G)$ en lui imposant d'être nulle sur les éléments de cette base sauf si $\pi = \pi_0 \otimes \chi$ et, dans ce cas, nous imposons $g(\pi) = f(\theta_\pi)$. Il nous faut montrer que g satisfait aux conditions du théorème de Paley-Wiener scalaire (Bernstein et al., 1986, Theorem 1.2). Tout d'abord, montrons que g est nulle sur toute induite propre (condition 2 de l'énoncé). Soit $\pi = i_{GM}(\tau)$ pour $\tau \in \mathcal{R}(M)$. Il suffit de considérer le cas où τ est standard et cela résulte alors du choix de g . L'assertion de régularité (condition 1 de (Bernstein et al., 1986, Theorem 1.2)) en résulte immédiatement puisque la fonction $\chi \to g(i_{GM}\tau \otimes \chi)$ est soit la fonction nulle, soit la restriction à l'ensemble des tordues de π_0 d'une fonction régulière. Soit maintenant π une représentation irréductible de G pour laquelle $g(\pi)$ est non nul. Dans son expression dans la base des représentations standard π doit alors nécessairement contenir une représentation de la forme $\pi_0 \otimes \chi$. En particulier, le caractère infinitésimal de π est celui de $\pi_0 \otimes \chi$. Ainsi à torsion près par un caractère, cela laisse un nombre fini de possibilités pour π et donc g vérifie la condition 2 de (Bernstein et al., 1986, Theorem 1.2). L'existence de ψ en résulte.

Remarquons que seule intervient la restriction de f à la sous-variété de $\Theta(G)$ formée des θ_π avec $\pi = \pi_0 \otimes \chi$. Nous aurions donc pu formuler le théorème au moyen d'une fonction f_{π_0} de type Paley-Wiener sur $X^{nr}(G)$ invariante par translation par les χ qui stabilisent π_0 . Nous retrouvons notre énoncé en posant $f_{\pi_0}(\chi) = f(\pi_0 \otimes \chi)$. L'application $f \mapsto f_{\pi_0}$ est surjective.

Soit $\{(L_i, \sigma_i)\}_{i \in I}$ un ensemble de représentants des orbites sous le normalisateur de M_0 , agissant par conjugaison sur L et σ , et sous $X_u^{nr}(L)$, agissant par torsion sur σ , de couples (L, σ) formés d'un Levi $L \in \mathcal{L}^G$ et d'une représentation dans la série discrète σ de L . Nous supposerons de plus, ce qui est loisible, que les L_i sont des sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques Q_i qui contiennent un même sous-groupe parabolique minimal P_0 .

THÉORÈME 4.2. *Soient $i \in I$ et $f_i \in \mathcal{A}(G)$; il existe $\Phi_i \in \mathcal{H}$ telle que*

$$\widehat{\Phi_i}(\pi) = \delta_{ij} f_i(\theta_\pi) \quad \textit{si } [\pi] = i_{GL_j}(\sigma_j \otimes \chi) \textit{ avec } \chi \in X^{nr}(L_j) \; .$$

Ici δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Proof. Le cas archimédien résulte immédiatement de la première forme du théorème de Clozel et Delorme (Clozel et al., 1984). Passons au cas p-adique. Soit $f_{ij} \in A(L_j)$ l'image réciproque de f_i via l'application naturelle

$$\Theta_{L_j}^G \; : \; \Theta(L_j) \to \Theta(G)$$

définie au moyen de l'induction parabolique, ce qui a un sens puisque tous les composants d'une induite parabolique ont même caractère infinitésimal. Choisissons pour chaque j un pseudo-coefficient ψ_{ij} attaché à σ_j et f_{ij} , comme en 4.1. Nous allons exhiber des scalaires α_i^k tels que

$$\widehat{\Phi_i} = \sum_k \alpha_i^k r^*_{Q_k G} \widehat{\psi_{ik}} \ ,$$

soit une solution de notre problème. Ordonnons les indices de sorte que si L_k contient (strictement) un conjugué de L_j alors $k > j$. En utilisant la relation de commutation entre les foncteurs de restriction de Jacquet et d'induction parabolique (Bernstein et al., 1986, Lemma 5.4), il vient, si $\widehat{\psi}$ est une forme linéaire discrète sur $\mathcal{R}(M)$,

$$r^*_{QG}\widehat{\psi}(i_{GM}(\sigma)) = \widehat{\psi}(r_{QG}i_{GM}(\sigma)) = \sum_w \ \widehat{\psi}\left((w.r_{(M\cap w^{-1}Qw)M}\sigma)\right)$$

la somme portant sur les $w \in W_G^{LM}$ tels que $wMw^{-1} \supset L$. Si $[\pi] = i_{GL_j}(\sigma_j \otimes \chi)$, les α_i^k doivent donc vérifier :

$$\sum_{k,w} \alpha_i^k \widehat{\psi_{ik}} \left(w.r_{(L_j\cap w^{-1}Q_k w)L_j}(\sigma_j \otimes \chi)\right) = \delta_{ij} \ f_i(\theta_\pi) \ ,$$

où la somme porte sur les w de $W_G^{L_j L_k}$ tels que L_k est inclus dans wL_jw^{-1} . D'après le lemme 4.3, que nous allons démontrer ci-après, il existe des entiers d_{wkj} tels que

$$\widehat{\psi_{ik}} \left((w.r_{(L_j\cap w^{-1}Q_k w)L_j}(\sigma_j \otimes \chi)\right) = d_{wkj} \ f_i(\theta_\pi)$$

et, si $wL_jw^{-1} = L_k$ et $d_{wkj} \neq 0$, alors $k = j$ et $d_{wjj} = 1$. Il suffit donc de résoudre le système linéaire :

$$\sum_k \alpha_i^k c_{kj} = \delta_{ij} \ ,$$

où

$$c_{kj} = \sum_w d_{wkj} \ .$$

La somme en w porte sur les $w \in W_G^{L_j L_k}$ tels que $wL_jw^{-1} \supset L_k$. Les c_{kj} sont donc nuls si $k > j$ et c_{jj} est le cardinal de l'ensemble des $w \in W_G^{L_j L_j}$ tels que $wL_jw^{-1} = L_j$: c'est un entier positif non nul. La matrice des c_{kj} est triangulaire avec des éléments non nuls sur la diagonale, elle est donc inversible.

La matrice des α_i^k est la matrice inverse de celle des c_{kj} et donc $\alpha_i^k = 0$ si $i \geq k$. Nous en déduisons que seules interviennent les fonctions f_{ij} avec $i \leq j$. Nous pourrions donc, comme pour 4.1 ci-dessus, reformuler le théorème au moyen de ces seules f_{ij} .

LEMME 4.3. *Supposons que* $wL_jw^{-1} \supset L_k$. *Il existe des entiers* d_{wkj} *tels que si* $[\pi] = i_{GL_j}(\sigma_j \otimes \chi)$,

$$\widehat{\psi_{ik}}\left((w.r_{(L_j \cap w^{-1}Q_k w)L_j}(\sigma_j \otimes \chi)\right) = d_{wkj}\ f_i(\theta_\pi)\ .$$

De plus, si $wL_jw^{-1} = L_k$ *et* $d_{wkj} \neq 0$, *alors* $k = j$ *et* $d_{wjj} = 1$.

Proof. Soit $\tau \in \Pi(L_k)$. Par construction de ψ_{ik} , si $[\pi] = i_{GL_k}(\tau)$, nous avons

$$\widehat{\psi_{ik}}(\tau) = m(\tau, \sigma_k) f_{ik}(\theta_\tau) = m(\tau, \sigma_k) f_i(\theta_\pi)$$

où $m(\tau, \sigma_k)$ est un entier : la somme des multiplicités de $(\sigma_k \otimes \nu)_{\nu \in X^{nr}(L_k)}$ dans l'écriture de τ dans le groupe de Grothendieck comme combinaison linéaire de représentations standard. Donc, compte tenu de la compatibilité entre foncteur de Jacquet et caractère infinitésimal, il existe des entiers $d_{wkj}(\chi)$, indépendants de f_i, tels que si $[\pi] = i_{GL_j}(\sigma_j \otimes \chi)$,

$$\widehat{\psi_{ik}}\left((w.r_{(L_j \cap w^{-1}Q_k w)L_j}(\sigma_j \otimes \chi)\right) = d_{wkj}(\chi) f_i(\theta_\pi)\ .$$

Les deux membres de l'équation étant analytiques, il en résulte que les fonctions

$$\chi \mapsto d_{wkj}(\chi)$$

sont constantes. La dernière assertion du lemme est claire, car $\widehat{\psi}_{ik}(w.\sigma_j \otimes \chi) = 0$ si $k \neq j$ et $\widehat{\psi}_{ij}(w.\sigma_j \otimes \chi) = f_i(\theta_\pi)$.

5. Contrôle sur le support singulier

Soit $\theta \in \Theta(G)$. Soit Π_θ^{reg} l'ensemble des représentations $\pi \in \Pi_{temp}(G)$ de caractère infinitésimal $\theta_\pi = \theta$, induites paraboliques d'une série discrète, $\pi = \mathcal{I}_{P,\sigma}^G$, avec σ régulière (i.e. non stabilisée par un élément non trivial du groupe de Weyl de G relatif à A_P). Si λ est assez petit (et imaginaire pur) la série discrète σ_λ est encore régulière et en particulier $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ est irréductible (Casselman, 1989, Theorem 6.6.1). Soit $(\mathcal{V}_M)_{M \in \mathcal{L}^G}$ une collection de voisinages du caractère trivial, $\mathcal{V}_M \subset X^{nr}(M)$, assez petits pour que, si $\pi = \mathcal{I}_{P,\sigma}^G \in \Pi_\theta^{reg}$ et si $\pi' = \mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ avec $\chi_\lambda \in \mathcal{V}_M$, alors, si $\theta' = \theta_{\pi'}$, $\pi' \in \Pi_{\theta'}^{reg}$. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des représentations $\pi' \in \Pi_{temp}(G)$ de la forme $\pi' = \mathcal{I}^G_{P,\sigma,\lambda}$ avec χ_λ dans $\mathcal{V}_M$ et $\pi = \mathcal{I}^G_{P,\sigma} \in \Pi^{reg}_\theta$. Notons $\mathcal{N}$ le complémentaire de $\mathcal{M}$. Nous noterons $1_\mathcal{N}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{N}$ ainsi que son extension en une forme linéaire sur $\mathcal{R}(G)$.

LEMME 5.1. *Il existe une constante c'_G telle que, pour tout $0 < \epsilon < 1$ et tout $\theta \in \Theta(G)$, il existe une fonction $\phi_{\theta,\epsilon}$ dans $\mathcal{H}$ et un voisinage $\mathcal{V}_{\theta,\epsilon}$ de θ tels que pour toute représentation π de caractère infinitésimal dans $\mathcal{V}_{\theta,\epsilon}$*

1. $0 \leq \widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(\pi) \leq \epsilon$ *si* $\pi \in \mathcal{M}$

2. $1 \leq \widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(\pi) \leq c'_G$ *si* $\pi \in \mathcal{N}$

Proof. Supposons F non-archimédien. D'après le corollaire 3.3, nous pouvons supposer que π est de la forme $\mathcal{I}^G_{P,\sigma,\lambda}$ avec χ_λ dans $\mathcal{V}_{M,\epsilon}$, où les $\mathcal{V}_{M,\epsilon}$ sont des voisinages ouverts du caractère trivial dans $X^{nr}(M)$ inclus dans $\mathcal{V}_M$ et P un sous-groupe parabolique de Levi M .

Considérons l'ensemble des couples (M,σ) tels que $\theta_{i_{GM}\sigma} = \theta$: c'est un ensemble fini. Donc, par indépendance linéaire des caractères, il existe $\phi_{\theta,\epsilon}$ dans $\mathcal{H}$ et à valeurs réelles sur $\Pi_u(G)$ telle que si ρ appartient à $\Pi(G)$ avec $\theta_\rho = \theta$, alors

$$\widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(\rho) = \frac{\epsilon}{2} + 1_\mathcal{N}(\rho) \ .$$

De plus, pour chacun des couples (M,σ) considérés, la fonction sur $X^{nr}(M)$

$$\chi \mapsto \widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(i_{GM}\sigma \otimes \chi)$$

est continue. Et, si ℓ est la longueur de $i_{GM}\sigma$, nous avons

$$\widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(i_{GM}\sigma) = 1_\mathcal{N}(i_{GM}\sigma) + \frac{\ell\epsilon}{2}$$

En particulier, puisque $\ell \leq |W_G|$,

$$1_\mathcal{N}(i_{GM}\sigma) + \frac{\epsilon}{2} \leq \widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(i_{GM}\sigma) \leq |W_G|(1 + \frac{\epsilon}{2}) \ .$$

Par continuité, pour tout couple (M,σ) , il existe un voisinage du caractère trivial dans $X^{nr}_u(M)$, tel que :

1. si $\mathcal{I}^G_{P,\sigma} \in \Pi^{reg}_\theta$ alors $\ell = 1$ et $0 \leq \widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(i_{GM}\sigma \otimes \chi) \leq \epsilon$

2. sinon $1 \leq \widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(i_{GM}\sigma \otimes \chi) \leq 2|W_G|$.

Supposons F archimédien. Nous nous donnons un voisinage compact $\mathcal{V}$ de θ tel que toute représentation de caractère infinitésimal dans $\mathcal{V}$ est de la forme $\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$ avec $\sigma \in \Pi(M)$, pour un $M \in \mathcal{L}^G$, tel que $\Theta^G_M \theta_\sigma = \theta$ et $\lambda \in \mathcal{V}_M$.

Le lemme 3.4 nous fournit un ensemble fini E de couples $(M_i, \langle\sigma_i\rangle)_{1\leq i\leq r}$ où $M_i \in \mathcal{L}^G$ et $\langle\sigma_i\rangle$ est l'orbite sous $X^{nr}_u(M_i)$ d'une série discrète σ_i de M_i .

Le théorème (Clozel et al., 1990, Théorème 1) nous permet, étant données des fonctions $(f_{\sigma_i,\tau})_{\substack{1\leq i\leq r\\ \tau\in A(\sigma_i)}}$ dans $\mathcal{A}(G)$, de construire des fonctions $\phi_{\sigma_i,\tau} \in \mathcal{H}$ qui vérifient

1. $\widehat{\phi}_{\sigma_i,\tau}(\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau')) = 0$ si (M,σ) n'est pas W_G-conjugué à (M_i,σ_i)

2. $\widehat{\phi}_{\sigma_i,\tau}(\mathcal{I}^G_{\sigma_i,\lambda}(\tau')) = 0$ si τ' n'appartient pas à $R^\perp_{\sigma_i,\lambda}\tau$

3. $\widehat{\phi}_{\sigma_i,\tau}(\mathcal{I}^G_{\sigma_i,\lambda}(\tau)) = f_{\sigma_i,\tau}(\Theta^G_{M_i}\theta_{\sigma_i\otimes\lambda})$.

Soit $\phi = \sum_i \sum_{\tau\in A(\sigma_i)} \phi_{\sigma_i,\tau} \in \mathcal{H}$; la relation donnant les $\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$ en fonction des $\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$ peut s'écrire (Delorme, 1986, équation (2.3))

$$\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau) = \mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau) + \sum_{\substack{(\sigma',\lambda',\tau')\\ \sigma\prec\sigma'}} n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')\mathcal{I}^G_{\sigma',\lambda'}(\tau')$$

où les $n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')$ sont entiers. Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)) &= \widehat{\phi}(\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)) + \sum_{\substack{(\sigma',\lambda',\tau')\\ \sigma\prec\sigma'}} n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')\widehat{\phi}(\mathcal{I}^G_{\sigma',\lambda'}(\tau'))\\
&= \#(R^\perp_{\sigma,\lambda}\tau).\widehat{\phi}_{\sigma,\tau}(\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)) + \sum_{\substack{(\sigma',\lambda',\tau')\\ \sigma\prec\sigma'}} n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')\#(R^\perp_{\sigma',\lambda'}\tau').\widehat{\phi}_{\sigma',\lambda'}(\mathcal{I}^G_{\sigma',\lambda'}(\tau'))\\
&= \#(R^\perp_{\sigma,\lambda}\tau).f_{\sigma,\tau}(\theta) + \sum_{\substack{(\sigma',\lambda',\tau')\\ \sigma\prec\sigma'}} n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')\#(R^\perp_{\sigma',\lambda'}\tau').f_{\sigma',\tau'}(\theta) + O(\lambda)
\end{aligned}$$

par continuité et parce que les cardinaux (que nous avons notés par le signe #) des $R^\perp_{\sigma,\lambda}\tau$ ainsi que la somme $\sum_{\substack{(\sigma',\lambda',\tau')\\ \sigma\prec\sigma'}} |n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')|$ sont tous majorés par des constantes r_G et n_G ne dépendant que de G (Delorme, 1986, Proposition 2.2) .

Nous choisissons $f_{\sigma,\tau}$ de sorte que $f_{\sigma,\tau}(\theta)$ soit égal à $\epsilon/2\#(A(\sigma))$ si $\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$ appartient à $\mathcal{M}$ (où λ est tel que $\Theta^G_M\theta_{\sigma_\lambda} = \theta$) et à

$$\frac{1}{\#(R^\perp_{\sigma,\lambda}\tau)}\left(1 + \epsilon/2 + r_G n_G \max_{\substack{\sigma\prec\sigma'\\ \tau'\in A(\sigma')}} |f_{\sigma',\tau'}(\theta)|\right)$$

sinon.

Si $\pi \in \mathcal{M}$, alors $\pi = \mathcal{I}^G_{P,\sigma,\lambda}$ pour une série discrète σ régulière et donc $\pi = \mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$ pour tout $\tau \in A(\sigma)$; il s'en suit

$$\widehat{\phi}(\pi) = \#(A(\sigma)).\widehat{\phi}_{\sigma,\tau}(\pi) = \epsilon/2 + O(\lambda) \ .$$

Si $\pi \in \mathcal{N}$, alors, si $\pi = \mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$, $\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda_0}(\tau) \in \mathcal{N}$ où λ_0 est tel que $\Theta^G_M \theta_{\sigma_{\lambda_0}} = \theta$, et donc

$$\widehat{\phi}(\pi) = 1+\epsilon/2+r_G n_G \max_{\substack{\sigma \prec \sigma' \\ \tau' \in A(\sigma')}} |f_{\sigma',\tau'}(\theta)| + \sum_{\substack{(\sigma',\lambda',\tau') \\ \sigma \prec \sigma'}} n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')\#(R^{\perp}_{\sigma',\lambda'}\tau').f_{\sigma',\tau'}(\theta) + O(\lambda) \ .$$

Il en résulte que $\widehat{\phi}(\pi)$ appartient à l'intervalle $\left[1, 1+\epsilon+2r_G n_G \max_{\substack{\sigma \prec \sigma' \\ \tau' \in A(\sigma')}} |f_{\sigma',\tau'}(\theta)|\right]$ pour λ assez petit. D'où le lemme.

LEMME 5.2. *Soient $0 < \epsilon < 1$ et B une pseudo bandeverticale de $\Theta(G)$ à partie réelle compacte. Étant donnés deux ouverts $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ relativement compacts de B tels que $\overline{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W}'$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}(G)$, à valeurs réelles sur $\Theta_h(G)$ telle que*

1. $0 \leq f \leq 1+\epsilon$ *sur* $B \cap \Theta_h(G)$
2. $f(\theta) \geq 1$ *si* $\theta \in \mathcal{W} \cap \Theta_h(G)$
3. $f(\theta) \leq \epsilon$ *si* $\theta \in (B \setminus \mathcal{W}') \cap \Theta_h(G)$

Proof. Il existe une fonction g continue positive majorée par $1+\epsilon/6$ sur $B \cap \Theta_h(G)$ qui vaut $1+\epsilon/6$ sur $\mathcal{W} \cap \Theta_h(G)$ et qui est nulle en dehors de $\mathcal{W}' \cap \Theta_h(G)$. Les fonctions de $\mathcal{A}(G)$ forment une algèbre de fonctions sur $B \cap \Theta_h(G)$ séparant les points, ne s'annulant identiquement nulle part, auto-adjointe et nulles à l'infini. Nous pouvons donc, grâce au théorème de Weierstraß-Stone, approcher g sur $B \cap \Theta_h(G)$ à $\epsilon/6$ près par une fonction $f_1 \in \mathcal{A}(G)$ réelle sur $\Theta_h(G)$; la fonction $f = f_1^2$ est une solution.

Nous aurons aussi besoin d'un résultat de minoration.

LEMME 5.3. *Soit C un ensemble de $\Pi_u(G)$ dont l'image dans $\Theta(G)$ est compacte; il existe ψ dans $\mathcal{H}$ telle que $\widehat{\psi}$ est plus grande que 1 sur C et positive ou nulle sur tout $\Pi_u(G)$.*

Proof. Compte tenu de la compacité de l'image de C et du lemme 3.5, il suffit de montrer que, pour chaque point de $\theta \in \Theta(G)$, il existe ϕ dans $\mathcal{H}$ dont la transformée de Fourier scalaire ne s'annule sur aucun π de caractère infinitésimal $\theta' = \theta_\pi$ assez voisin de θ . Dans le cas p-adique, il suffit de considérer la mesure image directe, par l'injection canonique, de la mesure de Haar d'un sous-groupe ouvert compact de G assez petit. Dans le cas archimédien, nous reprenons la démonstration du lemme 5.1 excepté que nous choisissons les fonctions $f_{\sigma,\tau}$ de sorte que

$$f_{\sigma,\tau}(\theta) = \frac{1}{\#(R^{\perp}_{\sigma,\lambda}\tau)} \left(1 + \epsilon/2 + r_G n_G \max_{\substack{\sigma \prec \sigma' \\ \tau' \in A(\sigma')}} |f_{\sigma',\tau'}(\theta)| \right)$$

pour tout σ et τ . Les calculs déjà effectués montrent que $\widehat{\psi}(\pi) \geq 1$ pour tout π tel que θ_π soit dans un voisinage assez petit de θ .

THÉORÈME 5.4. *Soient $\epsilon > 0$ et C un compact de $\Theta(G)$. Il existe Ψ dans $\mathcal{H}$ telle que*

1. $\widehat{\Psi}(\pi) \geq 0$ *pour tout* $\pi \in \Pi_u(G)$,
2. $\mu^G(\widehat{\Psi}) \leq \epsilon$,
3. *Pour tout π dans $\Pi_u(G)$ avec $\theta_\pi \in C$ qui est soit non-tempérée soit tempérée mais non-induite d'une série discrète*

$$\widehat{\Psi}(\pi) \geq 1 \ .$$

Proof. Fixons nous provisoirement des réels strictement positifs $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ et un voisinage compact C_1 de C . Le lemme 5.1 nous permet pour tout $\theta \in \Theta(G)$ de fabriquer une fonction ϕ_{θ,ϵ_1} et un voisinage $\mathcal{V}_{\theta,\epsilon_1}$ de θ que nous pouvons supposer inclus dans C_1 . En faisant appel au lemme 2.6, nous voyons qu'il existe une constante c''_G ne dépendant que de G et un recouvrement de C par des ouverts $\mathcal{W}_i$ avec $1 \leq i \leq N(\epsilon_1)$ chacun étant inclus dans un certain $\mathcal{V}_{\theta_i,\epsilon_1}$ et de sorte que

$$\sum_{i=1}^{N(\epsilon_1)} 1_{\mathcal{W}_i} \leq c''_G 1_{C_1} \ ,$$

puisque tous les $\mathcal{W}_i$ sont inclus dans C_1 . Comme d'habitude, 1_X désigne la fonction caractéristique de X . Nous posons

$$M(\epsilon_1) = \sup_{\substack{i=1,\ldots,N(\epsilon_1) \\ \pi \in \Pi_u(G)}} |\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1}(\pi)| \ .$$

D'après le lemme 3.4, il existe une pseudo bande verticale à partie réelle compacte B telle que les $\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1}$ soient nulles sur toute représentation unitaire dont le caractère infinitésimal est en dehors de B . Nous choisissons un voisinage $\mathcal{W}_i'$ de chaque $\mathcal{W}_i$ tel que $\overline{\mathcal{W}_i} \subset \mathcal{W}_i' \subset C_1$ et

$$\mu^G\left(\bigcup_{i=1}^{N(\epsilon_1)} \mathcal{W}_i' \setminus \mathcal{W}_i\right) \leq \epsilon_2 \ .$$

Nous choisissons des fonctions f_i dans $\mathcal{A}(G)$ vérifiant pour chaque i le lemme 5.2 pour les données $\epsilon_3 > 0$, B, $\mathcal{W}_i$ et $\mathcal{W}_i'$.

Soit $\mathcal{N}$ le sous-ensemble de $\Theta(G)$ formé des caractères infinitésimaux des représentations tempérées induites de série discrète singulière et des caractères infinitésimaux des représentations unitaires non-induites unitaires de série discrète; nous notons $\mathcal{N}(\epsilon_1)$ le voisinage tubulaire de $\mathcal{N}$ formé des caractères de $\Theta(G)$ dont la distance à $\mathcal{N}$ est inférieure à ϵ_1 et $\mathcal{N}(\epsilon_1)^c$ son complémentaire.

LEMME 5.5. *Sur le spectre unitaire, les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^{N(\epsilon_1)} f_i\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1}| \ &\leq \ \epsilon_3(\sum_{i=1}^{N(\epsilon_1)} |\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1}|) + (1+\epsilon_3)M(\epsilon_1)N(\epsilon_1)1_{\cup_i(W_i' \setminus W_i)} \\ &\quad +(1+\epsilon_3)c_G'c_G''1_{C_1}1_{\mathcal{N}(\epsilon_1)} + (1+\epsilon_3)\epsilon_1 c_G'' 1_{C_1} \ . \end{aligned}$$

$$1_{C_1}1_{\mathcal{N}(\epsilon_1)} - \epsilon_3 N(\epsilon_1)M(\epsilon_1) \ \leq \ \sum_{i=1}^{N(\epsilon_1)} f_i\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1}$$

Proof. Rappelons que B a été choisi de sorte que

$$\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1} = 1_B\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1} \qquad \text{sur } \Pi_u(G) \ .$$

Pour tout i , nous pouvons décomposer 1_B de la façon suivante

$$1_B = 1_{B\setminus\mathcal{W}_i'} + 1_{\mathcal{W}_i'\setminus\mathcal{W}_i} + 1_{\mathcal{W}_i}\left(1_{\mathcal{N}(\epsilon_1)} + 1_{\mathcal{N}(\epsilon_1)^c}\right) \ .$$

Le lemme résulte des propriétés des fonctions f_i et $\phi_{\theta_i,\epsilon_1}$ construites par les lemmes 5.1 et 5.2.

Soit maintenant ϕ_0 dans $\mathcal{H}$ telle que $\widehat{\phi_0}$ soit plus grande que 1 sur C_1 ; c'est possible d'après 5.3. Considérons la fonction

$$\epsilon_3 N(\epsilon_1)M(\epsilon_1)\widehat{\phi_0} + \sum_{i=1}^{N(\epsilon_1)} f_i\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1} \ ,$$

C'est la transformée de Fourier scalaire d'une fonction Ψ_1 dans $\mathcal{H}$ puisque les f_i définissent des multiplicateurs de $\mathcal{H}$. D'après ce qui précède $\widehat{\Psi_1}$ est partout positive sur C_1 et plus grande que 1 sur les représentations unitaires, de caractère infinitésimal dans C_1 , non-tempérées ou tempérées mais non-induites unitaires de série discrète.

D'après les inégalités précédentes, nous avons

$$\begin{aligned}\mu^G(|\widehat{\Psi_1}|) \ \leq \ & \epsilon_3\mu^G\left(\sum_{i=1}^{N(\epsilon_1)} |\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1}|\right) + (1+\epsilon_3)M(\epsilon_1)N(\epsilon_1)\mu^G\left(\bigcup_{i=1}^{N(\epsilon_1)}(W_i' \setminus W_i)\right) \\ & +(1+\epsilon_3)c_G'c_G''\mu^G\left(C_1 \cap \mathcal{N}(\epsilon_1)\right) + (1+\epsilon_3)\epsilon_1 c_G''\mu^G\left(C_1\right) \ .\end{aligned}$$

Il est donc clair que nous pouvons choisir ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 de sorte que $\mu^G(\widehat{\Psi_1})$ soit inférieur à $\epsilon/2$.

Soit maintenant, grâce au lemme 3.5, une fonction Ψ_2 dans $\mathcal{H}$ telle que

$$|\widehat{\Psi_1}| \leq \widehat{\Psi_2} \ ,$$

sur le spectre unitaire. Soit ϵ_4 un réel strictement positif tel que

$$\mu^G(\epsilon_4\widehat{\Psi_2}) \leq \epsilon/3 \ .$$

Choisissons une fonction g dans $\mathcal{A}(G)$ telle que

$$\begin{array}{rlll} 1 & \leq g & \leq 4/3 & \text{sur} \quad C \cap \Theta_h(G) \\ 0 & \leq g & \leq 4/3 & \text{sur} \quad C_1 \cap \Theta_h(G) \\ |g| & \leq \epsilon_4 & \leq 4/3 & \text{sur} \quad \Theta_h(G) \setminus C_1 \ , \end{array}$$

comme il est loisible d'après le théorème de Weierstraß-Stone. Dans ces conditions, soit Ψ dans $\mathcal{H}$ telle que

$$\widehat{\Psi} = g\widehat{\Psi_1} + \epsilon_4\widehat{\Psi_2} \ .$$

En particulier, sur le spectre unitaire,

$$\widehat{\Psi} \geq g\widehat{\Psi_1}$$

et

$$\widehat{\Psi} \geq \epsilon_4\widehat{\Psi_2} - |g|.|\widehat{\Psi_1}| \ .$$

De la première inégalité, il résulte que, par restriction au spectre unitaire, $\widehat{\Psi}$ est supérieure à $\widehat{\Psi_1}$ sur C et est positive sur C_1 . De la seconde, nous déduisons que, toujours par restriction au spectre unitaire, $\widehat{\Psi}$ est positive en dehors de C_1 . De plus

$$\begin{aligned}\mu^G(\widehat{\Psi}) \ & \leq \ 4/3\mu^G(\widehat{\Psi_1}) + \mu^G(\epsilon_4\widehat{\Psi_2}) \\ & \leq \ 2\epsilon/3 + \epsilon/3 \\ & \leq \ \epsilon\end{aligned}$$

et donc la fonction Ψ vérifie bien les conditions requises par le théorème.

6. Extension à un produit fini

Considérons maintenant un groupe G produit de groupes G_i pour i appartenant à un ensemble fini S et où G_i est l'ensemble des points sur un corps local F_i de caractéristique 0 d'un groupe linéaire, réductif, connexe $\mathbf{G}_i$ défini sur F_i . Dans la pratique, nous prenons un corps global F sur lequel est défini le groupe $\mathbf{G}$, S un ensemble fini de places de F et nous considérons $G = \prod_{v \in S} \mathbf{G}(F_v)$, mais une telle restriction n'est pas nécessaire pour énoncer les résultats. Nous étendons les notations à cette situation produit.

Soit $\{(L_i, \sigma_i)\}_{i \in I}$ un ensemble de représentants des orbites sous le normalisateur de M_0 , agissant par conjugaison sur L et σ , et sous $X_u^{nr}(L)$ agissant par torsion sur σ , de couples (L, σ) formés d'un Levi $L \in \mathcal{L}^G$ et d'une représentation dans la série discrète σ de L . Nous supposerons de plus, ce qui est loisible, que les L_i sont des sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques Q_i qui contiennent un même sous-groupe parabolique minimal P_0 .

COROLLAIRE 6.1. *Soient $i \in I$ et $f_i \in \mathcal{A}(G)$; il existe $\Phi_i \in \mathcal{H}$ telle que*

$$\widehat{\Phi_i}(\pi) = \delta_{ij} f_i(\theta_\pi) \qquad \text{si } [\pi] = i_{GL_j}(\sigma_j \otimes \chi) \text{ avec } \chi \in X^{nr}(L_j) \ .$$

Ici δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Proof. Cela résulte directement du théorème 4.2 par produit.

COROLLAIRE 6.2. *Soient $\epsilon > 0$ et C un compact de $\Theta(G)$; il existe Ψ dans $\mathcal{H}$ telle que*

1. *$\widehat{\Psi}(\pi) \geq 0$ pour tout $\pi \in \Pi_u(G)$,*
2. *$\mu^G(\widehat{\Psi}) \leq \epsilon$,*
3. *Pour tout π dans $\Pi_u(G)$ avec $\theta_\pi \in C$ qui est soit non-tempérée soit tempérée mais non-induite d'une série discrète*

$$\widehat{\Psi}(\pi) \geq 1 \ .$$

Proof. Puisque C est compact, ses projections C_i sur G_i le sont aussi et C est inclus dans le compact $\Pi_i C_i$. Nous prendrons comme fonction Ψ une somme indexée par S de produits de fonctions :

$$\Psi = \sum_{i \in S} \left(\bigotimes_{j \in S} \Psi_j^i \right) .$$

Pour Ψ_i^i , nous prenons la fonction que nous donne le théorème 5.4; pour $i \neq j$, nous prenons Ψ_j^i positive et plus grande que 1 partout sur C_j ; une telle fonction a été construite en 5.3. Le produit de ces fonctions a bien une mesure de Plancherel (produit) arbitrairement petite. Leur somme est plus grande que 1 sur les représentations dont le caractère infinitésimal appartient à C et telles que l'un des facteurs est soit non-tempéré, soit non-induit unitaire de série discrète.

7. Théorème de densité

Soient G un produit de groupes G_i (comme au paragraphe 6), Π une pseudo bande verticale à partie réelle bornée du dual unitaire $\Pi_u(G)$ de G , F l'espace des restrictions à Π des transformées de Fourier scalaires des éléments de l'algèbre de Hecke, μ la restriction à Π de la mesure de Plancherel μ^G sur $\Pi_u(G)$, Θ une pseudo bande verticale à partie réelle compacte du sous-espace des caractères infinitésimaux hermitiens et A la restriction à Θ de $\mathcal{A}(G)$. La condition $(\star)$ du paragraphe 2 est vérifiée d'après 3.5.

Notons B_c l'espace des fonctions f sur $\Pi_u(G)$ boréliennes bornées à support dans un ensemble dont l'image dans $\Theta(G)$ est compacte. Notons R et $\overline{F}$ les espaces suivants :

1. R est l'espace des fonctions f dans B_c telles que, pour tout Levi M et toute représentation σ dans la série discrète de M , la fonction sur $X_u^{nr}(M)$,
$$\chi \to f(i_{GM}(\sigma \otimes \chi))$$
a des points de discontinuité de mesure nulle pour la mesure $\widetilde{\mu}_{M,\sigma}^G$.

2. $\overline{F}$ est l'espace des fonctions f dans B_c telles que, pour tout ϵ strictement positif, il existe ϕ et ψ dans $\mathcal{H}$ avec, pour toute représentation unitaire $\pi \in \Pi_u(G)$,
$$|f(\pi) - \widehat{\phi}(\pi)| \leq \widehat{\psi}(\pi) \quad \text{et} \quad \mu^G(\widehat{\psi}) \leq \epsilon .$$

Remarque : les espaces de fonctions R et $\overline{F}$ sont des modules sur $C_0(\Theta(G))$. C'est clair pour R . Pour $\overline{F}$, cela résulte du corollaire 2.4.

PROPOSITION 7.1. *Nous avons l'égalité* $R = \overline{F}$.

Proof. Par propriété des fonctions $\widetilde{\mu}^G_{M,\sigma}$-Riemann-intégrables (Schwartz, 1981, Théorème 63), nous voyons que $\overline{F}$ est inclus dans R . C'est l'autre inclusion que nous devons établir. Soit $f \in$ et soit C un compact de $\Theta(G)$ qui contienne un voisinage de l'image du support de f . Soit (L, σ) un couple formé d'un sous-groupe de Levi $L \in \mathcal{L}^G$ et d'une série discrète $\sigma \in \Pi_2(L)$. Considérons les fonctions

$$f_\sigma \ : \chi \to f(i_{GL}(\sigma \otimes \chi)) \ .$$

Par hypothèse, c'est une fonction $\widetilde{\mu}^G_{L,\sigma}$-Riemann-intégrable. Notons $\mu^*_{L,\sigma}$ l'image directe de la mesure $\widetilde{\mu}_{L,\sigma}$ sur $\mathcal{A}(G)$. D'après le lemme 2.1, étant donné ϵ_1 , il existe g_σ et h_σ dans $\mathcal{A}(G)$ avec

$$|f(\pi) - g_\sigma(\theta_\pi)| \leq h_\sigma(\theta_\pi) \quad \text{si } \pi = i_{GL}(\sigma \otimes \chi) \qquad \text{et} \quad \mu^*_{L,\sigma}(h_\sigma) \leq \epsilon_1 \ .$$

Soit maintenant I un ensemble de couples (L_i, σ_i) défini comme en 6.1 . Le théorème 6.1 permet de fabriquer des fonctions Φ_i et Ψ_i associées à g_{σ_i} et h_{σ_i} respectivement. Compte tenu de la compacité de l'image du support de f et d'après 3.4, les fonctions Φ_i et Ψ_i peuvent être choisies nulles sauf pour un ensemble fini d'indices de cardinal $N(f)$. Posons

$$\phi = \sum_{i=1}^{N(f)} \Phi_i \qquad \text{et} \qquad \psi_1 = \sum_{i=1}^{N(f)} \Psi_i \ .$$

Nous avons

$$|f(\pi) - \widehat{\phi}(\pi)| \leq \widehat{\psi_1}(\pi)$$

sur toute représentation π unitaire irréductible qui est une induite de série discrète d'un Levi. De plus

$$\mu^G(\widehat{\psi_1}) \leq N(f)\epsilon_1 \ .$$

Soit $c \in C_c(\Theta(G))$ positive et égale à 1 sur le support de f . L'inégalité

$$|f(\pi) - (c.\widehat{\phi})(\pi)| \leq (c.\widehat{\psi_1})(\pi)$$

a lieu partout sur $\Pi_u(G)$ sauf peut-être sur l'ensemble, de mesure nulle, des π dans le support de c qui sont non-tempérées ou tempérées mais non-induites de séries discrètes. Il existe un réel a tel que

$$|f(\pi) - (c.\widehat{\phi})(\pi)| + |(c.\widehat{\psi_1})(\pi)| \leq a$$

partout sur $\Pi_u(G)$. D'après le théorème 5.4 , il existe une fonction Ψ de mesure arbitrairement petite, de sorte que, partout sur $\Pi_u(G)$,

$$|f(\pi) - (c.\widehat{\phi})(\pi)| \leq (c.\widehat{\psi_1})(\pi) + a\widehat{\Psi}(\pi)$$

et donc

$$|f - g| \leq h \qquad \text{avec} \qquad g = c.\widehat{\phi} \qquad \text{et} \qquad h = c.\widehat{\psi}_1 + a\widehat{\Psi}$$

et telle que $\mu^G(h)$ soit arbitrairement petit. D'après 2.2 et 2.3 cela implique $f \in \overline{F}$.

LEMME 7.2. *Si U est un ouvert, borné, μ^G-régulier, de $\Pi_u(G)$, sa fonction caractéristique appartient à R .*

Proof. Notons f la fonction caractéristique de U prolongée comme d'habitude en forme linéaire sur $\mathcal{R}(G)$. La fonction f est μ^G-mesurable car U est ouvert. Soient $M \in \mathcal{L}^G$ et $\sigma \in \Pi_2(M)$, la fonction

$$f_\sigma \ : \ \chi \mapsto f(i_{GM}(\sigma \otimes \chi))$$

prend des valeurs entières positives ou nulles. Distinguons les sauts de 0 à 1 des autres. Les sauts de 0 à 1 correspondent à des points de la frontière de U et sont donc par hypothèse de $\tilde{\mu}^G_{M,\sigma}$-mesure nulle. Les autres sauts se produisent en des points où f_σ vaut plus que 1 et donc où l'induite $i_{GM}(\sigma \otimes \chi)$ n'est pas irréductible. Ces points sont soit en dehors du support de la mesure, soit dans un ensemble de codimension 1 car ils sont stabilisés par un élément non trivial de W_M d'après (Silberger, 1979, Theorem 2.5.9) en p-adique et (Enright, 1979, Theorem 1 et Theorem (page 6)) en archimédien. En conséquence, ces points sont de $\tilde{\mu}^G_{M,\sigma}$-mesure nulle; en effet, cette mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $X^{nr}_u(M)$.

En résumé nous avons démontré le théorème de densité suivant.

THÉORÈME 7.3. (Théorème de densité). *Soit G un produit de groupes G_i pour i appartenant à un ensemble fini S avec G_i l'ensemble des points sur un corps local F_i de caractéristique 0 d'un groupe linéaire, réductif, connexe $\mathbf{G}_i$ défini sur F_i . Soit f une fonction sur $\Pi_u(G)$ μ^G-mesurable bornée et à support dans un ensemble d'image compacte dans $\Theta(G)$.*

(a) Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. *Pour tout Levi M et toute représentation σ dans la série discrète de M , la fonction sur $X^{nr}_u(M)$,*

$$\chi \to f(i_{GM}(\sigma \otimes \chi))$$

a des points de discontinuité de mesure nulle pour la mesure $\tilde{\mu}^G_{M,\sigma}$.

2. Pour tout ϵ strictement positif, il existe ϕ et ψ dans $\mathcal{H}$ vérifiant, pour toute représentation unitaire $\pi \in \Pi_u(G)$,

$$|f(\pi) - \widehat{\phi}(\pi)| \leq \widehat{\psi}(\pi) \qquad et \qquad \mu^G(\widehat{\psi}) \leq \epsilon \ .$$

(b) En particulier, soit f la fonction caractéristique d'un ouvert μ^G-régulier de $\Pi_u(G)$ et à support dans un ensemble d'image compacte dans $\Theta(G)$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe ϕ et ψ dans $\mathcal{H}$ telles que

$$|f - \widehat{\phi}| \leq \widehat{\psi} \qquad et \qquad \mu^G(\widehat{\psi}) < \epsilon \ .$$

Proof. (a) est une reformulation de la proposition 7.1 et (b) résulte du (a) et du lemme 7.2.

COROLLAIRE 7.4. *Soit $G = \mathbf{G}(F_S)$. Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures boréliennes positives sur $\Pi_u(G)$ telle que pour toute $\phi \in \mathcal{H}$ la fonction $\widehat{\phi}$ est μ_n-intégrable (pour tout n) et vérifie*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\widehat{\phi}) = \mu^G(\widehat{\phi}) \ .$$

Alors, pour tout ouvert $U \subset \Pi_u(G)$, borné et régulier pour la mesure de Plancherel

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(U) = \mu^G(U) \ .$$

Proof. En effet, nous venons de voir que, si f est la fonction caractéristique de U , pour tout ϵ strictement positif, il existe ϕ et ψ dans $\mathcal{H}$ telles que $|f - \widehat{\phi}| \leq \widehat{\psi}$ et $\mu^G(\widehat{\psi}) \leq \epsilon$. Le corollaire résulte alors des calculs effectués en 1.3 .

Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à remercier J-P. Labesse à qui je dois la majeure partie des mathématiques que je connais, en particulier celles contenues dans ce travail. Je remercie également P. Delorme pour la relecture minutieuse et les critiques constructives qu'il a faites sur ma thèse (qui est à la base de ce manuscrit) et, enfin, J-L. Waldspurger qui m'a communiqué une démonstration du théorème 3.2 qui est crucial et qui n'était qu'une conjecture dans ma thèse.

References

J.N. Bernstein, P. Deligne, 1984, Le "centre" de Bernstein, in *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris

J.N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, 1986, Trace Paley-Wiener theorem for reductive p-adic groups, *Journal d'Analyse Mathématique* 47, 180-192

A. Borel, N. Wallach, 1980, *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups*, Annals of Mathematics Studies, Study 94, Princeton University Press

N. Bourbaki, *Topologie Générale, I-X, Deuxième édition,* Hermann, Paris

W. Casselman, 1989, Introduction to the Schwartz space of $\Gamma\backslash G$, *Canadian Journal of Mathematics* 45, 285-320

W. Casselman, Some general results in the theory of admissible representations of p-adic groups (preprint)

L. Clozel et P. Delorme, 1984, Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs, Inventiones mathematicæ 77, 427-453

L. Clozel, 1986, On limit multiplicities of discrete series representations in spaces of automorphic forms, Inventiones mathematicæ 83, 265-284

L. Clozel et P. Delorme, 1990, Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs II, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (4) 23, 193-228

L. Corwin, 1977, The Plancherel measure in nilpotents groups as a limit of point measures, Mathematische Zeitschrift 155, 151-162

D.L. DeGeorge et N. Wallach, 1978, Limit formulas for multiplicities in $L^2(\Gamma\backslash G)$, Annals of Mathematics 107, 133-150

D.L. DeGeorge et N. Wallach, 1979, Limit formulas for multiplicities in $L^2(\Gamma\backslash G)$, II. The tempered spectrum, Annals of Mathematics 109, 477-495

P. Delorme, 1986, Formules limites et formules asymptotiques pour les multiplicités dans $L^2(G/\Gamma)$, Duke Mathematic Journal 55, 691-731

J. Dixmier, P. Malliavin, 1978, Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables, Bulletin des sciences mathématiques 102, 307-330

T. Enright, 1979, On the fundamental series of a real semisimple Lie algebra : their irreducibility, resolution and multiplicity formulae, Annals of mathematics 110, 1-82

L. Evans, R. Gariepy, 1992, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in advanced mathematics, CRP Press, Boca Raton

J. M. G. Fell, 1960, The dual space of $\mathbb{C}^*$-algebras, Transactions of the American Mathematical Society 94, 365-403

R. Godement, 1962, La formule des traces de Selberg, in *Séminaire Bourbaki, exposé 244*

Harish-Chandra, 1976, Harmonic analysis on real reductive groups, III, Annals of Mathematics 104, 117-210

Harish-Chandra, 1970-1983, The Plancherel formula for reductive p-adic groups, in *Harish-Chandra collected papers volume 4*

D. Kazhdan, 1986, Cuspidal geometry of p-adic groups, Journal d'analyse mathématique 47, 1-36

A. Knapp, 1986, *Representation theory of semisimple groups : An overview based on examples*, Princeton University Press

J-P. Labesse, 1990, The present state of the trace formula, in *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-Functions*, Academic Press

Ronald L. Lipsman, The dual topology for the principal and discrete series on semisimple groups, Transactions of the American Mathematical Society 152, 399-417

J. Rohlfs, B. Speh, 1987, On limit multiplicities of representations with cohomology in the cuspidal spectrum, Duke Mathematical Journal 55, 199-212

F. Sauvageot, 1994, *Représentations unitaires d'algèbres et de super-algèbres,* Thèse de l'Université Paris 7 Denis Diderot

G. Savin, 1989, Limit multiplicities of cusp forms, Inventiones Mathematicæ 95, 149-159

L. Schwartz, 1981, *Cours d'analyse*, Hermann, Paris

A. J. Silberger, 1979, *Introduction to harmonic p-adic analysis*, Princeton University Press, Princeton

M. Tadić, 1988, Geometry of the dual space of reductive groups (non-archimedean case), Journal d'Analyse Mathématique 51, 139-181

D. A. Vogan, 1979, The algebraic structure of representation of semisimple Lie Groups I, Annals of Mathematics 109, 1-60

D. A. Vogan, 1981, *Representations of real reductive Lie groups*, Progess in mathematics, Birkhaüser

N. Wallach, 1990, Limit multiplicities in $L^2(G/\Gamma)$, in *Cohomology of arithmetic groups and automorphic forms* J(.P. Labesse et J. Schwermer Editeurs), Lecture Notes in Mathematics 1447, Springer-Verlag, Heidelberg