UNIVERSITÉ PARIS 7
Denis DIDEROT

THÈSE de DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

Présentée par : François SAUVAGEOT

Sujet : Représentations unitaires d'algèbres et de super-algèbres

Soutenue le 28 septembre 1994 devant la commission d'examen

Colette MOEGLIN

Laurent CLOZEL

Patrick DELORME (Rapporteur et Président)

Guy HENNIART

Jean-Pierre LABESSE (Directeur)

Jürgen ROHLFS (Rapporteur)

Au parfum de la fleur de Mai.

Science ! true daughter of Old Time thou art !
Who alterest all things with thy peering eyes.
Why preyest thou upon the poet's heart,
Vulture, whose wings are dull realities ?
How should he love thee ? or how deem thee wise ?
Who wouldst not leave him in his wandering,
To seek for treasure in the jewelled skies,
Albeit he soared with an undaunted wing ?
Hast thou not dragged Diana from her car ?
And driven the Hamadryad from the wood
To seek a shelter in some happier star ?
Hast thou not torn the Naiad from her flood,
The Elfin from the green grass, and from me
The summer dream beneath the tamarind tree ?

Edgar Allan Poe

Cette thèse est le fruit d'un long travail sous la direction et les conseils de Jean-Pierre Labesse ainsi que du contact de sa vaste culture mathématique. Les textes qui suivent ne peuvent que mettre à nu ma dette envers lui. C'est lui qui me conseilla de suivre les cours de Roger Godement et de Robert Langlands qui ont très certainement suscité en moi le goût pour le programme de Langlands. Je tiens à le remercier très sincèrement.
Ma gratitude va aussi à Patrick Delorme qui a eu la patience de relire un manuscrit trop souvent incomplet. Je le remercie vivement pour l'aide qu'il m'a apportée, pour les conseils qu'il m'a fournis et pour sa rigueur.
C'est à Eichstätt que j'ai rencontré pour la première fois Jürgen Rohlfs et son accueil fut pour moi un grand plaisir. Je le remercie pour tout le temps qu'il a accordé à ce manuscrit et espère qu'il ne m'en veut pas trop de ne pas être aussi doué que Wagner pour écrire des choses *"so trivial, but so good"*!
J'aimerais aussi profiter de l'occasion pour exprimer à Guy Henniart tout ce que je lui dois tant sa gentillesse, sa culture, son énergie et son enthousiasme sont des lumières qui guident l'étudiant (et sûrement aussi le chercheur confirmé) quand il est au milieu du tunnel.
Je remercie également Colette Moeglin et Laurent Clozel de l'intérêt qu'ils portent à mes travaux en acceptant de faire partie du jury.

"*Nous sommes des nains montés sur les épaules de géants"* disait Bernard de Chartres et c'est ce qui nous permet (peut-être) de voir plus loin. Le chemin fut long pour monter sur ces épaules, où je reste encore vacillant, et je tiens à remercier ceux qui m'ont fait la courte échelle, mes instituteurs, et tout particulièrement Madame Amar qui m'apprit que la générosité est une richesse et combien Socrate était clairvoyant en disant : " *Tout ce que je sais, c'est que je ne sais rien"*.
Quand on est issu d'une génération qui chantait *"Hope I die before I get old"*, on a très tôt besoin de trouver son propre chemin et d'apporter de nouvelles solutions. Bien sûr une telle attitude éprouve la patience de certains (une institutrice avait trouvé un remède : le scotch sur les lèvres !) mais d'autres savent canaliser le trop plein d'énergie pour faire naître l'enthousiasme et (peut-être) la vocation. Tels furent les enseignements de Madame Mathiaud, mon professeur de mathématiques au collège. C'est très certainement elle qui m'a donné l'attrait pour la pédagogie et l'envie d'être enseignant. Et elle aussi qui a transformé un simple goût pour les maths en une passion. Je la remercie du fond du cœur tant cette passion a toujours été un havre où je me ressource constamment.
Même si j'adhère à la phrase de Jean Convert *"Et Dieu, pour punir les terriens, envoya sur terre le premier mathématicien"*, j'ai trouvé chaleur et réconfort en certains d'entre eux, et tout

particulièrement Elisabeth Logak, Gabriel Fractman, Alain Trouvé et Antoine Chambert-Loir. *“Le scientifique est en général traité comme un enfant gâté dans le monde d’aujourd’hui, profitant de privilèges qui sont déniés à un grand nombre de gens : bonnes conditions de travail, environnement confortable, sécurité financière, moyens de communications étendus, contacts répétés avec les collègues étrangers, plus de temps libre, plus grande liberté pour apprendre et réfléchir. [...] Personne ne serait moins justifié pour utiliser l’insécurité personnelle comme excuse pour ne rien faire, ne serait-ce que refuser de collaborer avec les militaires”.* Dans cette longue énumération Alexandre Grothendieck oublie certains privilèges, mais c’est très certainement parce qu’il ne lui a jamais été donné de travailler avec Martine Labruyère ! Qu’il me soit permis de lui rendre hommage, ainsi qu’à tout le secrétariat du DMI.

Je crois bien ne pas avoir suivi les conseils de Marie Baradlay [‡] : *“Nous, nous sommes des énergumènes qui donnons tout ce que nous avons pour un rien, une idée, un rêve. Nous nous torturons et nous mourrons. Ne sois jamais d’accord avec nous. Sois un homme heureux”.* J’aimerais en profiter pour saluer tous les énergumènes qui ont partagé les idées – de la F.A. au kyoku – et les rêves – en particulier les mondes fictifs, de Greyhawk au Haut-Royaume. L’assoiffé d’azur que je suis voudrait aussi célébrer les poèmes dont il s’est abreuvé ; ceux en bleu et rouge de Caroline et ceux, mathématiques, de Daniel [‡‡]– . Et puis qu’est-ce qui est plus précieux que les gemmes et que l’or ? Rien. Plus dur que le fer ? Rien. Plus grand que l’océan ? Rien. C’est donc une chose très précieuse que Rien ! [††]

Enfin, le plus important, je veux témoigner de toute mon affection à Claude, Charles, Yvonne et Yvonne et aussi, tout particulièrement à Lili, Daya et Maï car elles m’ont montré, entre autre, que l’*Amour est un banquet dont nous nous nourrissons.*

‡. dans *“les trois fils de Cœur-de-Pierre” (A kószívú ember fiai)* de Maurice Jókai

‡‡. quoique dise Engels de Fourier ... !

††. Jean Passerat

Présentation

Le travail présenté se compose de deux parties indépendantes.

La première partie reproduit un article, dont le but est de prouver le critère d'unitarisabilité annoncé par D. Friedan, Z. Qiu et S. Shenker [FQS85b] pour les représentations des super-algèbres de Ramond et de Neveu-Schwartz. Ces algèbres sont les versions super-symétriques de l'algèbre de Virasoro. Un théorème analogue pour l'algèbre de Virasoro avait été annoncé par D. Friedan, Z. Qiu et S. Shenker [FQS85a] ; une preuve détaillée a été publiée par R. P. Langlands [Lan88].
Cet article a été publié dans la revue *Communications in mathematical physics*, volume 121, pages 639 à 657, en mai 1989.

Dans la seconde partie on étudie les mesures limites des mesures obtenues par décomposition spectrale des quotients de groupes de Lie par des sous groupes discrets de plus en plus petits. Nous obtenons une nouvelle démonstration et des généralisations des résultats de L. Corwin [Cor77] pour les groupes de Lie nilpotents, D. De George, N. Wallach et P. Delorme [DGW78, DGW79, Del86] pour les groupes de Lie semi-simples.

Il y a dans les entrailles de la terre une faculté formatrice qui, à la manière d'une femme enceinte, reproduit dans son sein, à l'intérieur des pierres, les choses humaines telles qu'elle les voit : telles, des images de soldats, de moines, d'évêques, de rois (...) Ceci est assez rare. Mais ce qui est constant, c'est qu'elle reproduit dans les gemmes et les minéraux les cinq corps réguliers de la géométrie. L'œuvre, en effet, témoigne de l'ouvrier.

Johannes Kepler – Strena, seu de nive sexangula

Chapitre 1

Représentations unitaires des super-algèbres de Ramond et de Neveu-Schwartz

Je vais d'abord développer cette opinion jusqu'au bout, puis j'examinerai si elle est vraie : je crains que la révélation importune de sa fausseté ne m'empêche de faire ce que j'ai décidé : des mots sur un Rien.

Johannes Kepler – Strena, seu de nive sexangula

I Énoncé du problème

I.1 Introduction

On s'intéresse aux représentations de l'algèbre de Virasoro et ses analogues super-symétriques (Ramond et Neveu-Schwartz) : on construit une forme bilinéaire contravariante sur l'espace de la représentation [Jan79, Kac79, Roc85], et on cherche les représentations qui sont unitarisables pour cette forme .

Le fait majeur est que l'on trouve un quart de plan "trivial" d'unitarisabilité, et des "séries" indexées par des entiers [BPZ84, FQS85a, FQS85b, KW85, Lan88, Roc85, Sha72]. Le paragraphe II.1 est consacré à l'analyse du cas "trivial" $z \geq 3/2$ et $h \geq 0$. Et à partir de ce paragraphe, le plan de l'ouvrage suit celui de [Lan88]. Les propriétés découlant immédiatement de [Lan88] (et, pour certains points techniques, de [Roc83]) seront énoncées par souci de complétude, mais non redémontrées.

Les théorèmes 2 et 3 ont été énoncés, et une preuve reposant essentiellement sur des calculs numériques est donnée dans [FQS85a, FQS85b]. Les théorèmes réciproques sont démontrés dans [KW85]. Une démonstration analytique du théorème 2 est donnée dans [Lan88].

I.2 Super-algèbres et Super-algèbres de Lie.

Définition 1. Si **G** est un groupe abélien, une algèbre A est dite **G**-graduée si A se décompose en une somme directe de sous-espaces $A = \bigoplus_{\alpha \in G} A_\alpha$, pour lesquels $A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta}$. Un élément a de A_α est dit homogène de degré α, on note $deg\ a = \alpha$.

Remarque . Si dans une formule, on écrit $deg\ a$, ceci sous-entend que a est homogène et que la formule s'étend par linéarité à A.

Définition 2. Une super-algèbre est une algèbre $\mathbf{Z}_2$-graduée. Les éléments homogènes de degré $\bar{0}$ sont dits pairs, ceux de degré $\bar{1}$ sont dits impairs.

Définition 3. Une super-algèbre de Lie est une super-algèbre $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ avec un crochet [,], tel que :

(SL 1) $[a, b] = (-1)^{(deg\ a)(deg\ b)}[b, a]$ (anti-commutativité),

(SL 2) $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{(deg\ a)(deg\ b)}[b, [a, c]]$ (identité de Jacobi).

Remarques . $A_{\bar{0}}$ est une algèbre de Lie ordinaire. $A_{\bar{1}}$ est un $A_{\bar{0}}$-module. La donnée de cette super-algèbre de Lie est alors équivalente à la donnée d'un homomorphisme de $A_{\bar{0}}$-modules $\varphi : S^2 A_{\bar{1}} \longrightarrow A_{\bar{0}}$ tel que $\varphi(a, b)c + \varphi(b, c)a + \varphi(c, a)b = 0$.

Exemple fondamental : si A est une super-algèbre associative, le crochet défini par $[a,b] = ab - (-1)^{(deg\ a)(deg\ b)}ba$ en fait une super-algèbre de Lie.

Remarque . On construit, comme pour les algèbres de Lie, la super-algèbre enveloppante universelle par $T(A) = K \oplus A \oplus (A \otimes A) \oplus \ldots$. Les $A \otimes \ldots \otimes A$ étant tous $\mathbf{Z}_2$-gradués, T l'est aussi par linéarité. On a alors $U(A) = T(A)/R$ où R est l'idéal bilatère engendré par les $[a,b] - a \otimes b + (-1)^{(deg\ a)(deg\ b)} b \otimes a$.

Théorème 1 (PBW) *Si $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ est une super-algèbre de Lie, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ une base de $A_{\bar{0}}$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ une base de $A_{\bar{1}}$, alors une base de $U(A)$ est donnée par les éléments de la forme $a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} b_{i_1} \ldots b_{i_s}$ avec $k_i \geq 0$ (pour $1 \leq i \leq m$) et $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n$.*

Cf., par exemple, [Kac77].

I.3 L'algèbre de Virasoro. Le théorème de Friedan-Qiu-Shenker

On peut construire l'algèbre de Virasoro de différentes manières (toutes instructives). L'une de celles-ci consiste à s'intéresser à l'algèbre ν, algèbre de Lie des champs de vecteurs sur le cercle à série de Fourier finie (i.e. polynômiaux). On sait alors que $H^2(\nu, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}$. Un cocycle non nul est donné par :

$$\gamma\left(\frac{1}{i}e^{ki\theta}\frac{d}{d\theta}, \frac{1}{i}e^{li\theta}\frac{d}{d\theta}\right) = \delta_{k,-l}\frac{k(k^2-1)}{12}$$

pour $k, l \in \mathbf{Z}$. L'algèbre de Virasoro est alors isomorphe à l'extension centrale (universelle) $\mathcal{G} = \nu \oplus \mathbf{C}$, correspondant au cocycle γ.
L'isomorphisme envoie L_k sur $\left(\frac{1}{i}e^{ki\theta}\frac{d}{d\theta}, 1\right)$ et Z sur $(0,1)$. Et, en fait, $\mathcal{G}$ est le revêtement universel de ν.
On obtient ainsi une algèbre de Lie complexe ayant pour base $\{L_k, Z\}_{k \in \mathbf{Z}}$, satisfaisant aux relations :

$$\begin{aligned} [L_k, L_n] &= (k-n)L_{k+n} + \delta_{k,-n}\frac{k(k^2-1)}{12}Z \\ [L_n, Z] &= 0 \end{aligned}$$

La sous-algèbre de Cartan associée est alors $\mathcal{H} = \mathbf{C}L_0 \oplus \mathbf{C}Z$, et, pour $\lambda \in \mathcal{H}^\star$ tel que $\lambda(L_0) = h$ et $\lambda(Z) = z$, on définit

$$M_\lambda = \{v \in M \ / \ L_0 v = hv, Zv = zv\}$$

où M est un $\mathcal{H}$-module.

Une représentation $\mathbf{M}$ de $\mathcal{G}$ avec plus haut poids λ est alors une représentation engendrée par un vecteur v_λ tel que :

$$\begin{cases} L_k v_\lambda = 0 & \text{pour } k > 0 \\ L_0 v_\lambda = h v_\lambda \quad et \quad Z v_\lambda = z v_\lambda \end{cases}$$

v_λ est alors appelé vecteur de plus haut poids de $\mathbf{M}$.
Le module de Verma associé à λ est alors ainsi construit :

$$M(\lambda) = U(\mathcal{G}) \otimes_{U(\mathcal{B})} \mathbf{C}(\lambda)$$

où $\mathcal{B}$ est le sous-espace de Borel associé à G (i.e. $\mathcal{B} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}$, avec $\mathcal{N} = \oplus_{i>0} L_i$ — on note également $\mathcal{N}^- = \oplus_{i<0} L_i$—) et où $\mathbf{C}(\lambda)$ est le $\mathcal{B}$-module de dimension 1 avec une $\mathcal{H}$-action donnée par λ et une $\mathcal{N}$-action triviale.
Par simple calcul de crochets, il est alors clair que $M(\lambda) = \oplus_{m \in \mathbf{N}} M(\lambda)_{\lambda - m}$.
On construit ensuite une forme bilinéaire symétrique contravariante ainsi : soit ω l'anti-automorphisme linéaire de $U(\mathcal{G})$ tel que $\omega(L_k) = L_{-k}$, $k \in \mathbf{Z}$ et qui laisse invariant Z. Soit β la projection de $U(\mathcal{G}) = U(\mathcal{H}) \oplus (\mathcal{N}^- U(\mathcal{G}) + U(\mathcal{G})\mathcal{N})$ sur $U(\mathcal{H})$; remarquons enfin que l'on peut prendre pour v_λ le vecteur $1 \otimes 1$ de $M(\lambda)$. On définit alors :

$$\langle X v_\lambda, Y v_\lambda \rangle = (\lambda \circ \beta)(\omega(X) Y).$$

La forme est contravariante en ce sens que :

$$\langle X v, w \rangle = \langle v, \omega(X) w \rangle$$

pour $X \in U(\mathcal{G})$ et $v, w \in M(\lambda)$. Grâce à cette contravariance, on a une décomposition en somme directe orthogonale (i.e. $\langle v, w \rangle = 0$ si $v \in M(\lambda)_\mu$ et $w \in M(\lambda)_\nu$ pour $\mu \neq \nu$). Il est alors clair que le radical de cette forme est l'unique sous-module maximal de $M(\lambda)$ et donc que $L(\lambda) = M(\lambda)/Rad\langle ., . \rangle$ est l'unique quotient irréductible de $M(\lambda)$.
On dit alors que la représentation définie par λ est unitarisable si, sur $L(\lambda)$, elle donne une représentation unitaire. D'une manière équivalente, ceci signifie que la forme $\langle ., . \rangle$ est non-négative sur $M(\lambda)$.
On a alors le théorème suivant [FQS85a, Lan88] :

Théorème 2 (Friedan-Qiu-Shenker) *La forme $\langle ., . \rangle$ est non-négative si et seulement si :*

(i). soit $z \geq 1$ et $h \geq 0$,

(ii). soit il existe un entier $m \geq 2$ et deux entiers p, q tels que $1 \leq q \leq p < m$ et :

$$z = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \qquad h = \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)}.$$

L'objet de la présente étude est de prouver l'analogue de ce théorème dans le cas super-symétrique (cf. également [FQS85b]).

I.4 Les super-algèbres de Ramond et de Neveu-Schwartz

Celles-ci sont définies par les relations suivantes :

(i). ν_ϵ est engendrée par Z, $\{L_k\}_{(k\in\mathbf{Z})}$, $\{F_l\}_{l\in\epsilon+\mathbf{Z})}$, $\epsilon = 0$ ou $1/2$,

(ii). $[L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j} + \frac{1}{12}(i^3 - i)\delta_{i,-j}Z$,

(iii). $[F_i, F_j] = 2L_{i+j} + \frac{1}{3}(i^2 - \frac{1}{4})\delta_{i,-j}Z$,

(iv). $[F_i, L_j] = (i - \frac{j}{2})F_{i+j}$,

(v). Z est central.

$\nu_{\epsilon,\bar{0}}$ est engendrée par Z et les L_k, et $\nu_{\epsilon,\bar{1}}$ est engendrée par les F_k.
La sous-algèbre de Cartan est définie de la même manière, en rajoutant (si nécessaire) F_0.
Les notions de sous-espaces propres associés à un poids, de représentations avec plus haut poids, de modules de Verma se généralisent immédiatement ; et on a encore (avec exactement la même construction) une unique (à multiplication par un scalaire près) forme bilinéaire symétrique contravariante, ainsi qu'un unique quotient irréductible.
Nous nous proposons alors de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3 *La forme $\langle ., . \rangle$ est unitarisable si et seulement si :*

(i). soit $z \geq 3/2$ et alors $h \geq 0$ ($\epsilon = 1/2$) ou λ réel (ϵ=0),

(ii). soit il existe un entier m et deux entiers p et q tels que :

$$0 < q \leq p + 1 - 2\epsilon \leq m + 2 - 2\epsilon \quad et \quad p - q + 1 - 2\epsilon \in 2\mathbf{Z}$$

$$z = 3/2\left(1 - \frac{8}{(m+2)(m+4)}\right) \ \ et \ h = \frac{((m+4)p - (m+2)q)^2 - 4}{8(m+2)(m+4)} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right).$$

On abrégera souvent $\pi(X).v$ en Xv.
Si α et β sont deux multi-indices $(n_1, \ldots, n_t)$ et $(l_1, \ldots, l_s)$ (respectivement), avec $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t > 0$ et $l_1 > l_2 > \ldots > l_s$, $r, s \in \mathbf{N}$, on note $\alpha \cdot \beta$ le double multi-indice donné par α et β,

$$v_{\alpha\cdot\beta} = F_{-l_s} \ldots F_{-l_1} L_{-n_t} \ldots L_{-n_1} v_\phi.$$

Alors le module de Verma V ($= M(\lambda)$), est engendré par les $v_{\alpha\cdot\beta}$ pour α et β décrivant tous les multi-indices entiers.
On a nécessairement $\lambda^2 = h - \frac{z}{24}$, en effet :

$$\lambda^2 = \langle F_0^2 v_\phi, v_\phi\rangle = \left\langle \frac{1}{2}[F_0, F_0]v_\phi, v_\phi \right\rangle = \left\langle \left(L_0 - \frac{Z}{24}\right) v_\phi, v_\phi \right\rangle = h - \frac{z}{24}.$$

Et donc, les représentations sont indexées soit par h et z, si $\epsilon = 1/2$, soit par λ et z sinon.

II Première analyse du problème

II.1 Premiers paramètres : p, q et m

Première réduction :

Lemme II.1 *[Lan88] Si la forme $\langle .,. \rangle$ est non-négative, alors $h \in \mathbf{R}_+$, $z \in \mathbf{R}_+$, (et $h \geq \frac{z}{24}$ si $\epsilon = 0$).*

$$\textit{Posons :} \begin{cases} z(m) = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{8}{(m+2)(m+4)}\right) \\ h^{\epsilon}_{p,q}(m) = \dfrac{((m+4)p-(m+2)q)^2 - 4}{8(m+2)(m+4)} + \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2} - \epsilon\right). \end{cases}$$

Pour $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r > 0$ et $l_1 > \ldots > l_s > 0$, soit $\alpha \cdot \beta = (k_1, \ldots, k_r) \cdot (l_1, \ldots, l_s)$, notons $\rho(\alpha \cdot \beta) = r + s$ et $\nu(\alpha \cdot \beta) = \sum_{i=1}^{r} k_i + \sum_{j=1}^{s} l_j$.
Alors $V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$ avec $V_n = Vect(v_{\alpha \cdot \beta} \ / \ \nu(\alpha \cdot \beta) = n)$, et les V_n sont 2 à 2 orthogonaux pour la forme $\langle .,. \rangle$.

Il existe une autre forme sesquilinéaire définie sur V, à savoir $\{v_{\alpha \cdot \beta}, v_{\gamma \cdot \delta}\} = \delta_{\alpha,\gamma}\delta_{\beta,\delta}$ étendue par linéarité. Les V_n sont encore orthogonaux pour cette forme et, en se restreignant à V_n, on peut écrire :

$$\langle u, v \rangle_n = \{H_n(u), v\}_n$$

avec H_n opérateur linéaire hermitien (dépendant de (h, z) ou de (λ, z) selon le cas).
Dénotons par $P(n)$ la dimension de V_n. Le point crucial de la démonstration est la formule de Kac pour le déterminant de H_n (cf. [KW85] par exemple) :

$$\det H_n = A_n \prod_{k \leq 2n} \prod_{\substack{pq = k \\ 1 - 2\epsilon + p - q \in 2\mathbf{N}}} (h - h^{\epsilon}_{p,q}(m))^{P(n - \frac{pq}{2})} \qquad \textit{si } z = z(m),$$

avec $A_n > 0$.
Cette formule permet de démontrer la non-négativité pour $h \geq 0$, $z \geq \frac{3}{2}$, et $h \geq \frac{z}{24}$ (si $\epsilon = 0$) :

Proposition II.1 *La forme $\langle .,. \rangle$ est non-négative pour $h \geq 0$, $z \geq \frac{3}{2}$, $h \geq \frac{z}{24}$ (si $\epsilon = 0$).*

Preuve : Par continuité, il suffit de le voir pour $h > 0$, $z > \frac{3}{2}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Si $z = z(m) > \frac{3}{2}$, alors, pour $\epsilon = 0$

$$(h - \frac{z}{24}) - (h^0_{p,q}(m) - \frac{z}{24}) = h - \frac{z}{24} - \frac{[(m+4)p-(m+2)q]^2}{8(m+2)(m+4)}.$$

Or $z(m) > \frac{3}{2}$ impose $(m+2)(m+4) < 0$. Donc $h - h^0_{p,q} > 0$. Pour $\epsilon = \frac{1}{2}$, $z(m) > \frac{3}{2}$ impose $m \in]-4, -2[$ ou $m = 3 + i\delta$ ($\delta \in \mathbf{R}$, $i^2 = -1$).

Dans le premier cas $2q \leq (m+4)(p-q)+2q$ prouve que $h^{1/2}_{p,q}(m) \leq 0$; dans le second cas, on a $Im(h^{1/2}_{p,q}(m)) \neq 0$.

D'où $\det H_n \neq 0$. Il suffit donc de prouver la proposition pour *une* paire (h,z) (ou (λ,z)).

On va démontrer par récurrence que :

$$(i) \qquad \langle v_{\alpha\cdot\beta}, v_{\alpha\cdot\beta}\rangle = c_{\alpha,\beta} h^{\rho(\alpha\cdot\beta)}(1+o(1)) \qquad c_{\alpha,\beta} > 0$$

$$(ii) \qquad \langle v_{\alpha\cdot\beta}, v_{\gamma\cdot\delta}\rangle = o(h^{\frac{\rho(\alpha\cdot\beta)+\rho(\gamma\cdot\delta)}{2}}) \quad si\ (\alpha\cdot\beta) \neq (\gamma\cdot\delta).$$

La récurrence se fait sur $\rho(\alpha\cdot\beta)+\rho(\gamma\cdot\delta)$.

Pour prouver ceci, nous avons besoin de deux lemmes de "réordonnement" assez naturels et dont les démonstrations sont triviales :

Lemme II.2 *Pour tout* $r \geq 1$, $(k_i)_{1\leq i\leq r} \in \mathbf{N}^{*r}$, $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq r} \in \{0,1\}^r$

$$X^{\epsilon_r}_{-k_r}\ldots X^{\epsilon_1}_{-k_1} v_\phi = \sum_{\substack{\nu(\alpha\cdot\beta)=\Sigma_{i=1}^r k_i \\ \rho(\alpha\cdot\beta)\leq r}} s(\alpha\cdot\beta) v_{\alpha\cdot\beta}$$

où on a convenu que $X^0_{-k_i} = L_{-k_i}$ *et* $X^1_{-k_i} = F_{-k_i}$ *et où les* $s(\alpha\cdot\beta)$ *sont des réels (en fait au plus demi-entiers), indépendants de* h, z *et* λ.

Lemme II.3

$$F_l L_{-n_t}\ldots L_{-n_1} v_\phi = \begin{cases} 0 & si\ l > \sum_{i=1}^t n_i\ ; \\ \\ \sum s(\alpha\cdot\beta) v_{\alpha\cdot\beta} & si\ l \leq \sum_{i=1}^t n_i. \end{cases}$$

où les $s(\alpha\cdot\beta)$ *sont nuls si* $\nu(\alpha\cdot\beta) \neq -l + \sum_{i=1}^t n_i$, *ou si* $\rho(\alpha\cdot\beta) > t$.
Et où $(n_1,\ldots,n_t)$ *est quelconque dans* $\mathbf{N}^t$, $l \in \mathbf{N}$, $t \in \mathbf{N}^\star$.

Démontrons la proposition. Si $\rho(\alpha\cdot\beta)+\rho(\gamma\cdot\delta) = 2$:

1^{er} *cas*

$$\begin{aligned} \langle F_{-l_1}v_\phi, F_{-l_2}v_\phi\rangle &= \langle F_{l_2}F_{-l_1}v_\phi, v_\phi\rangle \\ &= \left\langle \left(2L_{l_2-l_1} + \delta_{l_2-l_1}\frac{4l_1^2-1}{12}Z\right)v_\phi, v_\phi\right\rangle \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } l_1 \neq l_2 \\ 2h + \dfrac{4l_1^2-1}{12}z, & \text{si } l_1 = l_2. \end{cases} \end{aligned}$$

2^e *cas*

$$\langle F_{-l_1}v_\phi, L_{-n_1}v_\phi\rangle = \langle L_{n_1}F_{-l_1}v_\phi, v_\phi\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left(l_1 + \frac{n_1}{2}\right) \langle F_{n_1 - l_1} v_\phi, v_\phi \rangle \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } n_1 \neq l_1 \\ \left(l_1 + \dfrac{n_1}{2}\right) \lambda, & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

3^e*cas*

$$\begin{aligned}
\langle L_{-n_1} v_\phi, L_{-n_2} v_\phi \rangle &= \langle L_{n_2} L_{-n_1} v_\phi, v_\phi \rangle \\
&= \left\langle \left((n_1 + n_2) L_{n_2 - n_1} + \delta_{n_2 - n_1} \frac{n_1(n_1^2 - 1)}{6} Z \right) v_\phi, v_\phi \right\rangle \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } n_1 \neq n_2 \\ 2n_1 h + \dfrac{n_1(n_1^2 - 1)}{6} z, & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $\lambda \sim h^{1/2}$, la propriété est vérifiée.

$\mathbf{H_{r-1}} \Rightarrow \mathbf{H_r}$:

1^{er}cas : β ou $\delta \neq \emptyset$; alors notons δ celui qui contient le plus petit indice l dans son écriture $(l_1, \ldots, l_s)$. On a :

$$\langle v_{\alpha \cdot \beta}, v_{\gamma \cdot \delta} \rangle = \langle L_{k_1} \ldots L_{k_r} F_{m_1} \ldots F_{m_u} F_{-l_s} \ldots F_{-l_1} L_{-n_t} \ldots L_{-n_1} v_\phi, v_\phi \rangle$$

avec $m_u \leq l_s$ (et éventuellement $s = 0$, i.e. $F_{-l_s} \ldots F_{-l_1} L_{-n_t} \ldots L_{-n_1} = L_{-n_t} \ldots L_{-n_1}$).
On a donc :

$$\begin{aligned}
\langle v_{\alpha \cdot \beta}, v_{\gamma \cdot \delta} \rangle = \; & (-1)^s \langle L_{k_1} \ldots L_{k_r} F_{m_1} \ldots F_{m_{u-1}} F_{-l_s} \ldots F_{-l_1} F_{m_u} L_{-n_t} \ldots L_{-n_1} v_\phi, v_\phi \rangle \\
& + \sum_{j=1}^{s} (-1)^{s-j} \Big[2 \langle L_{k_1} \ldots F_{m_{u-1}} F_{-l_s} \ldots F_{-l_{j+1}} L_{-(l_j - m_u)} \\
& \times F_{-l_{j-1}} \ldots L_{-n_1} v_\phi, v_\phi \rangle \\
& + \delta_{m_u, l_j} \frac{4m_u^2 - 1}{12} z \langle L_{k_1} \ldots F_{m_{u-1}} F_{-l_s} \ldots F_{-l_{j+1}} \\
& F_{-l_{j-1}} \ldots L_{-n_1} v_\phi, v_\phi \rangle \Big] .
\end{aligned}$$

Pour le 1^{er} terme, on applique d'abord le lemme 3 et le lemme 2, puis l'hypothèse de récurrence, et on obtient un $O\left(h^{\frac{\rho(\alpha \cdot \beta) + (\rho(\gamma \cdot \delta) - 1)}{2}}\right)$, c'est-à-dire un $o\left(h^{\frac{\rho(\alpha \cdot \gamma) + \rho(\gamma \cdot \delta)}{2}}\right)$. Au dernier terme, on applique l'hypothèse de récurrence, et on obtient un $O\left(h^{\frac{\rho(\alpha \cdot \beta) + \rho(\gamma \cdot \delta) - 2}{2}}\right)$.
Quant aux autres termes, on peut leur appliquer le lemme 2, sauf peut-être pour $j = s$ — dans le cas où $l_s = m_u$ —, et on obtient le même ordre de grandeur que pour le premier terme, sauf si on est dans le cas $l_s = m_u$, où on obtient :

$$2 \left(h + \Sigma_{i=1}^{t} n_i + \Sigma_{j=1}^{s} l_j \right) \langle v_{\alpha \cdot \beta'}, v_{\gamma \cdot \delta'} \rangle$$

avec $\beta' = (m_1, \ldots, m_{u-1})$ et $\delta' = (l_1, \ldots, l_{s-1})$. En appliquant une dernière fois l'hypothèse de récurrence, on obtient $\mathbf{H_r}$.

2^ecas : $\beta = \delta = \emptyset$. On pose alors $\gamma = (k_1, \ldots, k_r)$ et $\alpha = (n_1, \ldots, n_t)$. On suppose, de plus, que $k_r \leq n_t$.

$$\begin{aligned}
\langle v_{\alpha\cdot\beta}, v_{\gamma\cdot\delta}\rangle &= \langle L_{k_1} \ldots L_{k_r} L_{-n_t} \ldots L_{-n_1} v_\phi, v_\phi\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{t} \Big[(k_r + l_j)\langle L_{k_1} \ldots L_{k_{r-1}} L_{-n_t} \ldots L_{-n_{j+1}} L_{-(n_j - k_r)} L_{-n_{j-1}} \ldots L_{-n_1} v_\phi, v_\phi\rangle \\
&\quad + \frac{k_r(k_r^2-1)}{12} \delta_{l_j - k_r} z \langle L_{k_1} \ldots L_{k_{r-1}} L_{-n_t} \ldots L_{-n_{j+1}} L_{-n_{j-1}} \ldots L_{-n_1} v_\phi, v_\phi\rangle \Big].
\end{aligned}$$

Pour les termes tels que $l_j - k_r > 0$, on applique le lemme 2 puis l'hypothèse de récurrence, et c'est fini. Pour les autres — i.e. $j > i$ — on obtient

$$2k_r \sum_{j=i}^{t} \langle L_{k_1} \ldots L_{k_{r-1}} L_{-n_t} \ldots L_{-n_{j+1}} L_{-n_{j-1}} \ldots L_{-n_1} v_\phi, v_\phi\rangle (h + c(j,z)).$$

C'est-à-dire $Ah\langle L_{k_1} \ldots L_{k_{r-1}} L_{-n_{t-1}} \ldots L_{-n_1} v_\phi, v_\phi\rangle + o\left(h^{\frac{r(\alpha)+r(\gamma)}{2}}\right)$ avec $A > 0$.
Et la récurrence se propage une fois de plus.
Dès lors la positivité est claire en décomposant sur la base formée par les $v_{\alpha\cdot\beta}$.

$\square$

II.2 Domaine d'étude ; premier point caractéristique

Construisons le domaine d'étude. Remarquons que $z(-6-m) = z(m)$ et $h^\epsilon_{p,q}(-6-m) = h^\epsilon_{p,q}(m)$, donc on se limite à $0 \leq z \leq \frac{3}{2}$ pour $m \geq 0$.
On a alors : $h^\epsilon_{p,q}(m) - h^\epsilon_{q,p}(m) = \dfrac{(m+3)(p^2-q^2)}{(m+2)(m+4)}$ i.e. $p > q$ si et seulement si $h^\epsilon_{p,q}(m) > h^\epsilon_{q,p}(m)$.
Pour $m > 0$, définissons $M(m)$ tel que :

$$M^2 = 4 + 8(m+2)(m+4)h \quad \text{et} \quad M \geq 0$$

Remarquons que $M \geq 2$, et que $M \geq \sqrt{\dfrac{(m+2)(m+4)}{2}}$ si $\epsilon = 0$. Soit D le domaine de $\mathbf{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} |(m+2)x - (m+4)y| \leq M \\ (m+4)x - (m+2)y \geq M \\ 0 \leq y \leq x. \end{cases}$$

Propriété II.1 *[Lan88]*

(i). $h^\epsilon_{p,q}(m) \geq h \geq h^\epsilon_{q,p}(m) \Leftrightarrow (p,q) \in D$,

(ii). *D contient un point de* $\mathbf{N}^2$ *avec* $y > 0$.

Posons $p(h,z) = \text{Min } p$ et $q(h,z) = \text{Min } q$ (respectivement pour (λ, z)) où les minima sont pris sur $\{(p,q) \in D/p - q + 1 - 2\epsilon \in 2\mathbf{N}\}$.
Alors il existe p', q' tels que $(p,q') \in D$ et $(p',q) \in D$. Et on a $q \le q'$ et $p \le p'$, donc
- $p \ge q' \ge q$,
- $(m+2)p - (m+4)q \ge (m+2)p - (m+4)q' \ge -M$,
- $(m+2)p - (m+4)q \le (m+2)p' - (m+4)q \le M$,
- $(m+4)p - (m+2)q \ge (m+4)p - (m+2)q' \ge M$.

Et donc $(p,q) \in D$.
Définition 1. Si $p - q + 1 - 2\epsilon \in 2\mathbf{N}$, on pose $P(h,z) = (p,q)$ (respectivement pour (λ, z)). Sinon, on peut remarquer que $(p+1,q)$ et $(p,q+1)$ sont dans D, car, en regardant le raisonnement précédent, on s'aperçoit que $(p,y) \in D$ pour $q \le y \le q'$ (et, ici, $q' > q$), et que, de même, $(x,q) \in D$ pour $p \le x \le p'$ (et $p' > p$). On est alors amené à poser dans ce dernier cas $P(h,z) = (p+1,q)$ (respectivement pour (λ, z)).

Propriété II.2 *Si $(p_0,q_0) \in D$, avec $p_0 - q_0 + 1 - 2\epsilon \in 2\mathbf{N}$, alors le produit p_0q_0 est inférieur au produit des coordonnées du point $P(h,z)$ si et seulement si $P(h,z) = (p_0,q_0)$.*

Preuve : Posons $P(h,z) = (p,q)$ (ceci est une nouvelle notation et non pas une supposition) et $2n = pq$.
Supposons $(p(h,z), q(h,z)) = P(h,z)$. Si $p_0q_0 \le 2n$ et $p_0 \ge q_0$ avec $(p_0,q_0) \ne (p,q)$ et $p_0 - q_0 + 1 - 2\epsilon \in 2\mathbf{N}$, alors soit $p_0 < p$, soit $q_0 < q$. Donc $(p_0,q_0) \notin D$.
Supposons $P(h,z) = (p(h,z)+1, q(h,z))$. Si p_0 et q_0 vérifient les mêmes hypothèses que précédemment, alors on a $p_0 < p$ ou $q_0 < q$. Dans ce dernier cas $(p_0,q_0) \notin D$. Dans le premier cas, si $p_0 < p-1$, on a encore $(p_0,q_0) \notin D$; on étudie donc le cas où $p_0 = p-1$ et $q_0 = q+1$. On a $pq - p_0q_0 = p(h,z) - q(h,z)$; donc il est nécessaire qu'il y ait égalité : $p(h,z) = q(h,z)$. Alors, en reportant dans les inégalités de définition de D

$$(m+2)p - (m+4)q \ge -M$$

$$(m+4)p - (m+2)q \ge M,$$

on obtient $p(h,z) = q(h,z) = \dfrac{M}{2}$. Mais alors $(m+2)p_0 - (m+4)q_0 = -M - (m+4) < -M$.
Et on a encore $(p_0,q_0) \notin D$ (le cas $q_0 > q+1$ est exclus, car, dans ce cas, $p_0q_0 > pq + p - q - 1 > pq$; en effet $p - q - 1 = p(h,z) - q(h,z) \ge 0$).

□

Proposition II.2 *[Lan88] Si $P(h,z)$ (respectivement $P(\lambda,z)$) est intérieur à D, alors la forme $\langle .,. \rangle$ prend des valeurs négatives sur V.*

Définition 2. Soit $r \geq s$ des entiers naturels non nuls. Posons

$$\phi^{\epsilon}_{r,s}(m) = \begin{cases} (h - h^{\epsilon}_{r,s}(m))(h - h^{\epsilon}_{s,r}(m)), & \text{si } r \neq s \\ h - h^{\epsilon}_{r,s}(m), & \text{si } r = s. \end{cases}$$

De sorte que si $(r,s) \notin\ D$ et $r \neq s$, alors $\phi^{\epsilon}_{r,s}(m) > 0$. On a également :

$$\phi_{r,r} < 0 \Leftrightarrow r > \frac{M}{2}.$$

Remarquons que si $r^2 = pq$, alors $\phi_{r,r} \geq 0$:
En effet, $(r+1, r-1) \notin\ D$, sinon ceci contredirait le fait que pq est minimal ; donc, en tenant compte de :

$$\begin{cases} (m+2)(r+1) - (m+4)(r-1) = 2m+6-2r \\ (m+4)(r+1) - (m+2)(r-1) = 2m+6+2r \end{cases}$$

et en remarquant que $M < 2r < M+2$ entraîne $2m+6+2r > M$ et $2m+6-2r > -M$, on obtient $2m+6-2r > M$ car $(r+1,r-1) \notin\ D$.
De plus, $p \geq r$, car $p \geq q$ et $pq = r^2$. Or $p = r \Rightarrow q = r$, et alors $\phi_{r,r} = 0$. Et si $p \geq r+1$, $q \leq r-1$ ($pq = r^2$). En reportant, on trouve :

$$\begin{aligned} (m+2)p - (m+4)q &\geq (m+2)(r+1) - (m+4)q \\ &\geq (m+4)(r+1-q) - 2(r+1) \\ &\geq 2(m+4) - 2(r+1) \\ &\geq 2m+6-2r \\ &> M. \end{aligned}$$

Et ceci est une contradiction.

III Analyses locales ; fin de la démonstration

III.1 Domaine de variation du paramètre réel m.

Posons maintenant $P(h,z) = (p,q)$. On voit qu'il y a trois cas :

$$\begin{array}{llcl} (A) & (m+2)p - (m+4)q & = & M \\ (B) & (m+4)p - (m+2)q & = & M \\ (C) & (m+2)p - (m+4)q & = & -M \quad (p \neq q) \end{array}$$

Lemme III.1 *[Lan88] Le cas (C) ne se produit pas.*

Désormais, nous fixons (p, q). Dans le cas (A)[respectivement (B)], on aura $h = h^{\epsilon}_{q,p}(m)$ [respectivement $h^{\epsilon}_{p,q}(m)$].

Lemme III.2 *[Lan88]*

(i). L'ensemble de tous les $m \geq 0$ pour lesquels $h = h^{\epsilon}_{q,p}(m)$ et $z = z(m)$ donnent le cas (A) est l'intervalle $m > p + q - 4$ (à condition d'exclure le cas non intéressant $q \geq \frac{M}{2}$).

(ii). L'ensemble de tous les $m \geq 0$ pour lesquels $h = h^{\epsilon}_{p,q}(m)$ et $z = z(m)$ donnent le cas (B) est l'intervalle $m > p + q - 3$, sauf si $p = q = 1$, auquel cas c'est $m \geq 0$.

Remarque. Dans le cas (A), avec $\epsilon = \frac{1}{2}$, si $q \geq \frac{M}{2}$, la forme $\langle ., . \rangle$ prend des valeurs négatives sur V.

Preuve : On a $\phi^{\epsilon}_{q,q} < 0$. Si r est tel que $2(r-1) < M \leq 2r$, alors $r \leq q$ et, en raisonnant comme dans la proposition 2 du II, on obtient $\det H^{\epsilon}_{r^2} < 0$.

□

Pour $0 \leq z < \frac{3}{2}$, m est une fonction analytique de z et on peut écrire :

$$h^{\epsilon}_{p,q}(m) = h^{\epsilon}_{p,q}(z) = h(z).$$

Il en va de même pour le cas $h^{\epsilon}_{q,p}$.

Fixons z et considérons $H^{\epsilon}_{n_1}(h, z)$ comme une fonction de h, au voisinage de $h(z)$. Ses valeurs propres sont les solutions d'une équation polynômiale à coefficients polynômiaux (donc analytiques réels). De plus, ses valeurs propres sont réelles pour h réel, car $H^{\epsilon}_{n_1}(h, z)$ est symétrique ; on peut ainsi faire un développement de Puiseux des racines :

$$\alpha_i(h) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}(h - h(z))^{1/k} + \alpha_{i2}(h - h(z))^{2/k} + \dots \quad \text{pour } 1 \leq k \leq P(n_1).$$

Mais alors α_{ij} est réel pour tout j. En effet, $\alpha_i(h)$ est réel pour h réel ; h(z) est aussi réel. Donc α_{i0} est réel ; mais alors aussi

$$\alpha_{i1} = \lim_{h \to h(z)} \left[\frac{\alpha_i(h) - \alpha_{i0}}{(h - h(z))^{1/k}} \right].$$

Et ainsi de suite pour tout j.

Mais, en multipliant $h - h(z)$ par $e^{\sqrt{-1}\pi} = -1 \in \mathbf{R}$, on obtient :

$$\alpha_{ij} \in \mathbf{R} \quad \alpha_{ij} e^{\sqrt{-1}\pi j/k} \in \mathbf{R}$$

$$\text{Donc } j \notin k\mathbf{Z} \Rightarrow \alpha_{ij} = 0.$$

On peut ainsi prendre $k = 1$ et :

Propriété III.1

$$\alpha_i(h) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}(h - h(z)) + \alpha_{i2}(h - h(z))^2 + \dots$$

Donc, cf [Lan88], dans un voisinage de $(h(m), z(m))$, on peut trouver une fonction analytique $v(h,z)$ à valeurs dans V_n telle que $v(h,z)$ soit de norme 1, soit vecteur propre pour $H_n^\epsilon(h,z)$, et corresponde à la valeur propre 0 quand $h = h(m), z = z(m)$, cf [Roc83].
De plus,

$$\begin{aligned} L_0 v(h(m), z(m)) &= (h(m) + n) v(h(m), z(m)) \\ L_k v(h(m), z(m)) &= 0 \quad \text{pour } k > 0 \end{aligned}$$

car

$$\langle L_k v(h(m), z(m)), u \rangle = \langle v(h(m), z(m)), L_{-k} u \rangle = 0$$

pour tout u dans V_{n-k} . Or, $L_k v(h(m), z(m))$ appartient à V_{n-k} et $H^\epsilon_{n-k}(h(m), z(m))$ est inversible (puisque $n - k < n$). Donc

$$L_k v(h(m), z(m)) \in V_{n-k}^\perp = \{0\}.$$

Il existe donc un homomorphisme de ν_ϵ-modules

$$\phi : V^{h(m)+n, z(m)} \longrightarrow V^{h(m), z(m)}$$

transportant $v_\phi^{h(m)+n, z(m)}$ sur $v(h(m), z(m))$.
Grâce à ce vecteur, on va pouvoir étudier la structure de la forme hermitienne contravariante quand m tend vers l'infini.
Définition 1. Pour $n_1 < n'$ ou $m \neq m'$, posons $U_{n_1} = U_{n_1}(m)$ l'espace des vecteurs propres pour 0 dans V_{n_1}.
Pour (h,z) voisin de $(h(m'), z(m'))$, on note $U_{n_1}(h,z)$ l'ensemble des

$$L_{-n_t} \dots L_{-n_1} F_{-l_s} \dots F_{-l_1} v(h,z)$$

pour $\sum k_i + \sum l_j = n' - n$. On définit alors $U_{n'}(m) = U_{n'}(h(m), z(m))$. Les deux définitions coïncident quand elles s'appliquent toutes les deux, cf. [Lan88]. Alors $U_{n_1}(m)$ est défini et est une fonction analytique de m : il existe $\{v_1(m), \dots, v_{P(n_1)}(m)\}$ tel que $v_i(m)$ soit analytique en m, et $\{v_1(m), \dots, v_{dim U_{n_1}(m)}\}$ soit une base de $U_{n_1}(m)$.
Soit W_{n_1} son orthogonal par rapport à la forme $\{.,.\}$.

III.2 Deuxième point caractéristique du problème

On va maintenant chercher à définir un deuxième point caractéristique du problème. Ce point va correspondre au deuxième point minimal pour la fonction produit sur la frontière de D, avec la bonne parité.

Si on regarde les droites $x - y = p - q + 2k$, avec $k \in \mathbf{Z}$, et leurs intersections avec D, on se rend compte que les points minimaux correspondent (si cette intersection existe) à $k = -1$ dans le cas (A), et à $k = 1$ dans le cas (B). Malheureusement, cette intersection n'existe pas toujours dans le cas (A), comme le montre un petit calcul. Aussi, dans ce cas, il faut distinguer deux sous-cas correspondant, respectivement, à :

Cas (A1) : $p - q \geq 3$ ou $p - q = 2$, avec m non entier,

Cas (A2) : $p - q = 1$ ou $p - q = 2$, avec m entier.

Remarque. Le cas m entier ne nous préoccupera pas, puisque c'est justement ce que l'on veut démontrer.

Dans le cas (A1), l'intersection des 2 droites $(m + 4)x - (m + 2)y = M$ et $x - y = p - q - 2$ est un point $(x(m), y(m))$ avec $p' - 1 < x(m) \leq p'$ pour un certain $p' \geq p - 1$. Si $x(m) = p'$, alors $y(m) = q' = p' - p + q + 2$, et $m = p' + q - 2$.

Dans les cas (A2) ou (B), l'intersection des 2 droites $(m+2)x-(m+4)y = M$ et $x-y = p-q+2$ est un point $(x(m), y(m))$ avec $p' - 1 < x(m) \leq p'$ pour un certain $p' \geq p$. Si $x(m) = p'$, alors $y(m) = q' = p' - p + q - 2$, et :

A2 $m = p' - p - 4$,

B $m = p + q' - 2$,

et on a donc $m \in \mathbf{Z}$.

Remarque. En plus, dans le cas (A2), on a aussi

$$\begin{aligned}(m + 2)p - (m + 4)q &= M \\ (m + 2)(p - q) &= M + 2q \\ m + 2 &= M + 2q\end{aligned}$$

Définition-Propriété III.2 *Si $p' - 1 < x(m) < p'$, si (p_1, q_1) est sur la frontière de D avec la bonne parité, et si $p_1q_1 \leq p'q'$, alors $(p_1, q_1) = (p, q)$.*

Si $x(m) = p'$ et (p_1, q_1) comme ci-dessus, alors (p_1, q_1) est soit (p, q), soit (p', q').

Preuve :

Cas (A1) :

On écrit $p_1 - q_1 = p' - q' + 2k$, $k \in \mathbf{Z}$. Si $k \leq 0$, alors

$$\begin{aligned}(m+4)p_1 - (m+2)q_1 &= (m+2)(p_1 - q_1) + 2p_1 \\ &\leq (m+2)(x(m) - y(m)) + 2p_1 \\ &\leq M + 2(p_1 - x(m)).\end{aligned}$$

Donc $p_1 \geq x(m)$, soit $p_1 \geq p'$. On a aussi $q_1 = q' + (p_1 - p') - 2k$. Donc le seul cas possible d'égalité est $(p_1, q_1) = (p', q')$.
Si $k = 1$, on a $p - q = p_1 - q_1$. Et de

$$\begin{cases} (m+2)p_1 - (m+4)q_1 = M \text{ ou} \\ (m+2)p_1 - (m+4)q_1 = -M\text{ou} \\ (m+4)p_1 - (m+2)q_1 = M, \end{cases}$$

on tire :

$$(p_1, q_1) = \begin{cases} (p, q) \\ (p + M, q + M) \\ (-q, -p). \end{cases}$$

Le troisième cas est clairement impossible ; quant au premier, il est admis dans le lemme. Reste le second :

$$(m+4)(p + M - 2) - (m+2)(q + M) = M + 2(m+3)(p - q - 1) - 2 \geq M.$$

Donc $p' \leq p + M - 2$, soit $q' \leq q + M$, d'où la contradiction sur le produit $p_1 q_1$.
Si $k > 1$, remarquons

$$\begin{aligned}(m+2)(x(m) - y(m)) + 2x(m) &= (m+2)(p - q) - 2q \\ m + 2 &= x(m) + q.\end{aligned}$$

Soit alors $x' = x(m) + 2k$

$$\begin{aligned}(m+2)x' - (m+4)y(m) &= M - 2x(m) - 2y(m) + 2k(m+2) \\ &\geq M + 2(2(m+2) - x(m) - y(m)) \\ &\geq M + 2(x(m) - y(m) + 2q) \\ &\geq M + 2(p + q - 2) > M.\end{aligned}$$

Donc $p_1 \geq x'$ et $q_1 \geq y$; soit $q_1 \geq q'$ et $p_1 > p'$. Il y a là une contradiction.
Cas (A2) :
Ce cas est trivial, car, en écrivant $p_1 - q_1 = p - q + 2k$, on a :

Si $k < -1$, la droite $x - y = p_1 - q_1$ ne rencontre pas D.
Si $k = 1$, on a :

$$(p_1, q_1) = \begin{cases} (p, q) \\ (p + M, q + M) \\ (-q, -p). \end{cases}$$

Encore une fois, seul le deuxième cas pose problème, et on a :

$$(m + 2)(p + M - 2) - (m + 4)(q + M) = -M - 2(m + 2) < M.$$

On conclut encore que $p' \leq p + M - 2$, et $q' \leq q + M$.
Si $k \geq 0$,

$$(m + 2)p_1 - (m + 4)q_1 \geq M + 2(x(m) - p_1$$

d'où $p_1 \geq p'$. De nouveau, c'est une contradiction.
Cas (B) :
On procède de même. Si $k \geq 0$,

$$(m + 2)p_1 - (m + 4)q_1 = M + 2(y(m) - q_1) + 2k(m + 2).$$

On retrouve comme seule possibilité $(p_1, q_1) = (p', q')$.
Si $k = -1$, en écrivant de même les équations de la frontière de D, on obtient comme possibilités :

$$(p_1, q_1) = \begin{cases} (-q, -p) \\ (M - q, M - p) \\ (p, q). \end{cases}$$

Seul le deuxième cas pose problème :

$$(m + 2)(M - q) - (m + 4)(M - p - 2) = -M + 2(m + 4).$$

Si $p \neq q$, alors $M = (m + 4)(p - q) + 2q > m + 4$; et donc $p' \leq M - q$, soit $q' < M - p$, et on a une contradiction sur le produit $p_1 q_1$.
Si, au contraire, $p = q$, alors le seul point commun entre la droite $x = y$ et D est (p, q), donc le problème est clair [en fait, $p = q = p_1 = q_1 = M/2$].
Si $k < -1$, on a encore $m + 4 = x(m) + q$ et

$$(m + 4)x(m) - (m + 2)(y(m) - 2k) \leq M - (p - q + 2)$$

Soit $p_1 \leq p'$ et $q_1 > q'$.

□

Il nous faut établir la proposition suivante :

Proposition III.1 *Si le cas (A) ou (B) se produit, et que* $p'-1 < x(m) < p'$*, alors la forme* $\langle .,. \rangle$ *prend des valeurs négatives sur* V.

Nous allons faire un raisonnement par l'absurde.
Remarque. On peut fixer p, q, p' et laisser m paramétrer la courbe $z = z(m), h = h^{\epsilon}_{p,q}(m)$ (B) ou $h = h^{\epsilon}_{q,p}(m)$ (A).

III.3 Analyse locale de la forme hermitienne contravariante

L'étude se conduit assez simplement, mais demande un peu de technique. Tout d'abord, il s'agit d'étudier l'homomorphisme mis à jour au paragraphe 1.

Lemme III.3 $\det H^{h(m')+n, z(m')}_{n'-n} \neq 0$

Preuve : On doit prouver que $h(m') + n \neq h_{p_1,q_1}$ pour $p_1 q_1 \leq 2(n'-n)$, i.e. :
Dans le cas (A) :

$$[(m'+2)p - (m'+4)q]^2 + 8(m'+2)(m'+4)\frac{pq}{2} \neq [(m'+4)p_1 - (m'+2)q_1]^2.$$

Dans le cas (B) :

$$[(m'+4)p - (m'+2)q]^2 + 8(m'+2)(m'+4)\frac{pq}{2} \neq [(m'+2)p_1 - (m'+4)q_1]^2.$$

Et ceci est équivalent à :

$$\begin{cases} (m'+2)p + (m'+4)q \neq \pm[(m'+4)p_1 - (m'+2)q_1] & \text{(A)} \\ (m'+4)p + (m'+2) \neq \pm[(m'+2)p_1 - (m'+4)q_1] & \text{(B)} \end{cases}$$

$m'+2$ et $m'+4$ sont premiers entre eux si m' est impair ($m' \in \mathbf{N}$) ; et, sinon, $\dfrac{m'+2}{2}$ et $\dfrac{m'+4}{2}$ le sont. Raisonnons par l'absurde : dans le cas contraire,

$$\exists k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } \begin{cases} p \pm q_1 = k(m'+4) \text{ et } \pm p_1 - q = k(m'+2) \text{ (A)} \\ p \pm p_1 = k(m'+2) \text{ et } \pm q_1 - q = k(m'+4) \text{ (B)} \end{cases}$$

Écrivons $p_1 q_1 \leq 2(n'-n) = p'q' - pq$ sous la forme :

$$\begin{aligned} p_1 q_1 + pq &= (p \pm p_1)(\pm q_1 - q) + (p \pm p_1)q - (\pm q_1 - q)p \\ &= (p \pm q_1)(\pm p_1 - q) + (p \pm q_1)q - (\pm p_1 - q)p \\ &= k^2(m'+2)(m'+4) + k(m'+a)q - k(m'+6-a)p \begin{cases} a = 4 \text{ cas (A)} \\ a = 2 \text{ cas (B)} \end{cases} \\ &\leq p'q' = [(m'+6-a) - q][(m'+a) - p]. \end{aligned}$$

Soit :

$$(1-k^2)(m'+2)(m'+4)-(q+kq)(m'+a)-(p-kp)(m'+6-a)+pq \geq 0$$

$$\big[(1-k)(m'+6-a)-q\big]\,[(1+k)(m'+a)-p] \geq 0$$

Or,

$$\left\{\begin{array}{l} m'+6-a = \left\{\begin{array}{l} p'+q \\ M+2q \text{ (A2)} \end{array}\right\} > q \\ m'+a = \left\{\begin{array}{l} p+q' \\ M+2p \text{ (A2)} \end{array}\right\} > p. \end{array}\right.$$

Si $k \neq \pm 1$ le signe du produit est donc celui de $(1-k^2)(m'+2)(m'+4)$. Et donc, nécessairement, $k=0$. Si $k=\pm 1$ le produit est clairement négatif.
Mais si $k=0$, alors

$$\left\{\begin{array}{l} p \pm q_1 = 0 \text{ et } q = \pm p_1 \text{ (A)} \\ p \pm p_1 = 0 \text{ et } q = \pm q_1 \text{ (B).} \end{array}\right.$$

Et ceci est évidemment une contradiction.

□

On voit facilement [Lan88] que $J_{n_1}(m)$, restriction de $H_{n_1}(m)$ à W_{n_1}, est non-singulière, sauf peut-être si $n=n'$ et $m=m'$. L'opérateur J_{n_1} étant continu, et même analytique, notre supposition implique alors que J_{n_1} est positive (en tant que forme) pour tout m, si $n_1 < n'$. Il s'agit, maintenant, de l'étudier au point critique :

Lemme III.4 *[Lan88] Au voisinage de $(h(m'), z(m'))$, on a :*

$$\alpha(h,z) = a(h,z).(h-h(z))$$

avec $0 < A \leq |a(h,z)| \leq 1/A$ et où :
– A est une constante,
– $H_n(h,z).v(h,z) = \alpha(h,z).v(h,z)$ cf. III.1,
– $h(z) = h^{\epsilon}_{p,q}(m)$ ou $h^{\epsilon}_{q,p}(m)$, si $z = z(m)$.

Lemme III.5 *[Lan88] Soit $K_{n'}(h,z)$ la restriction de $H_{n'}(h,z)$ à $U_{n'}(h,z)$. Dans un voisinage de $(h(m'), z(m'))$, on a :*

$$\det K_{n'}(h,z) = k(h,z).\alpha(h,z)^{P(n'-n)}$$

et il existe une constante K telle que : $0 < K \leq |k(h,z)| \leq 1/K$.

On en déduit la propriété fondamentale suivante :

Propriété III.3 *[Lan88] Au voisinage de m', il existe $D \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\det J_{n'}(m) = d(m).(m - m')$$

avec $0 < D \leq |d(m)| \leq 1/D$.

Ainsi, on obtient que pour $m' > m$, la forme prend des valeurs négatives car $\det J_{n'}(m)$ change de signe en m'.

Corollaire III.1 *[Lan88]*

(i). si $x(m) > p' - 1$, $x(m) \neq p'$ et $n_1 \leq n' = \frac{1}{2}p'q'$, alors la dimension de l'espace des vecteurs nuls dans V_{n_1} est $P(n_1 - n)$.

(ii). si $x(m) = p'$ et $n_1 < n'$, cette dimension est encore $P(n_1 - n)$, mais si $n_1 = n'$ c'est $P(n_1 - n) + 1$.

III.4 Étude locale à l'infini

La conclusion de cette étude est donc que si $H_{n_1}(h(m), z(m))$ est non-négative pour un m donné ($p' - 1 < x(m) < p'$) alors $J_{n_1}(m)$ est positive pour des m grands, si $n_1 < n'$, mais que $J_{n'}(m)$ a au moins une valeur propre négative pour m grand. Nous montrons maintenant, pour conclure, que ceci est impossible en étudiant ce qui se passe à la limite (i.e. $z \to 3/2$).
Quand m tend vers l'infini, $(h^{\epsilon}_{p,q}(m), z(m))$ tend vers le point $(\frac{(p-q)^2}{8}, 3/2)$ si $\epsilon = 1/2$, et $(\lambda(m), z(m))$ tend vers $(\pm\frac{p-q}{\sqrt{8}}, 3/2)$ sinon. On désignera le point limite par un indice 0 (e.g. (h_0, z_0)).
Si $p \neq q$, on peut paramétrer la courbe par $\mu = \dfrac{1}{m}$; sinon, on peut prendre $\mu = 3/2 - z$. Dès lors les matrices $H_{n_1}(\mu) = H_{n_1}(m) = H_{n_1}(h(m), z(m))$ sont des fonctions analytiques du paramètre μ, et les valeurs propres de $H_{n_1}(\mu)$ sont alors données par des séries entières :

$$\alpha_i = \alpha_i(\mu) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}\mu + \dots.$$

Nous définissons $V^{(n_1)}_{0,k}$ comme étant l'espace des valeurs en $\mu = 0$ des germes, f, de fonctions holomorphes au voisinage de 0, à valeurs dans V_{n_1}, et telles qu'il existe g germe en 0 de fonction holomorphe à valeurs dans V_{n_1} et :

$$H_{n_1}(\mu)f(\mu) = \mu^k g(\mu).$$

Lemme III.6 *[Roc83] Il existe $P(\mu)$ et $Q(\mu)$, deux matrices analytiques telles que :*

- *leur déterminant commun est constant, égal à 1,*
- *la matrice $P(\mu)H_{n_1}(\mu)Q(\mu)$ est diagonale (et on peut même faire en sorte que les coefficients diagonaux soient ordonnés par ordres en $\mu = 0$ décroissants).*

Lemme III.7 *[Roc83] Si on note $d_k^{(n_1)} = \dim\left(V_{0,k}^{(n_1)}\right)$, alors :*

$$\sum_{k\geq 1} d_k^{(n_1)} = \mathrm{ord}_0\left(\det H_{n_1}(\mu)\right).$$

III.5 Conclusion. Le théorème FQS

Définition 3. Si f et g sont deux germes, en 0, de fonctions à valeurs dans V_{n_1}, telles que $H_{n_1}(\mu)f(\mu)$ est d'ordre au moins k, en 0 (respectivement pour g), on pose :

$$\langle f, g\rangle_k(\mu) = \mu^{-k}\{H_{n_1}(\mu)f(\mu), g(\mu)\}.$$

Si $v, w \in V_{0,k}^{(n_1)}$, avec $v = f(0)$ et $w = g(0)$, on pose :

$$\langle v, w\rangle_k = \lim_{\mu\to 0} \mu^{-k}\{H_{n_1}(\mu)f(\mu), g(\mu)\}.$$

La définition est licite car, si $f(0) = h(0)$, alors $(f-h)(0) = 0$. Et alors, en s'intéressant à $(f-h)(\mu) = \mu f_1(\mu)$, on obtient :

$$\begin{aligned} H_{n_1}(\mu)g(\mu) &= \mu^k g_1(\mu) \\ \mu^{-k}\{H_{n_1}(\mu)(f-h)(\mu), g(\mu)\} &= \mu^{-k+1}\{f_1(\mu), \mu^k g_1(\mu)\} \\ &= \mu\{f_1(\mu), g_1(\mu)\}. \end{aligned}$$

On peut également remarquer que le calcul précédent prouve que $V_{0,k+1}^{(n_1)}$ et $V_{0,k}^{(n_1)}$ sont orthogonaux par rapport à la forme $\langle ., .\rangle_k$. Donc celle-ci induit une forme bilinéaire symétrique sur le quotient $V_{0,k}^{(n_1)}/V_{0,k+1}^{(n_1)}$, notée similairement.

Propriété III.4 *[Roc83] La forme $\langle ., .\rangle_k$ est non-dégénérée sur $V_{0,k}^{(n_1)}$, $k \geq 0$.*

Posons

$$\begin{aligned} V^k &= \bigoplus_{n_1} V_{0,k}^{(n_1)} \\ X^k &= V^k/V^{k+1} = \bigoplus_{n_1} V_{0,k}^{(n_1)}/V_{0,k+1}^{(n_1)} \end{aligned}$$

On étend la forme bilinéaire que l'on avait pour chaque n_1, à tout l'espace, en décrétant que les $V_{0,k}^{(n_1)}$ sont orthogonaux deux à deux, pour des n_1 distincts.
Il est alors clair que $H_{n_1}(\mu)$ est non-négative pour de petits μ, si et seulement si les formes $\langle ., .\rangle_k$ sont toutes positives.

Corollaire III.2 *[Lan88]*

(i). Les espaces V^k sont invariants par $\pi = \pi^{h_0,z_0}$, et donc ν_ϵ opère sur X^k.

(ii). La forme $\langle .,. \rangle_k$ sur X^k, vérifie :

$$\begin{cases} \langle L_m x, y\rangle_k = \langle x, L_{-m} y\rangle_k, \ m \in \mathbf{Z} \\ \langle F_n x, y\rangle_k = \langle x, F_{-n} y\rangle_k, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Pour $h \geq 0$, la représentation $\pi^{h,3/2}$ sur $V^{h,3/2}$ a un unique quotient irréductible $\rho^{h,3/2}$, sur $X^{h,3/2}$, sur lequel on a une forme hermitienne qui fait de $\rho^{h,3/2}$ une représentation unitaire, dans le sens que :

$$\rho^{h,3/2}(L_m)^\star = \rho^{h,3/2}(L_{-m}) \text{ et } \rho^{h,3/2}(F_n)^\star = \rho^{h,3/2}(F_{-n}).$$

Une telle forme est unique, à multiplication par un scalaire près.
Prenons, en particulier, $h = \dfrac{r^2}{8}$, $r \in \mathbf{Z}$ (avec $r = p - q$). Alors, $h = h^{1/2}_{p_2,q_2}(0)$ si et seulement si $r^2 = (p_2 - q_2)^2$. Et, de même, si $\lambda = \pm \dfrac{r}{\sqrt{8}}$, $r \in \mathbf{N}$, alors $h = h^0_{p_2,q_2}(0)$ si et seulement si $r^2 = (p_2 - q_2)^2$.
En particulier $h = h^\epsilon_{r+1,1}(0)$. Donc $r + 1$ est le plus petit entier pour lequel H_n est dégénérée et comme, de plus, l'espace propre associé à 0 est de dimension 1, V^1 s'envoie dans un quotient de $V^{h+r+1,3/2}$. En continuant, on obtient :

Propriété III.5 *[Lan88] $V^{h,3/2}$ admet une filtration de sous-modules $V^{h,3/2}(k)$, $k \geq 0$, telle que :*

$$V^{h,3/2} = V^{h,3/2}(0) \supseteq V^{h,3/2}(1) \supseteq \ldots \supseteq V^{h,3/2}(k) \supseteq \ldots,$$

et la représentation sur le quotient $V^{h,3/2}(k)/V^{h,3/2}(k+1)$ est $\rho^{h(k),3/2}$, en posant $h(k) = (r + 2k)^2/8$ si $\epsilon = 1/2$, et $\lambda(k) = \pm(r + 2k)/\sqrt{8}$ sinon.

En conclusion, X^k est une somme directe de sous-espaces irréductibles et invariants X^k_j, et la restriction de $\langle .,. \rangle_k$ à X^k_j est soit positive, soit négative. L'hypothèse que nous essayons de contredire implique, alors, que la forme est positive si X^k_j contient des vecteurs de poids $h + n_1$, $n_1 < n'$, et qu'il existe j et k tels que, sur X^k_j, la forme est négative et contient un vecteur de poids $h + n'$.
Le lemme suivant assure donc la contradiction :

Lemme III.8 *L'équation $\dfrac{r^2}{8} + n' = \dfrac{(r + 2l)^2}{8}$ n'a pas de solution dans $\mathbf{Z}$.*

Preuve : On peut récrire l'équation sous la forme $2n' = l(l + r)$. Or $2n' = p'q'$ et $r = p - q$, donc :

$$(p' + l)(q' - l) \ = \ p'q' - l^2 + l(q' - p')$$

$$\begin{aligned} &= p'q' - l^2 + l(q-p) \pm 2l \\ &= \pm 2l. \end{aligned}$$

Or $p' + l > l$, donc la seule solution est :

$$p' = l \text{ et } q' - l = \begin{cases} 1 & \text{(A1)} \\ -1 & \text{(A2) ou (B).} \end{cases}$$

Dans le cas (A1), on obtient $p' - q' = -1$, et ceci est une contradiction. Dans les cas (A2) ou (B), on obtient $p - q = p' - q' - 2 = -1$, et on a encore une contradiction.

□

Ceci achève la démonstration du théorème.

Remerciements : Je tiens en tout premier lieu à remercier R.P. Langlands sans qui cet article n'aurait pas vu le jour, et qui a bien voulu consacrer de son temps à m'expliquer son propre article. Je remercie également J.P. Labesse pour son aide.

Bibliographie

[BPZ84] A. Belavin, A. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry of critical fluctuations in two dimensions, Journal of Statistical Physics **34** (1984), 763-774

[FQS85a] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, Conformal invariance, unitarity and two dimensional critical exponents, in *Vertex Operators in Mathematics and Physics*, M.S.R.I. Publications **3** (1985), 419-450

[FQS85b] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, Superconformal invariance in two dimensions and the tricritical Ising model, Physics Letters B **151** (1985), 37-43

[Jan79] J.C. Jantzen, Modulen mit einen höchsten Gewitch, Lecture Notes in Mathematics **750** (1979)

[Kac77] V.G. Kac, Lie superalgebras, Advances in Mathematics **26** (1977), 8-96

[Kac79] V.G. Kac, Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and super-algebras, Lecture Notes in Physics **94** (1979), 441-445

[KW85] V.G. Kac, M. Wakimoto, Unitarizable highest weight representations of the Virasoro, Neveu-Schwartz and Ramond algebras, in *Proceedings of the Symposium on conformal groups and structures*, Clausthal (1985)

[Lan88] R.P. Langlands, Infinite Dimensional lie Algebras and their Applications, Edited by Steven Kass, World Scientific (1988)

[Roc83] A. Rocha-caridi, Inventiones Mathematicae **72** (1983) 57-75

[Roc85] A. Rocha-caridi, Vacuum vector representations of the Virasoro algebra, in *Vertex Operators in Mathematics and Physics*, M.S.R.I. Publications **3** (1985), 451-473

[Sha72] N.N. Shapovalov, On a bilinear form on the universal enveloping algebra of a complex semi-simple Lie algebra, Functional Analysis and Applications **6** (1972), 307-312

Chapitre 2

Limites de représentations d'algèbres de Hecke

Quand j'emprunte des paradoxes, je les rends, avec intérêts !
J'enrichis mes prêteurs qui deviennent alors plus intelligents.
Le taux usuraire de l'astuce n'est jamais assez élevé.
Léo Ferré – Et Basta ..!

Introduction

Motivations.

Ce travail a pour objet la généralisation des faits élémentaires suivants. Soit ϕ dans l'algèbre de convolution $\mathcal{H}$ des fonctions lisses sur $\mathbf{R}$ à support compact, notons $\widehat{\phi}$ sa transformée de Fourier. Nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\gamma\in n\mathbf{Z}} \phi(\gamma) = \phi(0) \ .$$

La formule de Poisson montre que

$$\sum_{\gamma\in n\mathbf{Z}} \phi(\gamma) = \frac{1}{n} \sum_{\xi\in\frac{1}{n}\mathbf{Z}} \widehat{\phi}(\xi) \ ,$$

et il en résulte que les mesures

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{\xi\in\frac{1}{n}\mathbf{Z}} \delta_\xi \ ,$$

où δ_ξ est la masse de Dirac en ξ , vérifient la propriété de convergence suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\widehat{\phi}) = \mu(\widehat{\phi})$$

où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. Vu la méthode employée, le résultat de convergence n'est pour l'instant établi que pour les fonctions de l'espace $\mathfrak{F}$ des transformées de Fourier de fonctions lisses à support compact. Pour étendre le résultat de convergence à d'autres fonctions sur le dual – par exemple la fonction caractéristique d'un ouvert U borné μ-régulier (i.e. ayant une frontière de μ-mesure nulle) – on peut procéder comme suit. Les fonctions dans $\mathfrak{F}$ permettent d'approcher de telles fonctions f au sens suivant : pour tout $\epsilon > 0$, il existe ϕ et ψ dans $\mathcal{H}$ telles que

$$|f - \widehat{\phi}| \leq \widehat{\psi} \qquad \text{et} \qquad \mu(\widehat{\psi}) \leq \epsilon \ .$$

Pour le prouver on montre d'abord que les fonctions continues et à support compact sur le dual peuvent être approchées en ce sens ; ceci résulte du théorème de Stone-Weierstraß compte tenu de ce que l'ensemble $\mathfrak{F}$ des transformées de Fourier de fonction de $\mathcal{H}$ est une algèbre autoadjointe de fonction sur le dual, séparant les points et tendant vers 0 à l'infini ; il suffit ensuite d'invoquer le critère classique de μ-Riemann intégrabilité. Maintenant, il est facile de montrer que $\mu_n(f)$ converge vers $\mu(f)$ pour toute fonction f qui est μ-Riemann-intégrable. En particulier, si U est un ouvert borné μ-régulier, nous en déduisons que $\mu_n(U)$ tend vers $\mu(U)$ quand n tend vers l'infini.

Nous venons donc de retrouver, de façon certes fort compliquée, la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale ! Mais, comme l'a déjà remarqué Corwin [Cor77], cette méthode va se prêter à une vaste généralisation.

L'analogue de ce qui précède pour des groupes de Lie autres que $\mathbf{R}$ a été étudié par plusieurs auteurs : L. Corwin [Cor77] pour les groupes de Lie nilpotents, D. De George, N. Wallach et P. Delorme [DGW78, DGW79, Del86] pour les groupes de Lie semi-simples. Soit G un groupe de Lie unimodulaire. Notons $\Pi_u(G)$ le dual unitaire de G, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G, muni de la topologie de Fell et μ la mesure de Plancherel de G. Soit Γ un sous-groupe discret de G, co-compact. La représentation régulière droite de G dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ est somme directe dénombrable de représentations unitaires π avec multiplicités finies, $m_\Gamma(\pi)$. La mesure

$$\mu_\Gamma = \mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)^{-1} \sum_{\pi\in\Pi_u(G)} m_\Gamma(\pi)\delta_\pi$$

est la mesure associée à la décomposition spectrale de la trace dans la représentation régulière droite de G dans $L^2(\Gamma\backslash G)$. C'est la mesure μ_n construite précédemment, lorsque $G = \mathbf{R}$ et $\Gamma_n = n\mathbf{Z}$. Il est naturel de conjecturer que les mesure μ_{Γ_n} tendent vers la mesure de Plancherel μ de G , quand Γ_n tend vers $\{1\}$. De façon plus précise on fait la conjecture suivante :

Conjecture. *Soit* $(\Gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une famille de sous-groupes co-compacts de G telle que :*

(i). Pour tout n *,* Γ_n *est normal dans* Γ_0 *,*

(ii). Pour tout n *,* $\Gamma_n \supset \Gamma_{n+1}$ *,*

(iii). L'intersection des Γ_n *est réduite à* $\{1\}$ *.*

Alors pour tout ouvert U *de* $\Pi_u(G)$ *, relativement quasi-compact et* μ*-régulier,*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\Gamma_n}(U) = \mu(U) \ .$$

Cette conjecture a été démontrée pour les groupes nilpotents connexes et simplement connexes (sans l'hypothèse de normalité (i)) par L. Corwin [Cor77, Theorem 4]. Pour les groupes de Lie semi-simples linéaires connexes, elle a été établie en trois étapes, par D. De George et N. Wallach, puis P. Delorme :

[DGW78] Si U est réduit à un point du spectre discret de G .

[DGW79] Si G est de $\mathbf{R}$-rang 1 , pour tout ouvert U de $\Pi_u(G)$, borné et μ-régulier.

[Del86] Pour tout ouvert U de $\Pi_u(G)$, borné et μ-régulier.

Le découplage

Dans notre exemple initial nous avons mis en évidence deux étapes qui mettent en jeu des propriétés de nature fort différente. L'une est de nature "géométrique" et fait intervenir de façon

essentielle la famille de sous groupes discrets. L'autre est un résultat de "densité" où les sous-groupes discrets ne jouent aucun rôle. L'objectif de ce travail est de mettre au point une stratégie basée sur ce découplage en vue de généraliser les résultats de De George-Wallach et Delorme au cas des sous-groupes S-arithmétiques d'un groupe linéaire semi-simple connexe défini sur un corps de nombres F .
Le découplage est d'ailleurs très naturel dans un cadre adélique. Rappelons succinctement comment s'opère la traduction entre le langage classique et le langage adélique. Soit par exemple $\mathbf{G}$ un groupe linéaire semi-simple connexe et simplement connexe défini sur un corps de nombres F ; nous supposons de plus que $\mathbf{G}(F \otimes \mathbf{R})$ est non compact. Nous disposons alors du théorème d'approximation forte : le produit du groupe des points rationnels et du groupe des points sur $F_\infty = F \otimes \mathbf{R}$ est dense dans le groupe des points adéliques. L'isomorphisme

$$\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbf{A})/K_f \simeq \Gamma\backslash G(F_\infty) ,$$

où K_f est un sous-groupe ouvert compact aux places finies et Γ est la projection à l'infini de $\mathbf{G}(F) \cap (G(F_\infty) \times K_f)$ permet de traduire en langage classique les énoncés adéliques. La propriété de densité est à prouver pour le (dual du) groupe aux places à l'infini : il s'agit donc d'une propriété de nature locale, alors que la convergence est plutôt de nature "globale" et fait intervenir les sous-groupes arithmétiques qui sont définis au moyen d'une famille de sous-groupes ouverts compacts du groupe aux places finies.

Le principe de densité

Soit G un groupe localement compact unimodulaire ; on choisit une mesure de Haar. Soit $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de convolution de l'algèbre $L^1(G)$ formée de fonction ϕ lisses (au sens de Bruhat) et telles que pour toute représentation unitaire irréductible $\pi \in \Pi_u(G)$ l'opérateur $\pi(\phi)$ soit à trace. La transformée de Fourier scalaire de ϕ est la fonction sur le dual unitaire :

$$\widehat{\phi} \; : \; \pi \mapsto \mathrm{tr} \;\; \pi(\phi) \; .$$

On dira que le couple $(G, \mathcal{H})$ satisfait au principe de densité si l'assertion suivante est vérifiée : soit f la fonction caractéristique d'un ouvert U relativement quasi-compact μ-régulier de $\Pi_u(G)$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe ϕ et ψ dans $\mathcal{H}$ telles que

$$|f - \widehat{\phi}| \leq \widehat{\psi} \qquad et \qquad \mu(\widehat{\psi}) \leq \epsilon \; .$$

L'intérêt de principe de densité vient de la proposition suivante.

Proposition. *Soit* $(G, \mathcal{H})$ *un couple qui satisfait au principe de densité. Soient* μ_n *des mesures boréliennes positives sur* $\Pi_u(G)$. *Si, pour toute* $\phi \in \mathcal{H}$

$$\lim_{j\to\infty} \mu_n(\widehat{\phi}) = \mu(\widehat{\phi}) \ ,$$

alors pour tout ouvert $U \subset \Pi_u(G)$ *relativement quasi-compact et régulier pour la mesure de Plancherel :*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(U) = \mu(U) \ .$$

Plan de l'article

Conformément à la stratégie que nous proposons, l'article se compose de deux parties indépendantes : dans une première étape nous établissons le principe de densité pour certains couples $(G, \mathcal{H})$. Dans un second temps nous considérons des suites de mesures associées, par exemple, à des tours de sous-groupes co-compacts et nous utilisons la formule des traces de Selberg pour établir le résultat de convergence nécessaire pour utiliser la proposition ci-dessus. La conjecture en résulte pour les groupes G qui admettent une algèbre $\mathcal{H}$ de fonctions lisses et à support compact pour lesquels le couple $(G, \mathcal{H})$ satisfait au principe de densité. Le cas de tours de sous-groupes S-arithmétiques non nécessairement co-compacts est étudié ensuite.

Le principe de densité pour les groupes réductifs.

Dans une première partie, nous tentons de prouver que les groupes réductifs sur un corps local de caractéristique zéro satisfont au principe de densité en prenant pour algèbre $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke i.e. l'algèbre des fonctions lisses à support compact et K-finies où K est un sous-groupe compact maximal. Ce sera fait en général pour le cas archimédien ; dans le cas $\mathfrak{p}$-adique nous serons obligés de nous restreindre aux groupes de rang semi-simple 1 ou à $GL(n)$. Nous nous efforcerons au maximum de traiter simultanément le cas archimédien et le cas $\mathfrak{p}$-adique et nous essaierons d'unifier les notations et la terminologie. Remarquons que les similitudes implicites dans les notations et les terminologies usuelles sont parfois un peu abusives : elles pourraient laisser croire que certains objets sont les mêmes dans les deux situations, alors que les analogies ne sont que très partielles. Par exemple, le centre de Bernstein d'un groupe réductif $\mathfrak{p}$-adique est souvent présenté comme l'analogue du centre de l'algèbre enveloppante d'un groupe de Lie réductif. En fait, il sera ici préférable de considérer le centre de Bernstein comme l'analogue de l'algèbre des multiplicateurs introduite par Arthur dans le cas archimédien. Un ingrédient essentiel de la démonstration du théorème de densité est la caractérisation, grâce au théorème de

Paley-Wiener scalaire, de l'espace des fonctions sur le dual admissible $\Pi(G)$ qui sont transformées de Fourier scalaire des fonctions de H .

Notre démonstration est, dans le cas archimédien, très largement inspirée des travaux de Delorme [Del86] et utilise de façon essentielle la notion de K-type minimal ainsi que l'ordre sur les K-types minimaux dû à Vogan. Notre démonstration diffère de celle de Delorme en ceci que nous n'avons pas besoin d'introduire les transformées de Fourier pour les fonctions sur G qui tendent "très rapidement" vers 0 à l'infini. Il nous suffit de considérer les transformées de Fourier des fonctions lisses à support compact sur G et K-finies, c'est-à-dire de l'algèbre de Hecke. Ainsi, pour les applications, il nous suffira d'une formule des traces pour les fonctions lisses et à support compact sur G .

Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, les outils principaux sont le foncteur de restriction de Jacquet et le lemme qui donne la relation de commutation entre le foncteur de Jacquet et le foncteur d'induction ; ils sont d'ailleurs essentiels dans la construction du centre de Bernstein. Malgré l'existence du foncteur de restriction de Jacquet qui est un outil très puissant, sans analogue archimédien, nous ne disposons pas de théorème aussi fin que la classification de Vogan des représentations (en termes de K-types) et pour l'instant notre preuve repose sur une hypothèse (I.8.1) sur la structure du dual que nous ne savons pas prouver en général ; toutefois cette hypothèse est vérifiée par exemple en rang 1 , et pour GL_n .

Utilisation de la formule des traces de Selberg : cas co-compact

Nous supposons désormais que $\mathcal{H}$ est une algèbre de fonctions lisses à support compact sur G . Dans la seconde partie, nous construisons des exemples de familles de mesures μ_n boréliennes positives sur $\Pi_u(G)$ telles pour toute $\phi \in \mathcal{H}$

$$\lim_{j\to\infty} \mu_n(\widehat{\phi}) = \mu(\widehat{\phi}) \ .$$

Soit Γ un sous-groupe discret co-compact d'un groupe localement compact $\widetilde{G}$. La représentation régulière droite ρ_Γ de $\widetilde{G}$ dans $L^2(\Gamma\backslash\widetilde{G})$ est somme directe dénombrable de représentations unitaires π avec multiplicités finies, $m_\Gamma(\pi)$. Supposons maintenant que $\widetilde{G}$ soit un produit de deux groupes :

$$\widetilde{G} = G \times G' \ .$$

Considérerons des fonctions f lisses à support compact sur $G\times G'$, décomposées i.e. des fonctions de la forme $f = \phi \otimes h$ avec h de type positif. On associe à h une mesure positive μ_h sur $\Pi_u(G)$ telle que

$$\mu_h(\hat{\phi}) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\widetilde{G})} \operatorname{tr}\left(\rho_\Gamma(\phi \otimes h)\right) \ .$$

Nous dirons qu'une suite de fonctions $h_n \in C_c^\infty(G')$ tend fortement vers l'indicatrice de 1 si :

– pour tout n

$$h_n(1) = 1 \ ,$$

– pour tout $x \in G'$ distinct de 1

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0 \ ,$$

– il existe une fonction g continue et à support compact sur G' qui majore absolument tous les éléments de la suite :

$$|h_n(x)| \leq g(x) \ .$$

La formule des traces de Selbeg fournit alors facilement la proposition suivante II.1.2 :

Proposition. *Soit Γ un sous-groupe co-compact de $\widetilde{G} = G \times G'$ qui se projette injectivement dans le second facteur. Soit h_n une suite de fonction tendant fortement vers l'indicatrice de 1 sur G_2 . Pour toute fonction ϕ lisse et à support compact sur G , nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{h_n}(\hat{\phi}) = \mu^G(\hat{\phi}) \ ,$$

où μ^G est la mesure de Plancherel de G .

Supposons maintenant que $(G, \mathcal{H})$ satisfasse au principe de densité, la proposition ci-dessus fournit le résultat de convergence suivant

Théorème. *Soit $(G, \mathcal{H})$ un couple satisfaisant au principe de densité et G' un groupe localement compact. Soit Γ un sous-groupe discret co-compact de $\widetilde{G} = G \times G'$ qui se projette injectivement dans le second facteur. Si h_n est une suite de fonctions de type positif sur G' qui tend fortement vers l'indicatrice de 1 sur G' , alors pour tout ouvert U borné μ^G-régulier, la suite des mesures positives μ_{h_n} est telle que*

$$\mu_{h_n}(U) \to \mu^G(U) \ .$$

Soit Γ_n une tour de sous groupes co-compacts de G qui tend vers 1 ; on note G' la limite projective des quotients $\Gamma_n \backslash \Gamma_0$ et soit h_n la fonction caractéristique de l'adhérence de l'image de Γ_n dans G' ; une telle suite de fonction tend fortement vers 1 ; soit Γ l'image diagonale de Γ_0 dans $G \times G'$. Nous pouvons invoquer le résultat ci-dessus. Compte tenu des résultats de la première partie on retrouve ainsi les théorèmes de De George Wallach et Delorme généralisés partiellement au cadre S-arithmétique (théorème II.1.5).

Utilisation de la formule des traces de Selberg : cas général

Soit Γ un sous-groupe arithmétique d'un groupe de Lie réductif G ; en général Γ n'est pas co-compact et les opérateurs $\rho(f)$ ne sont plus à trace dans $L^2(\Gamma\backslash G)$; toutefois, ils le sont dans la partie discrète $L^2_{disc}(\Gamma\backslash G)$. Il est tentant de conjecturer, pour le spectre discret et pour le spectre cuspidal, que la mesure associée à la décomposition spectrale de la trace converge vers la mesure de Plancherel lorsque le sous-groupe arithmétique tend vers 1. Il n'y a pas encore de résultats complets dans cette direction, néanmoins Savin [Sav89] a obtenu la convergence de $\mu_\Gamma(U)$ vers la mesure de Plancherel de U dans le cas où U est réduit à un point du spectre discret de G ; c'est l'analogue l'étape (1) dans la description de la résolution de la conjecture de De George et Wallach, évoqué ci-dessus.

En utilisant la formule des traces invariante d'Arthur, nous obtenons un premier résultat en direction de l'analogue des résultats de Savin dans le cadre S-arithmétique. Soient $\mathbf{G}$ un groupe linéaire algébrique réductif connexe défini sur un corps de nombres F et $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ un ensemble fini de place de F réunion disjointe de trois sous ensembles et posons

$$G_i = \mathbf{G}(F_{S_i}) \ .$$

Supposons que f_{S_0} est un pseudo-coefficient normalisé pour une série discrète π_0 . Soit d_{π_0} le degré formel de π_0 , nous avons $f_{\pi_0}(1) = d_{\pi_0}$. Nous avons un théorème limite (théorème II.2.4) :

Théorème. *Soit h_n une suite de fonctions caractéristiques de sous-groupes ouverts compacts au-dessus d'un ensemble fini $S_2 \subset S$ de places, tendant fortement vers l'indicatrice de* 1 *. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{tr}\ \rho_{disc}(f_{S_0} \otimes \phi \otimes h_n \otimes h^S) = \mathrm{vol}\,(\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbf{A}))d_{\pi_0}\,\phi(1) \ .$$

Posons

$$\mu^{disc}_{\pi_0,h_n,h^S}(\widehat{\phi}) = \frac{1}{d_{\pi_0}\ \mathrm{vol}\,(\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbf{A}))}\ \mathrm{tr}\ \rho_{disc}(f_{S_0} \otimes \phi \otimes h_n \otimes h^S) \ .$$

Il faut prendre garde que les mesures $\mu^{disc}_{\pi_0,h_n,h^S}$ ne sont pas en général positives. En effet tr $\pi(f_{\pi_0})$ peut être négative. Toutefois nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire. *Soit h_n une suite de fonctions caractéristiques de sous-groupes ouverts compacts au-dessus d'un ensemble fini $S_2 \subset S$ de places, tendant fortement vers l'indicatrice de* 1 *; supposons que G_v vérifie I.8.2 pour toute place finie de S_1 . Soit $G = G_1$ le produit des G_v pour $v \in S_1$. Soit π_0 une série discrète dont les pseudo-coefficients sont tels que* tr $\pi(f_{\pi_0}) = 0$ *sauf si $\pi = \pi_0$, alors pour tout ouvert $U \subset \Pi_u(G)$, relativement quasi-compact et régulier pour la mesure de Plancherel, nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \mu^{disc}_{\pi_0,h_n,h^S}(U) = \mu^G(U) \ .$$

Il est bien connu que le spectre cuspidal n'est pas, en général, tempéré. C'est dire que la conjecture de Ramanujan généralisée – trop brutalement – est fausse. Toutefois, affirmer que la mesure

associée à la décomposition spectrale du spectre cuspidal doit converger vers la mesure de Plancherel de G implique que la conjecture de Ramanujan généralisée doit être vraie, en un certain sens, asymptotiquement. Le résultat ci-dessus prouve qu'il en est bien ainsi au moins pour les représentations automorphes ayant en une place un composant discret intégrable.
Nous terminons en donnant un résultat de limite pour le spectre cuspidal de GL_2 en présence de pseudo-coefficients.

Notations

De façon générale, si A est une algèbre, nous notons $A^\times$ le groupe des éléments inversibles de A . Si G est un groupe et M un sous-ensemble de G , $Z_G(M)$ est le centralisateur de M dans G et $N_G(M)$ est le stabilisateur de M dans G :

$$Z_G(M) = \{g \in G \mid \forall m \in M \; gm = mg\} \quad N_G(M) = \{g \in G \mid gMg^{-1} \subset M\} .$$

Le centre de G est noté $Z(G)$. Si G est un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ désigne son algèbre de Lie. D'une façon générale la minuscule gothique désigne l'algèbre de Lie du groupe noté par une majuscule romaine. Si $\mathfrak{a}$ est un espace vectoriel réel, $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ désigne son complexifié et $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ le dual de son complexifié. Si X est un espace topologique (respectivement une variété) nous notons $C(X)$ (respectivement $C_c(X)$, $C_0(X)$, $C^\infty(X)$, $C_c^\infty(X)$) l'espace des fonctions continues (respectivement continues à support compact, continues et tendant vers 0 à l'infini, lisses, lisses à support compact).

I Théorème de densité

I.1 Position du problème : le cadre classique.

Rappelons quelques théorèmes classiques. Soient X un espace topologique localement compact, μ une mesure de Radon positive sur X et A est une sous-algèbre de $C_0(X)$, auto-adjointe, séparant les points, ne s'annulant identiquement nulle part sur X .

Théorème I.1.1 *[Sch81, Théorème 63] Soit f une fonction sur X . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *La fonction f est bornée, à support compact, et l'ensemble de ses points de discontinuité est de μ-mesure nulle.*
- *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions g et h sur X , continues à support compact, telles que*

$$|f - g| \leq h \quad \text{et} \quad \mu(h) \leq \epsilon .$$

Une telle fonction est dite μ-Riemann-intégrable.

Théorème I.1.2 *[Weierstraß-Stone][Bou74, chapitre X, proposition 7, corollaire 2] Soit $f \in C_0(X)$; pour tout ϵ strictement positif, il existe $g \in A$, telle que*

$$|f - g| \leq \epsilon \ .$$

Lemme I.1.3 *Soit Y un compact de X ; il existe une fonction $h_0 \in A$ réelle positive et supérieure à 1 sur Y .*

Preuve : Pour tout x dans Y , il existe h_x dans A qui ne s'annule pas en x et donc $h_x\overline{h_x}$ est réelle non nulle en x . Nous concluons grâce à la compacité de Y .

□

Nous allons déduire de ces théorèmes le prototype des énoncés que nous allons chercher à prouver dans notre situation.

Proposition I.1.4 *Soit f une fonction μ-Riemann-intégrable sur X , il existe g et h dans A telles que*

$$|f - g| \leq h \quad \textit{et} \quad \mu(h) \leq \epsilon \ .$$

Preuve : Compte tenu du lemme ci-dessus il existe une fonction h_0 dans A qui soit réelle positive et supérieure à 1 sur le support de f . Le réel ϵ étant donné soit ϵ_1 tel que

$$\epsilon_1(||h_0||_\infty + 3\mu(h_0)) \leq \epsilon \ ,$$

où

$$||h_0||_\infty = \sup_{x \in X} |h_0(x)| \ .$$

Il existe f_1 à support compact, μ-Riemann-intégrable et telle que $f = f_1 h_0$. En effet, nous pouvons supposer que l'ensemble des points de discontinuité de f_1 est le même que celui de f, car h_0 est continue, et nous pouvons utiliser le critère de μ-Riemann-intégrabilité (Théorème I.1.1). Donc, il existe g_1 et h_1 continues à support compact telles que $|f_1 - g_1| \leq h_1$ et $\mu(h_1) \leq \epsilon_1$. Grâce au théorème de Weierstraß-Stone, soient g' et h' dans A telles que $|g' - g_1| \leq \epsilon_1$ et $|h' - h_1| \leq \epsilon_1$. Nous pouvons de plus supposer $h' \geq 0$ et même plus précisément est le carré d'une fonction réelle h'' dans A : en effet nous pouvons approcher la racine carrée de h_1 à ϵ_2 près par une fonction $h'' \in A$. Or si ϵ_2 est assez petit

$$\begin{aligned} |h''\overline{h''} - h_1| &\leq |h'' - \sqrt{h_1}|.|\overline{h''}| + |\overline{h''} - \sqrt{h_1}|.|\sqrt{h_1}| \\ &\leq \epsilon_2(2||\sqrt{h_1}||_\infty + \epsilon_2) \\ &\leq \epsilon_1 \ . \end{aligned}$$

Posons maintenant $h = h'h_0 + 2\epsilon_1 h_0$ et $g = g'h_0$; ce sont des fonctions de A telles que $|f-g| \leq h$. En effet :

$$\begin{aligned} |f-g| &\leq |f_1 - g_1|h_0 + |g_1 h_0 - g' h_0| \\ &\leq h_1 h_0 + \epsilon_1 h_0 \\ &\leq (h_1 h_0 - h' h_0) + h' h_0 + \epsilon_1 h_0 \\ &\leq h' h_0 + 2\epsilon_1 h_0 = h \ . \end{aligned}$$

De plus :

$$\mu(h) \leq \mu(h_1 h_0) + \mu(|h'h_0 - h_1 h_0|) + 2\epsilon_1 \mu(h_0) \leq \epsilon_1(||h_0||_\infty + 3\mu(h_0)) \leq \epsilon \ .$$

□

Définition *Un sous-ensemble ouvert U de X est dit μ-régulier si la μ-mesure de sa frontière est nulle.*

Proposition I.1.5 *Soient μ_n des mesures de Radon positives sur X . Nous supposons que les éléments de A sont tous intégrables par rapport aux mesures μ et μ_n (pour tout n) et que*

$$\forall g \in A, \qquad \lim_{n \to \infty} \mu_n(g) = \mu(g) \ ,$$

alors, pour toute fonction f à support compact, μ_n-mesurable pour tout n et μ-Riemann-intégrable :

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \mu(f) \ .$$

En particulier, si $U \subset X$ est un ouvert relativement compact μ-régulier, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(U) = \mu(U) \ .$$

Preuve : Soit g une fonction sur X comme dans l'énoncé et ϵ un réel strictement positif, le corollaire I.1.4 nous assure l'existence de g et h dans A telles que $|f-g| \leq h$ et $\mu(h) \leq \epsilon/3$. Nous en déduisons les inégalités suivantes :

$$|\mu_n(f) - \mu(f)| \leq |\mu_n(g) - \mu(g)| + \mu_n(h) + \mu(h) \leq |\mu_n(g) - \mu(g)| + |\mu_n(h) - \mu(h)| + 2\mu(h) \ .$$

Donc, pour n assez grand, $|\mu_n(f) - \mu(f)| \leq \epsilon$. Pour finir la preuve, il nous reste remarquer que la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert relativement compact et μ-régulier est μ_n-mesurable, pour tout n , et μ-Riemann-intégrable.

□

L'argument dans la preuve de ce résultat est emprunté à la démonstration du théorème d'Alexandroff [DS57, Theorem IV.9.15] (voir aussi [Sch81, Théorème 62]).

I.2 Un cadre plus général

Soient Π un espace topologique (non-séparé) et μ une mesure borélienne positive sur Π . Nous noterons $\mathfrak{B}$ l'espace des fonctions boréliennes et bornées sur Π . Nous nous donnons un sous-espace $\mathfrak{F}$ auto-adjoint de $\mathfrak{B} \cap L^1(\mu)$. Soit $\epsilon > 0$; nous définissons

$$U_\epsilon = \{f \in \mathfrak{B} \mid \exists\, h \in \mathfrak{F} \quad \text{avec} \quad |f| \leq h \quad \text{et} \quad \mu(h) < \epsilon\} \ .$$

Les U_ϵ sont une base de voisinages de l'origine d'une topologie $\mathcal{T}(\mu, \mathfrak{F})$ (non-séparée) sur $\mathfrak{B}$. Nous souhaitons étudier l'adhérence $\overline{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}$ pour cette topologie :

$$\overline{\mathfrak{F}} = \{f \in \mathfrak{B} \mid \exists\, g\,,\, h \in \mathfrak{F} \quad \text{avec} \quad |f - g| \leq h \quad \text{et} \quad \mu(h) < \epsilon\} \ .$$

Nous pouvons aussi considérer la topologie $\mathcal{T}(\mu, \overline{\mathfrak{F}})$ dont les

$$W_\epsilon = \{f \in \mathfrak{B} \mid \exists\, h_1 \in \overline{\mathfrak{F}} \quad \text{avec} \quad |f| \leq h_1 \quad \text{et} \quad \mu(h_1) < \epsilon\}$$

sont une base de voisinages de l'origine.

Lemme I.2.1 *Les topologies $\mathcal{T}(\mu, \mathfrak{F})$ et $\mathcal{T}(\mu, \overline{\mathfrak{F}})$ coïncident sur $\mathfrak{B}$.*

Preuve : Il suffit de remarquer que $U_\epsilon \subset W_\epsilon \subset U_{\epsilon'}$ si $\epsilon < \epsilon'$.

□

Soit Θ un espace localement compact séparé muni d'une application continue de Π dans Θ . Par abus de notation, nous noterons par la même lettre une fonction sur Θ et son image réciproque sur Π . Nous notons $C_0(\Theta)$ l'espace des fonctions continues sur Θ tendant vers 0 à l'infini. Soit A une sous-algèbre de $C_0(\Theta)$ auto-adjointe et séparant les points du compactifié d'Alexandrov de Θ . En particulier A est dense dans $C_0(\Theta)$. Nous supposons que $\mathfrak{F}$ est un module sur A pour le produit des fonctions et que la propriété suivante est vraie :

$(\star)$ Pour tout $g \in \mathfrak{F}$, il existe $h \in \mathfrak{F}$ avec $|g| \leq h$.

Lemme I.2.2 *Soit $c \in C_0(\Theta)$ et $g_1 \in \mathfrak{F}$ alors $f = cg_1 \in \overline{\mathfrak{F}}$.*

Preuve : Notons h_1 une fonction de $\mathfrak{F}$ avec $|g_1| \leq h_1$. Pour tout ϵ_1 strictement positif, il existe $a \in A$ avec $|c - a| \leq \epsilon_1$; posons $g = ag_1$ et $h = \epsilon_1 h_1$; ce sont des éléments de $\mathfrak{F}$. Nous avons

$$|f - g| \leq \epsilon_1 |g_1| \leq \epsilon_1 h_1 = h$$

et $\mu(h) = \epsilon_1 \mu(h_1)$ peut être rendu aussi petit qu'on veut.

□

Nous en déduisons immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire I.2.3 *L'espace* $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ *est un* $C_0(\Theta)$*-module pour le produit des fonctions.*

Corollaire I.2.4 *Soit* μ_n *une suite de mesures boréliennes positives sur* Π *telles que tout* $g \in \mathfrak{F}$ *soit* μ_n*-intégrable (pour tout* n*) et*

$$\lim_{j \to \infty} \mu_n(g) = \mu(g) \ .$$

Alors, pour tout $f \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ *, nous avons :*

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(f) = \mu(f) \ .$$

Preuve : En effet, il existe g et h dans $\mathfrak{F}$ telles que

$$|f - g| \leq h \qquad \text{et} \qquad \mu(h) \leq \epsilon \ .$$

Et donc

$$\begin{aligned} |\mu_n(f) - \mu(f)| &\leq \mu_n(h) + |\mu_n(g) - \mu(g)| + \mu(h) \\ &\leq |\mu_n(h) - \mu(h)| + 2\mu(h) + |\mu_n(g) - \mu(g)| \\ &\leq 4\epsilon \end{aligned}$$

dès que n est assez grand.

□

Nous appliquerons ceci à des sous-espaces de divers objets qui seront définis plus bas : Π un sous-espace du dual unitaire $\Pi_u(G)$ de G , $\mathfrak{F}$ l'espace des restrictions à Π des transformées de Fourier scalaires des éléments de l'algèbre de Hecke, μ la restriction à Π de la mesure de Plancherel, Θ un sous-espace des caractères infinitésimaux hermitiens et A la restriction à Θ d'une algèbre de multiplicateurs.

I.3 Théorème de densité pour les groupes réductifs

Algèbres de Hecke et représentations.

Dans toute la suite de ce chapitre, sauf mention expresse du contraire, F désigne un corps local de caractéristique zéro et $G = \mathbf{G}(F)$ l'ensemble des points sur F d'un groupe linéaire, réductif, connexe $\mathbf{G}$, défini sur F. Nous fixons K un sous-groupe compact maximal de G (dans le cas

$\mathfrak{p}$-adique, il convient de prendre un “bon compact”, au sens de Bruhat-Tits [Art78]). Nous notons $C_c^\infty(G,K)$ l'espace vectoriel des fonctions sur G , à valeurs complexes, lisses, à support compact et K-finies à droite et à gauche (dans le cas $\mathfrak{p}$-adique cette dernière condition est automatiquement vérifiée). Nous appellerons “algèbre de Hecke” l'algèbre de convolution des mesures à support compact sur G qui sont le produit d'une fonction de $C_c^\infty(G,K)$ et d'une mesure de Haar sur G . Nous la notons $\mathcal{H}(G)$ ou simplement $\mathcal{H}$, le compact K étant fixé une fois pour toutes. Nous disposons de la catégorie des représentations admissibles de type fini de l'algèbre de Hecke. Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, c'est le concept classique. Si F est archimédien, une représentation admissible de type fini est la donnée d'un $\mathcal{H}$-module V non-dégénéré (i.e. $\mathcal{H}V = V$) et tel que le $(\mathfrak{g},K)$-module associé soit admissible de type fini. Comme, par ailleurs, tout $(\mathfrak{g},K)$-module admissible de type fini se réalise comme l'espace des vecteurs K-finis d'une représentation localement bornée du groupe de Lie G dans un espace de Hilbert, la catégorie des représentations admissibles de type fini de l'algèbre de Hecke s'identifie à celle des $(\mathfrak{g},K)$-modules admissibles de type fini. Nous noterons $\Pi(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles de $\mathcal{H}$. Soient $\phi\in\mathcal{H}$ et $\pi\in\Pi(G)$; l'opérateur $\pi(\phi)$ est de rang fini. Soit $\phi\in\mathcal{H}$, nous notons $\widehat{\phi}$ sa transformée de Fourier scalaire ; c'est la fonction sur $\Pi(G)$ définie par

$$\widehat{\phi}(\pi) = \mathrm{tr}\ \pi(\phi)\ .$$

L'algèbre de Hecke est une algèbre involutive ; l'involution est donnée par

$$\phi^*(x) = \overline{\phi(x^{-1})}\ .$$

Une représentation π est dite hermitienne (respectivement unitaire) si V , l'espace de π possède une forme hermitienne (respectivement un produit scalaire) compatible avec cette involution :

$$(\pi(\phi^*)v,w) = (v,\pi(\phi)w)\ .$$

Nous notons $\Pi_u(G)$ le sous-ensemble de $\Pi(G)$ formé des représentations unitaires.

Lemme I.3.1 *Soit $\phi\in\mathcal{H}$; il existe $\psi\in\mathcal{H}$ telle que*

$$|\widehat{\phi}(\pi)| \le \widehat{\psi}(\pi) \qquad \textit{pour tout } \pi\in\Pi_u(G)\ .$$

Preuve : D'après le théorème de Dixmier et Malliavin [DM78] tout $\phi\in\mathcal{H}$ est somme finie de produits de convolution et donc ϕ peut s'écrire comme combinaison linéaire finie de fonctions de type positif :

$$\phi = \sum_i \lambda_i\ \phi_i * \phi_i^*$$

avec $\lambda_i \in \mathbf{C}$. Si π est unitaire l'opérateur $\pi(\phi_i * \phi_i^*)$ est positif. La fonction

$$\psi = \sum_i |\lambda_i| \ \phi_i * \phi_i^* \ ,$$

est donc une solution à notre problème.

$\square$

Une représentation est dite cuspidale si tous ses coefficients sont des fonctions sur G à support compact, modulo son centre. Nous notons $\Pi_{cusp}(G)$ le sous-ensemble de $\Pi(G)$ formé des représentations cuspidales. Une représentation unitaire est dans la série discrète (respectivement tempérée) si elle admet un coefficient non nul, qui soit de carré intégrable (respectivement $L^{2+\epsilon}$, pour tout $\epsilon > 0$) en tant que fonction sur G , modulo son centre. Nous notons $\Pi_2(G)$ (respectivement $\Pi_{temp}(G)$) le sous-ensemble de $\Pi_u(G)$ formé des représentations dans la série discrète (respectivement tempérées.) Dans le cas archimédien, $\Pi_2(G)$ est vide sauf si le rang semi-simple de G est égal au rang semi-simple de K , i.e. sauf s'il existe un sous-groupe de Cartan compact modulo le centre de G , et $\Pi_{cusp}(G)$ est vide sauf si G est compact modulo son centre ; par contre dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, il y a toujours des représentations cuspidales et, a fortiori, des séries discrètes puisqu'une représentation cuspidale est, à torsion près par un caractère pour la rendre unitarisable, dans la série discrète.
Soit $\mathcal{R}(G)$ le groupe de Grothendieck engendré par les représentations admissibles de longueur finie ; c'est le groupe abélien libre de base $\Pi(G)$. Si π est une représentation admissible de longueur finie nous noterons $[\pi]$ son image dans le groupe de Grothendieck. Une fonction f sur $\Pi(G)$ se prolonge naturellement en une forme linéaire sur $\mathcal{R}(G)$ que nous noterons encore f . C'est en particulier le cas de $\widehat{\phi}$ pour $\phi \in \mathcal{H}$.

Topologie du dual.

Soit π unitaire, notons $\mathcal{C}^+(\pi)$ l'espace vectoriel engendré par les coefficients diagonaux de π , i.e. les fonctions de type positif sur G de la forme : $g \mapsto \langle \pi(g)v, v\rangle$, où $v \in V$, et $\langle , \rangle$ est un produit scalaire G-invariant. Nous définissons une topologie sur $\Pi_u(G)$, dite topologie de Fell comme suit. Si π est dans $\Pi_u(G)$, notons Cl $\mathcal{C}^+(\pi)$ l'adhérence dans $C(G)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Plus généralement, si $X \subset \Pi_u(G)$, soit $\mathcal{C}^+(X)$ l'espace vectoriel engendré par les coefficients diagonaux d'éléments de X , nous définissons $Cl\ X$ comme l'ensemble des $\pi \in \Pi_u(G)$ tels que $\mathcal{C}^+(\pi) \subset Cl\ \mathcal{C}^+(X)$, en tant que sous-espaces de $C(G)$. Cet opérateur de fermeture définit la topologie de $\Pi_u(G)$. [1]

1. Remarquons que, s'il était besoin, il serait possible de définir une topologie sur $\Pi(G)$; en effet, un opérateur de fermeture est donné par la formule suivante : si $\pi \in \Pi(G)$ et $X \subset \Pi(G)$, $\pi \in$ Cl X si $\mathcal{C}(\pi) \subset$ Cl $\mathcal{C}(X)$. Et ceci

Le théorème

Le choix d'une mesure de Haar permet d'identifier $\mathcal{H}$ avec $C_c^\infty(G,K)$ et de donner un sens à $\phi(1)$ pour $\phi \in \mathcal{H}$. Il existe une mesure borélienne μ sur $\Pi_u(G)$, la mesure de Plancherel, unique si la mesure de Haar de G est fixée, telle que :

$$\forall \phi \in \mathcal{H} \ , \qquad \mu(\widehat{\phi}) = \phi(1) \ .$$

Notre objectif est de démontrer le théorème I.9.4, dont un cas particulier peut se formuler comme suit :

Théorème I.3.2 *Supposons que G satisfait l'hypothèse I.8.2. Soit f la fonction caractéristique d'un ouvert μ-régulier de $\Pi_u(G)$ dont l'image dans $\Theta(G)$ est relativement compacte. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe ϕ et ψ dans $\mathcal{H}$ telles que*

$$|f - \widehat{\phi}| \leq \widehat{\psi} \qquad \text{et} \qquad \mu(\widehat{\psi}) < \epsilon \ .$$

Nous disposerons alors de l'analogue I.2.4 de I.1.5. Par rapport aux théorèmes classiques que nous avons rappelé plus haut, la preuve est plus délicate car les fonctions sur $\Pi_u(G)$ qui sont transformées de Fourier scalaires des mesures dans l'algèbre de convolution $\mathcal{H}$ ne forment pas une algèbre (pour le produit des fonctions) mais surtout ces fonctions ne sont pas continues ; des discontinuités peuvent se produire en des points où la topologie de $\Pi_u(G)$ n'est pas séparée. C'est là la difficulté essentielle. Ces ennuis peuvent être en partie contournés en utilisant l'algèbre des multiplicateurs (introduite par Arthur [Art83] dans le cas archimédien) qui, par transformée de Fourier, donne une algèbre de fonctions continues auto-adjointe sur le dual unitaire. Toutefois cette algèbre ne sépare pas les points du dual unitaire, ni même du dual tempéré.

I.4 Structure du dual unitaire

Sous-groupes de Levi et sous-groupes paraboliques.

Soit P un sous-groupe parabolique de G et $P = MN$ une décomposition de Levi de P . Nous notons δ_P la fonction modulaire de P : $p \mapsto |(\det Ad(p)|\mathfrak{n})|$. Nous fixons P_0 un sous-groupe parabolique minimal ; rappelons que le sous-groupe compact maximal K de G a été choisi de sorte que $G = P_0 K$. Fixons-nous également M_0 un sous-groupe de Levi de P_0 qui soit de plus, θ-stable dans le cas archimédien (ici θ est l'involution de Cartan associée à K .) Nous noterons $\mathcal{L}^G(M)$ les sous-groupes de Levi de G qui contiennent M . L'ensemble des sous-groupes de Levi

décrit complètement la topologie. Voir par exemple [Tad88].

de G contenant M_0 sera noté simplement noté $\mathcal{L}^G$; de même $\mathcal{L}^M$ désignera l'ensemble des sous-groupes de Levi contenus dans M et contenant M_0 . Nous notons W_G le groupe de Weyl de G relatif à M_0 . Si F est archimédien nous notons $W_G^{\mathbf{C}}$ le groupe de Weyl complexe de G , i.e. le groupe de Weyl du complexifié $G_{\mathbf{C}} = \mathbf{G}(F \otimes \mathbf{C})$.

Soit M un sous-groupe de Levi. Notons $X^{rat}(M)$ l'ensemble des caractères rationnels de M . C'est un $\mathbf{Z}$-module de type fini. Nous posons

$$\mathfrak{a}_M = \mathrm{Hom}\ (X^{rat}(M), \mathbf{R})\ .$$

Soit $\chi \in X^{rat}(M)$, notons λ_χ son image dans $\mathfrak{a}_M^* = X^{rat}(M) \otimes \mathbf{R}$. Nous définissons une application H_M de M dans $\mathfrak{a}_M$ en imposant que

$$|\chi(m)| = q_F^{\langle H_M(m), \lambda_\chi \rangle}$$

pour tout $m \in M$ et tout $\chi \in X^{rat}(M)$; ici q_F est égal à e si F est archimédien et à la caractéristique résiduelle q de F , sinon. Dans le cas archimédien H_M est surjective. Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique l'image de H_M est un réseau de $\mathfrak{a}_M$.

Nous notons M^1 le noyau de H_M . Nous dirons qu'un homomorphisme de M dans $\mathbf{C}^\times$ est un caractère non-ramifié s'il est trivial sur le noyau de H_M . Nous notons $X^{nr}(M)$ l'ensemble des caractères non-ramifiés et $X_u^{nr}(M)$ ceux d'entre eux qui sont unitaires. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbf{C}}^*$ (le complexifié de $\mathfrak{a}_M^*$;) nous posons

$$\chi_\lambda(m) = q_F^{\langle H_M(m), \lambda \rangle}\ .$$

L'application $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ est un homomorphisme surjectif de $\mathfrak{a}_{M,\mathbf{C}}^*$ sur $X^{nr}(M)$. Le sous-espace réel $\mathfrak{a}_M^*$ s'envoie bijectivement sur les caractères non-ramifiés réels ; l'image de $i\mathfrak{a}_M^*$ est $X_u^{nr}(M)$. Dans le cas archimédien cet homomorphisme est bijectif et $X^{nr}(M)$ est isomorphe à $\mathbf{C}^n$, où n est le F-rang du centre de M . Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique le noyau est un réseau de $i\mathfrak{a}_M^*$ et $X^{nr}(M)$ est naturellement muni d'une structure de variété algébrique complexe isomorphe à $(\mathbf{C}^\times)^n$.

Si P est un sous-groupe parabolique qui contient M , nous pouvons étendre H_M à G , grâce à la décomposition d'Iwasawa $G = PK$. Nous notons H_P une telle extension (qui dépend donc du choix de K .)

Induction parabolique.

Soit P un sous-groupe parabolique de sous-groupe de Levi M ; soient $\sigma \in \Pi(M)$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbf{C}}^*$; notons σ_λ la représentation définie par

$$\sigma_\lambda(m) = q_F^{\langle \lambda, H_M(m) \rangle} \sigma(m)$$

et $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ l'induite normalisée de P à G , de σ_λ . Rappelons-en la description dans le cas $\mathfrak{p}$-adique (dans le cas archimédien la description est un peu plus malaisée car le groupe n'agit pas dans l'espace des vecteurs K-finis :) l'espace de la représentation $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ est l'espace des fonctions F sur G qui sont K-finies à droite, à valeurs dans $V(\sigma)$, l'espace de σ , telles que :

$$\forall g \in G, \forall m \in M, \forall n \in N, \qquad F(nmk) = \delta_P^{1/2}(m)\sigma(m)F(g)\ .$$

L'action de G est donnée par :

$$(\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G(g)F)(x) = q_F^{\langle \lambda, H_P(xg) - H_P(x) \rangle} F(xg)\ .$$

Lorsque $\lambda = 0$, nous écrirons $\mathcal{I}_{P,\sigma}^G$ au lieu de $\mathcal{I}_{P,\sigma,0}^G$. Il est bien connu [Cas, 6.3.8, 6.3.9 et 6.3.11] que la suite de composition de l'induite est finie et ne dépend que de M et pas de P ; il est donc légitime de poser

$$i_{GM}(\sigma) = [\mathcal{I}_{P,\sigma}^G]\ .$$

Nous dirons que $\pi \in \Pi(G)$ est un composant de $i_{GM}(\sigma)$ si π est isomorphe à un sous-quotient irréductible de $\mathcal{I}_{P,\sigma}^G$. L'application i_{GM} se prolonge par linéarité en un homomorphisme entre groupes de Grothendieck

$$i_{GM} \ : \mathcal{R}(M) \to \mathcal{R}(G)\ .$$

Mesure de Plancherel.

Soit μ la mesure de Plancherel et soit f une fonction f sur $\Pi_u(G)$, μ-intégrable. D'après [HC76, Theorem 25.1] et [HC83, Theorem 4], nous avons l'expression suivante pour $\mu(f)$:

$$\mu(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}^G} \sum_{\sigma \in \Pi_2(M)} \mu_{M,\sigma}(f)$$

où

$$\mu_{M,\sigma}(f) = \int_{X_u^{nr}(M)} f(i_{GM}(\sigma \otimes \chi))\ \tilde{\mu}_{M,\sigma}(\chi) d\chi\ .$$

Les fonctions $\chi \mapsto \tilde{\mu}_{M,\sigma}(\chi)$ sont :

(i). invariantes par W_G , i.e. $\tilde{\mu}_{wM,w\sigma}(w\chi) = \tilde{\mu}_{M,\sigma}(\chi)$, si $w \in W_G$

(ii). méromorphes sur $X^{nr}(M)$ et holomorphes sur un voisinage de $X_u^{nr}(M)$

(iii). dans le cas archimédien, elles sont à croissance lente sur $X_u^{nr}(M)$, c'est-à-dire que il existe $C_\sigma > 0$ et $r_\sigma > 0$ tels que

$$\tilde{\mu}_{M,\sigma}(\chi) \leq C_\sigma(1 + ||\chi||)^{r_\sigma}.$$

La norme est une norme quelconque sur $X_u^{nr}(M)$ qui est isomorphe à $\mathbf{R}^n$.

Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, la condition de croissance est inutile puisque $X_u^{nr}(M)$ est compact.

Données cuspidales

Nous appelons donnée cuspidale pour G un couple (M,σ) où $M \in \mathcal{L}^G$ et $\sigma \in \Pi_{cusp}(M)$. Le normalisateur de M_0 dans G opère par conjugaison sur les données cuspidales. Si F est archimédien, une donnée cuspidale est tout simplement la donnée d'une représentation du sous-groupe de Levi minimal ; en effet, dans ce cas, il n'y a de représentation cuspidale que si $M = M_0$ et toutes les représentations de M_0 sont cuspidales, car M_0 est compact modulo son centre.
Soit (M,σ) une donnée cuspidale. Il y a une action naturelle de $X^{nr}(M)$ sur $\Pi_{cusp}(M)$, induite par $\chi \mapsto \sigma \otimes \chi$. L'orbite de (M,σ) sous cette action définit un sous-ensemble de données cuspidales, qui est isomorphe au quotient de $X^{nr}(M)$ par le sous-groupe fini des $\chi \in X^{nr}(M)$ qui fixent σ . Son image $\mathcal{C}_\sigma$ dans l'espace des classes de conjugaison de données cuspidales est le quotient de l'orbite de (M,σ) par le sous-groupe du groupe de Weyl qui la stabilise. Ce quotient est naturellement muni d'une structure de variété algébrique ; nous n'utiliserons cette structure que dans le cas $\mathfrak{p}$-adique. Notons $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble des données cuspidales de G , à conjugaison près par le normalisateur de M_0 . Nous le munissons d'une structure de variété ind-algébrique c'est-à-dire réunion disjointe infinie des variétés algébriques $\mathcal{C}_\sigma$ qui en sont les composantes connexes [Tad88, Theorem 4.5]. Soit $L \in \mathcal{L}^G$; nous disposons d'applications naturelles entre les classes de conjugaison de données cuspidales pour L et G :

$$\mathcal{C}_L^G \ : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(G) \ .$$

Le théorème du sous-quotient de Harish-Chandra montre que, pour toute représentation π dans $\Pi(G)$, il existe une donnée cuspidale (M,σ) telle que π soit un sous-quotient de $\mathcal{I}_{P,\sigma}^G$: voir [HC51, Theorem 1, Corollary], si F est archimédien, et, par exemple, [BDe84, Proposition 2.10], si F est $\mathfrak{p}$-adique. En fait, plus précisément, le théorème de la sous-représentation de Casselman montre que π peut être réalisée comme sous-module d'une induite [Kna86, Theorem 8.37] [Cas, Theorem 5.1.2]. Si F est $\mathfrak{p}$-adique le couple (M,σ) est uniquement déterminé par π à conjugaison près par le normalisateur de M_0 . Dans le cas archimédien il n'y a plus d'unicité à conjugaison près et il n'y a pas d'application naturelle de $\Pi(G)$ dans $\mathcal{C}(G)$; nous pallions cette difficulté en introduisant l'espace $\Theta(G)$ des caractères infinitésimaux dont la définition est rappelée ci-dessous. Dans tous les cas, nous aurons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \Pi(G) \\ & & \downarrow \\ \mathcal{C}(G) & \to & \Theta(G) \end{array} .$$

La description de la notion de caractère infinitésimal diverge sensiblement entre le cas archimédien et le cas $\mathfrak{p}$-adique ; ils seront étudiés séparément.

Caractère infinitésimal, cas $\mathfrak{p}$-adique.

Dans ce paragraphe, nous supposons que F est un corps $\mathfrak{p}$-adique. Nous notons $\mathfrak{Z}(G)$ le centre de Bernstein de G ; c'est l'algèbre de convolution des distributions D sur G , invariantes par conjugaison et telles que, pour tout sous-groupe ouvert compact H de G , la convolée $e_H * D = D * e_H$ de D (où e_H est la mesure image directe par l'inclusion de la mesure de Haar normalisée sur H) soit à support compact. Nous notons $\mathfrak{Z}^0(G)$ la sous-algèbre engendrée par ces mesures. Un caractère de $\mathfrak{Z}(G)$ non trivial sur $\mathfrak{Z}^0(G)$ est par définition un caractère infinitésimal de G [BDK86, paragraphe 2.2]. Nous notons $\Theta(G)$ l'ensemble des caractères infinitésimaux et nous le munissons de la topologie de la convergence simple. Nous dirons que $\pi \in \Pi(G)$ admet θ comme caractère infinitésimal si, pour tout z dans $\mathfrak{Z}(G)$, $\pi(z * \phi) = \theta(z)\pi(\phi)$, pour tout $\phi \in \mathcal{H}$. Toute représentation admissible irréductible admet un caractère infinitésimal.
Soit (M, σ) une donnée cuspidale. Il existe un caractère θ dans $\Theta(G)$ qui ne dépend que de la classe de (M, σ) dans $\mathcal{C}(G)$ tel que tous les sous-quotients de $\mathcal{I}_{P,\sigma}^G$ admettent θ comme caractère infinitésimal. Plus généralement, si $\sigma \in \Pi(L)$ admet $\theta_\sigma \in \Theta(L)$ comme caractère infinitésimal, nous noterons $\Theta_L^G(\theta_\sigma)$ le caractère infinitésimal des sous-quotients de $\mathcal{I}_{P,\sigma}^G$. Nous disposons ainsi d'un homéomorphisme [BDe84, 2.13–2.16] de l'ensemble des classes de données cuspidales de G dans l'ensemble des caractères infinitésimaux

$$Inf_G \ : \mathcal{C}(G) \to \Theta(G) \ ,$$

compatible avec les applications naturelles entre classes de conjugaison de données cuspidales $\mathcal{C}_L^G$:

$$Inf_G \circ \mathcal{C}_L^G = \Theta_L^G \circ Inf_L \ .$$

Les applications Θ_L^G et $\mathcal{C}_L^G$ ainsi définies sont propres et à fibres finies [BDK86, paragraphe 2.4]. Nous noterons $\mathcal{A}(G)$ l'algèbre des fonctions images directes sur $\Theta(G)$ par Inf_G des fonctions f "régulières" sur $\mathcal{C}(G)$. Ici "régulière" veut dire que la restriction de f à chaque composante connexe $\mathcal{C}_\sigma$ est une fonction dans l'algèbre des fonctions régulières $\mathbf{C}[\mathcal{C}_\sigma]$, au sens usuel. Le théorème de Bernstein [BDe84, Théorème 2.13] affirme que Inf_G est bijective et que $\mathfrak{Z}(G)$ est isomorphe à $\mathcal{A}(G)$ via l'application de Gelfand :

$$z \mapsto f_z \qquad \text{où} \qquad f_z(\theta) = \theta(z) \ .$$

L'analogie avec le cas archimédien traité ci-dessous apparaît en remarquant que les fonctions régulières sur $X^{nr}(M)$ sont les transformées de Fourier-Mellin des fonctions dans $C_c^\infty(M/M^1)$. L'espace $\Theta(G)$ est une union disjointe infinie de composantes connexes et chacune est l'ensemble des points complexes d'une variété algébrique. C'est un espace topologique localement compact et l'application naturelle de $\Pi(G)$ dans $\Theta(G)$ est surjective, à fibres finies et continue [Tad88, Theorem 4.2].

Caractère infinitésimal : cas archimédien.

Dans ce paragraphe, nous supposons F archimédien. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{m}_0 \otimes \mathbf{C}$ de la forme $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_{M_0} \oplus i\mathfrak{b}_K$, où $\mathfrak{b}_K$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}_0$. Donc $\mathfrak{h} \otimes \mathbf{C}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}$. Notons $\mathfrak{z}(G)$ le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. L'isomorphisme de Harish-Chandra montre alors que $\mathfrak{z}(G)$ est isomorphe à l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{C}}$ qui sont invariantes par $W_G^{\mathbf{C}}$ [Kna86, Theorem 8.18]. Un caractère de $\mathfrak{z}(G)$ est appelé caractère infinitésimal ; nous notons $\Theta(G)$ l'ensemble de ces caractères. L'isomorphisme d'Harish-Chandra montre que les caractères infinitésimaux sont en bijection avec les orbites, sous le groupe de Weyl complexe $W_G^{\mathbf{C}}$, dans $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{C}}$

$$inf_G \ : \mathfrak{h}^*_{\mathbf{C}}/W_G^{\mathbf{C}} \to \Theta(G) \ .$$

L'espace $\Theta(G)$ est donc l'ensemble des points complexes d'une variété algébrique. Nous le munissons de la topologie de la convergence simple. C'est un espace topologique localement compact et l'application naturelle de $\Pi(G)$ dans $\Theta(G)$ est continue [BDx60] et inf_G est un homéomorphisme. Soit Λ un élément de $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{C}}$; notons χ_Λ^G le caractère de $\mathfrak{z}(G)$ qui lui est associé. Nous disons que π admet χ_Λ^G comme caractère infinitésimal si, pour tout $z \in \mathfrak{z}(G)$,

$$\pi(z * \phi) = \chi_\Lambda^G(z)\pi(\phi)$$

pour tout $\phi \in \mathcal{H}$. Toute représentation irréductible admissible π admet un caractère infinitésimal θ_π et il lui est donc associée une orbite dans $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{C}}$.

Soient $M \in \mathcal{L}^G$, $\sigma \in \Pi(M)$, avec χ_Λ^M comme caractère infinitésimal, alors $\mathcal{I}_{P,\sigma}^G$ admet χ_Λ^G comme caractère infinitésimal [Kna86, Proposition 8.22]. Nous notons Θ_M^G l'application propre et à fibres finies qui envoie χ_Λ^M sur χ_Λ^G . Nous disposons aussi d'une action de $X^{nr}(M)$ sur $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{C}}$ compatible avec les constructions précédentes. Enfin, comme dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, nous disposons d'une application de l'ensemble des classes de données cuspidales de G dans l'ensemble des caractères infinitésimaux

$$Inf_G \ : \mathcal{C}(G) \to \Theta(G) \ ,$$

mais cette fois l'application n'est en général ni injective ni surjective.

Dans le cadre archimédien, nous définirons l'algèbre $\mathcal{A}(G)$ comme l'algèbre des fonctions f sur $\Theta(G)$ qui sont les images directes par inf_G des transformées de Fourier-Laplace de fonctions $\alpha \in C_c^\infty(\mathfrak{h})$ qui sont $W_G^{\mathbf{C}}$-invariantes :

$$f(\chi_\Lambda^G) = \widehat{\alpha}(\Lambda) \ .$$

Multiplicateurs et unitarité

Le théorème de Paley-Wiener matriciel [Art83] dans le cas archimédien (voir aussi [Del84]) et le théorème de Bernstein [BDe84] dans le cas $\mathfrak{p}$-adique montrent que l'algèbre $\mathcal{A}(G)$ peut être considérée comme une algèbre de multiplicateurs pour l'algèbre de Hecke : soient $\phi \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{A}(G)$; il existe $\phi_f \in \mathcal{H}$ telle que pour tout $\pi \in \Pi(G)$ de caractère infinitésimal θ_π , nous ayons

$$\pi(\phi_f) = f(\theta_\pi)\pi(\phi) ,$$

et en particulier

$$\widehat{\phi_f}(\pi) = f(\theta_\pi)\widehat{\phi}(\pi) .$$

L'algèbre $\mathcal{A}(G)$ est munie d'une involution $f \mapsto f^*$ compatible avec l'involution sur l'algèbre de Hecke. Ceci définit par dualité une involution $\theta \mapsto \widetilde{\theta}$ sur l'ensemble des caractères infinitésimaux :

$$\widetilde{\theta} \ : \ f \mapsto \overline{f^*(\theta)} .$$

Ici $z \mapsto \overline{z}$ est la conjugaison complexe. Un caractère infinitésimal θ est dit hermitien si $\widetilde{\theta} = \theta$. Soit $\pi \in \Pi(G)$ de caractère infinitésimal θ . Nous notons $\widetilde{\pi}$ la complexe conjuguée de la contragrédiente de π. Son caractère infinitésimal est $\widetilde{\theta}$. Si π est unitaire son caractère infinitésimal est hermitien.

Lemme I.4.1 *L'ensemble $\Theta_h(G)$ des caractères hermitiens est un espace topologique localement compact. Les restrictions des fonctions de l'algèbre $\mathcal{A}(G)$ à $\Theta_h(G)$ forment une algèbre auto-adjointe qui sépare les points.*

Preuve : L'involution étant continue l'ensemble des caractères hermitiens est un fermé $\Theta_h(G)$ de $\Theta(G)$ et l'involution sur $\mathcal{A}(G)$ restreinte à $\Theta_h(G)$ est la conjugaison complexe. Enfin deux points distincts de $\Theta_h(G)$ correspondent à des caractères distincts de $\mathcal{A}(G)$, ils sont donc séparés par des fonctions de $\mathcal{A}(G)$.

□

Les restrictions à $\Theta_h(G)$ des fonctions de $\mathcal{A}(G)$ ne tendent pas vers zéro à l'infini. Ce sera toutefois le cas si nous nous restreignons à des sous-ensembles que nous appellerons pseudo bandes verticales à partie réelle compacte, définis ci-après.

Pseudo bandes verticales

Dans le cas archimédien, nous appelons pseudo bande verticale à partie réelle compacte de $\Theta(G)$ l'image d'une bande verticale à partie réelle compacte dans $\mathfrak{h}^* \otimes \mathbf{C}$. Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, nous appelons pseudo bande verticale de $\Theta(G)$ à partie réelle compacte un ensemble de caractères infinitésimaux attachés à des données cuspidales de la forme (M, σ_λ) avec σ dans un ensemble compact de $\Pi_{cusp}(M)$ et λ imaginaire pur i.e. $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$. Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, une pseudo bande verticale de $\Theta(G)$ à partie réelle compacte est compacte. Dans une pseudo bande verticale à partie réelle compacte, les fonctions de $\mathcal{A}(G)$ tendent vers zéro à l'infini.

Lemme I.4.2 *Soit $\pi \in \Pi_u(G)$ alors, soit π est tempérée, soit π est l'unique quotient irréductible de $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$, pour des données (P, σ, λ) où σ est une représentation tempérée du sous-groupe de Levi M de $P \neq G$ et $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ par rapport à P . De plus*

$$||Re(\lambda)|| \leq ||\rho_P||$$

où ρ_P est la demi somme des racines de P .

C'est une forme affaiblie des théorèmes IV.5.2, dans le cas archimédien, et XI.3.3, dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, de [BW80].

Compléments sur la structure du dual archimédien

Dans ce paragraphe F est archimédien. Vogan a introduit [Vog79] les notions de K-type minimal et celle de R-groupe (inspirées des travaux de Knapp et Stein). Si $\sigma \in \Pi_2(M)$, avec $M \in \mathcal{L}^G$, nous notons $A(\sigma)$ l'ensemble des K-types minimaux de $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ et R_σ le R-groupe. Tout K-type minimal $\tau \in A(\sigma)$ est contenu avec multiplicité 1 dans $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$ [Vog79, Theorem 1.1]. Le R-groupe opère simplement transitivement sur $A(\sigma)$. Vogan montre que les représentations $\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G$, pour $M \in \mathcal{L}^G$, $\sigma \in \Pi_{l.s.d.}(M)$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbf{C}}^*$ engendrent $\mathcal{R}(G)$ [Vog81, proposition 6.6.7].
Knapp et Zuckerman [KZ82] ont développé la notion de limites de séries discrètes à données non-dégénérées. Nous notons $\Pi_{l.s.d.}(M)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations de M^1 qui sont des limites de séries discrètes à données non-dégénérées. Cet ensemble est vide sauf si M a un sous-groupe de Cartan compact. Si $L \in \mathcal{L}^G$ est le centralisateur de $Re(\lambda)$ dans G , nous avons une décomposition orthogonale $\lambda = \lambda_L + \lambda_M^L$ avec λ_L dans $\mathfrak{a}_{L,\mathbf{C}}^*$. La représentation $\mathcal{I}_{P\cap L,\sigma,\lambda_M^L}^L$ est alors unitairement induite et se décompose en somme directe de limites de séries discrètes :

$$\mathcal{I}_{P\cap L,\sigma,\lambda_M^L}^L = \bigoplus_{i=1}^{T} \sigma_i$$

et donc si $Q = PL$:

$$\mathcal{I}_{P,\sigma,\lambda}^G = \oplus_{i=1}^T \mathcal{I}_{Q,\sigma_i,\lambda_L}^G \ .$$

Nous notons $\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$ l'unique constituent $\mathcal{I}^G_{Q,\sigma_i,\lambda_L}$ qui contient τ et $\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$ l'unique sous-quotient irréductible contenant τ . Nous savons alors que $\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau) = \mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau')$ si et seulement si $\tau' \in R^{\perp}_{\sigma,\lambda}\tau$, où $R_{\sigma,\lambda}$ est le stabilisateur de (σ,λ) dans R_σ .
Dans le cas archimédien, nous ne nous servirons que de propriétés du dual énoncées par Delorme [Del86, Théorème 2.6] :

Lemme I.4.3 *(i). Le spectre tempéré est un fermé de $\Pi_u(G)$.*

(ii). Soient $M \in \mathcal{L}^G$ et $\sigma \in \Pi_2(M)$, alors $\{\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau) \mid \lambda \in i\mathfrak{a}^*_M,\ \tau \in A(\sigma)\}$ est fermé dans $\Pi_u(G)$ et ouvert dans le spectre tempéré.

(iii). Avec les notations précédentes, soit $X \subset \{\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau) \mid \lambda \in i\mathfrak{a}^*_M,\ \tau \in A(\sigma)\}$. L'adhérence de X dans $\Pi_u(G)$ est égale à

$$\{\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau) \mid \exists(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}} \in i\mathfrak{a}^*_M,\ \textit{tel que } \lambda_n \to \lambda \textit{ et } \mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda_n}(\tau) \in X\}$$

Rappelons qu'il existe une relation d'ordre notée $\prec$, sur les séries discrètes des différents sous-groupes de Levi, définie ainsi : $\sigma \prec \sigma'$ si et seulement si tous les éléments de $A(\sigma)$ sont de longueur moindre que ceux de $A(\sigma')$.

Lemme I.4.4 *[Vog81, Proposition 6.6.7(c)] [Del86, Proposition 2.2] Si F est archimédien, soient M un Levi de G , $\sigma \in \Pi_2(M)$, $\tau \in A(\sigma)$, alors la relation suivante dans $\mathcal{R}(G)$ est vérifiée :*

$$\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau) = \mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau) + \sum_{\sigma \prec \sigma'} n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')\,\mathcal{I}^G_{\sigma',\lambda'}(\tau')$$

où la somme est étendue aux $\sigma' \in \Pi_2(L)$ (pour un Levi L), $\lambda' \in \mathfrak{a}^*_{L,\mathbf{C}}$ et $\tau' \in A(\sigma')$ et où les $n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma'.\lambda',\tau')$ sont des entiers relatifs.
De plus, il existe un entier n_G ne dépendant que de G tel que

$$\sum_{\sigma \prec \sigma'} |n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')| \leq n_G \ .$$

Un résultat de finitude

Lemme I.4.5 *Soit C un compact de $\Theta(G)$; l'ensemble E des couples formés d'un Levi M dans $\mathcal{L}^G$ et d'une orbite sous $X^{nr}_u(M)$ d'une représentation σ dans $\Pi_2(M)$, telle qu'il existe λ dans $X^{nr}(M)$ avec $\Theta^G_M\theta_{\sigma_\lambda}$ dans C , est fini.*
Réciproquement, soit E un ensemble fini formé de couples $(M,[\sigma])$ où M est un Levi et $[\sigma]$ une orbite sous $X^{nr}_u(M)$ dans $\Pi_2(M)$; il existe une pseudo bande verticale à partie réelle compacte B dans $\Theta(G)$ vérifiant

(i). dans le cas archimédien, si $\lambda \in X^{nr}(M)$ *et* $\tau \in A(\sigma)$ *sont tels que* $\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau) \in \Pi_u(G)$ *alors* $\Theta^G_M \theta_{\sigma_\lambda} \in B$ *,*

(ii). dans le cas $\mathfrak{p}$*-adique, si* $\lambda \in X^{nr}(M)$ *est tel que* $\mathcal{I}^G_{P,\sigma,\lambda}$ *a un sous-quotient unitaire, alors* $\Theta^G_M \theta_{\sigma_\lambda} \in B$ *.*

Preuve : Traitons tout d'abord la première assertion. Puisque Θ^G_M est propre, si $\Theta^G_M \theta_{\sigma_\lambda}$ appartient à un compact C , θ_{σ_λ} appartient à un compact C' . Comme l'ensemble des caractères infinitésimaux de séries discrètes de M est l'orbite sous $X^{nr}_u(M)$ d'un ensemble discret, a fortiori l'ensemble des caractères infinitésimaux de la forme θ_{σ_λ} avec $\sigma \in \Pi_2(M)$ et $\lambda \in X^{nr}(M)$ est l'orbite sous $X^{nr}(M)$ d'un ensemble discret. Par conséquent, son intersection avec C' est inclus dans l'orbite sous $X^{nr}(M)$ d'un ensemble fini.
Pour la seconde, il suffit de montrer le résultat dans le cas où l'ensemble est réduit à un couple. Soit donc (M,σ) un Levi et une série discrète de M . Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, d'après [Tad88, Theorem 2.5], l'ensemble des λ dans $X^{nr}(M)$ tels que $\mathcal{I}^G_{P,\sigma,\lambda}$ a un sous-quotient unitaire est un compact de $X^{nr}(M)$. Il en résulte, par continuité de Θ^G_M que l'ensemble des caractères infinitésimaux des représentations de la forme $\mathcal{I}^G_{P,\sigma,\lambda}$ ayant un sous-quotient unitaire est un compact et le résultat en découle. Dans le cas archimédien, d'après [Vog81, Theorem 6.6.15], $\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$ est le quotient de Langlands attaché à une représentation tempérée σ_i , avec $\mathcal{I}^L_{P\cap L,\sigma,\lambda^L_M} = \bigoplus_{i=1}^T \sigma_i$, en reprenant des notations que nous avons introduites ci-dessus. Puisque $\lambda = \lambda^L_M + \lambda_L$ avec λ^L_M unitaire et $||Re(\lambda_L)||$ borné, d'après le lemme I.4.2, l'existence de la pseudo bande verticale à partie réelle compacte ayant la propriété de l'énoncé en résulte.

□

I.5 les théorèmes de Paley-Wiener

Le cas archimédien

Dans ce paragraphe F est archimédien. Nous appellerons fonctions de type Paley-Wiener sur $X^{nr}(M) \simeq \mathfrak{a}^*_{M,\mathbf{C}}$, les fonctions f holomorphes sur $X^{nr}(M)$, telles que

$$\exists r > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \qquad \sup_{\chi \in X^{nr}(M)} \left(|f(\chi)| e^{-r||Re(\lambda_\chi)||} (1 + ||\lambda_\chi||)^n \right) < \infty \ ,$$

où $||\cdot||$ est une norme sur $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbf{C}}$. Clozel et Delorme ont démontré un théorème de Paley-Wiener scalaire sous deux formes. La seconde est plus précise mais est un peu plus lourde à manipuler si bien qu'il est souvent plus aisé de recourir à la première, qui peut s'énoncer ainsi :

Théorème I.5.1 *[CD84] Supposons données des fonctions*

$$f_M : \Pi_2(M) \times X^{nr}(M) \to \mathbf{C}$$

pour tout $M \in \mathcal{L}^G$, les conditions suivantes sont équivalentes :

– *Il existe $\phi \in \mathcal{H}$ telle que pour tout $\sigma \in \Pi_2(M)$ et tout $\chi \in X^{nr}(M)$*

$$f_M(\sigma, \chi) = \widehat{\phi}(i_{GM}(\sigma \otimes \chi)) \ .$$

– *Les fonctions f_M ont les propriétés suivantes :*

(i). *Pour tout $M \in \mathcal{L}^G$ et tout $\sigma \in \Pi_2(M)$, la fonction $\chi \mapsto f_M(\sigma, \chi)$ est une fonction de type Paley-Wiener sur $X^{nr}(M)$.*

(ii). *f_M est à support fini en σ .*

(iii). *Si les données (M, σ, χ) et (L, σ', χ') sont conjuguées, $f_M(\sigma, \chi) = f_L(\sigma', \chi')$.*

La deuxième forme précise le comportement sur les limites de série discrètes :

Théorème I.5.2 *[CD90, Théorème 1] Supposons données des fonctions*

$$f_M : \Pi_{l.s.d.}(M) \times X^{nr}(M) \to \mathbf{C}$$

pour tout $M \in \mathcal{L}^G$, les conditions suivantes sont équivalentes :

– *Il existe $\phi \in \mathcal{H}$ telle que pour tout $\sigma \in \Pi_{l.s.d.}(M)$ et tout $\chi \in X^{nr}(M)$*

$$f_M(\sigma, \chi) = \widehat{\phi}(i_{GM}(\sigma \otimes \chi)) \ .$$

– *Les fonctions f_M ont les propriétés suivantes :*

(i). *Pour tout $M \in \mathcal{L}^G$ et tout $\sigma \in \Pi_{l.s.d.}(M)$, la fonction $\chi \mapsto f_M(\sigma, \chi)$ est une fonction de type Paley-Wiener sur $X^{nr}(M)$.*

(ii). *f_M est à support fini en σ .*

(iii). *Si les données (M, σ, χ) et (L, σ', χ') sont conjuguées, $f_M(\sigma, \chi) = f_L(\sigma', \chi')$.*

(iv). *Supposons que M soit un sous-groupe de Levi de P ; soient $\sigma \in \Pi_{l.s.d.}(M)$ et $\sigma_\ell \in \Pi_{l.s.d.}(L)$, $\ell \in \{1, \ldots, T\}$ avec $M \subset L$, vérifiant la relation*

$$\mathcal{I}^L_{P \cap L, \sigma} = \oplus_{\ell=1}^T \sigma_\ell \ ,$$

alors, pour tout $\chi \in X^{nr}(L) \subset X^{nr}(M)$

$$f_M(\sigma, \chi) = \sum_{l=1}^{T} f_L(\sigma_\ell, \chi) \ .$$

Lemme I.5.3 *Soit f une fonction dans $\mathcal{A}(G)$. Il existe des fonctions $\Psi_{\sigma,\tau} \in \mathcal{H}$ qui vérifient*

(i). $\widehat{\Psi_{\sigma,\tau}}(\mathcal{I}^G_{\sigma',\lambda}(\tau')) = 0$ *si* (M', σ') *n'est pas* W_G*-conjugué à* (M, σ)

(ii). $\widehat{\Psi_{\sigma,\tau}}(\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau')) = 0$ *si* τ' *n'appartient pas à* $R^{\perp}_{\sigma,\lambda}\tau$

(iii). $\widehat{\Psi_{\sigma,\tau}}(\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)) = f(\Theta^G_M \theta_{\sigma_\lambda})$.

Preuve : Étant donné f , l'existence d'une fonction $\Psi_{\sigma,\tau}$ résulte immédiatement de I.5.2.

□

Le cas $\mathfrak{p}$-adique

Dans ce paragraphe F est supposé $\mathfrak{p}$-adique. Nous appellerons fonctions de type Paley-Wiener sur $X^{nr}(M)$, les fonctions régulières sur la variété algébrique complexe $X^{nr}(M)$, ou encore, en identifiant $X^{nr}(M)$ à $(\mathbf{C}^*)^n \subset \mathbf{C}^n$, l'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbf{C}^n$, avec des singularités au plus en 0. Remarquons que ce sont les transformées de Fourier de fonctions lisses et à support compact sur le groupe (discret) M/M^1 .

Théorème I.5.4 (Bernstein-Deligne-Kazhdan) *[BDK86, Theorem 1.2] Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{R}(G)$; les conditions suivantes sont équivalentes :*

– *Il existe $\phi \in \mathcal{H}$ telle que $f(\pi) = \widehat{\phi}(\pi)$ pour tout $\pi \in \mathcal{R}(G)$.*

– *La fonction f a les propriétés suivantes :*

(i). Pour tout $M \in \mathcal{L}^G$ et tout $\sigma \in \Pi(M)$, la fonction $\chi \mapsto f(i_{GM}(\sigma \otimes \chi))$ est une fonction de type Paley-Wiener sur $X^{nr}(M)$.

(ii). il existe K_1 sous-groupe compact ouvert, tel que si $f(\pi) \neq 0$, alors π a un vecteur non trivial, fixe sous K_1 .

Pseudo-coefficients.

Nous dirons qu'une forme linéaire f sur $\mathcal{R}(G)$ est discrète si pour toute $\sigma \in \Pi(M)$ avec $M \neq G$:

$$f(i_{GM}(\sigma)) = 0 \ .$$

Théorème I.5.5 *Étant donnée une représentation π_0 de la série discrète de G et f dans $\mathcal{A}(G)$, il existe ψ dans $\mathcal{H}$ telle que*

(i). Pour toute représentation π dans $\Pi_{temp}(G)$, $\widehat{\psi}(\pi) = \begin{cases} f(\theta_\pi) & \text{si } \pi \simeq \pi_0 \otimes \chi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(ii). La forme linéaire définie par $\widehat{\psi}$ est discrète.

Preuve : (a) cas archimédien. Cela est essentiellement contenu dans le corollaire de la proposition 4 dans [CD84]. Nous allons construire une famille de fonctions satisfaisant aux conditions du théorème I.5.2. Nous posons donc $f_L(\tau,\lambda) = 0$ sauf si $L = G$ et τ est une translatée de π_0 . Si $\pi = \pi_0 \otimes \chi_\lambda$ nous posons $f_G(\pi_0,\lambda) = f(\theta_\pi)$. Les propriétés de régularité, de support fini et d'invariance par conjugaison (i.e. les conditions 1, 2 et 3 du théorème I.5.2) sont immédiates. En ce qui concerne la dernière propriété (décompositions) les fonctions en jeu sont soit trivialement égales soit toutes nulles puisque π_0 ne peut apparaître dans une telle décomposition ni dans le membre de droite (c'est le théorème de disjonction de Langlands, voir par exemple [Kna86, Theorem 14.90]), ni dans le membre de gauche puisque c'est une représentation de G et qu'il n'existe donc aucun Levi qui contienne proprement G .

(b) cas $\mathfrak{p}$-adique. Cela est essentiellement contenu dans [Clo86, Proposition 1] : le groupe de Grothendieck $\mathcal{R}(G)$ admet pour base les représentations standard : c'est-à-dire de représentations de la forme $i_{GM}(\sigma\otimes\chi)$ indexées par les orbites sous le normalisateur de M_0 des triplets (M,σ,χ) avec σ tempérée irréductible, $\chi \in X^{nr}(M)$ réel et λ_χ "strictement positif" par rapport à un sous-groupe parabolique P de sous-groupe de Levi M . Nous définissons une forme linéaire g sur $\mathcal{R}(G)$ en lui imposant d'être nulle sur les éléments de cette base sauf si $\pi = \pi_0 \otimes \chi$ et, dans ce cas, nous imposons $g(\pi) = f(\theta_\pi)$. Il nous faut montrer que g satisfait aux conditions de I.5.4. Tout d'abord, montrons que g est nulle sur toute induite propre (condition 2 de l'énoncé). Soit $\pi = i_{GM}(\tau)$ pour $\tau \in \mathcal{R}(M)$. Il suffit de considérer le cas où τ est standard et cela résulte alors du choix de g . L'assertion de régularité (condition 1 de I.5.4) en résulte immédiatement puisque la fonction $\chi \to g(i_{GM}\tau\otimes\chi)$ est soit la fonction nulle, soit la restriction à l'ensemble des tordus de π_0 d'une fonction régulière. Soit maintenant π une représentation irréductible de G pour laquelle $g(\pi)$ soit non nul. Dans son expression dans la base des représentations standard π doit alors nécessairement contenir une représentation de la forme $\pi_0 \otimes \chi$. En particulier, le caractère infinitésimal de π est celui de $\pi_0 \otimes \chi$. Ainsi à torsion près par un caractère, cela laisse un nombre fini de possibilités pour π et donc g vérifie la condition 2 de I.5.4. L'existence de ψ en résulte.

□

Remarquons que seule intervient la restriction de f à la sous-variété de $\Theta(G)$ formée des θ_π avec $\pi = \pi_0 \otimes \chi$. Nous aurions donc pu formuler le théorème au moyen d'une fonction f_{π_0} de type Paley-Wiener sur $X^{nr}(G)$ invariante par translation par les χ qui stabilisent π_0 . Nous retrouvons notre énoncé en posant $f_{\pi_0}(\chi) = f(\pi_0 \otimes \chi)$. L'application $f \mapsto f_{\pi_0}$ est surjective.

Le foncteur de Jacquet.

Dans cette section F est $\mathfrak{p}$-adique. Dans ce cadre, nous disposons d'un outil supplémentaire : le foncteur de restriction, aussi appelé foncteur de Jacquet ; il est adjoint à gauche de l'induction et défini comme suit. Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de Levi $M \in \mathcal{L}^G$ et soit $\pi \in \Pi(G)$ d'espace V . Notons $V(N)$ le sous-espace de V engendré par les vecteurs de la forme $\pi(n)v - v$, avec $v \in V$ et $n \in N$. Considérons la représentation de M sur $V_N = V/V(N)$; l'action est donnée par la restriction de π , qui passe au quotient. Nous savons que cette représentation est admissible si π l'est [Car79, Theorem 2.1]. Nous noterons $r_{PG}(\pi)$ l'image dans le groupe de Grothendieck de M de cette représentation. Il faut prendre garde que même après semi-simplification, contrairement au cas de l'induction parabolique, le foncteur de restriction dépend du sous-groupe parabolique P et pas seulement du sous-groupe de Levi M . De façon duale, nous définissons un foncteur r^*_{PG} :

Lemme I.5.6 *[BDK86, Proposition 3.2 (ii)] Soit $\phi \in \mathcal{H}(M)$ avec $M \in \mathcal{L}^G$, il existe $\psi \in \mathcal{H}(G)$ telle que $\widehat{\phi}(r_{PG}(\pi)) = \widehat{\psi}(\pi)$, ce que nous écrirons aussi $\widehat{\psi} = r^*_{PG}(\widehat{\phi})$.*

Il serait plus correct d'écrire $\psi \in r^*_{PG}(\phi)$. Donnons une première application de ce lemme.

Lemme I.5.7 *Pour toute composante connexe Θ de $\Theta(G)$, il existe ϕ dans $\mathcal{H}$ telle que $\widehat{\phi}(\pi) \geq 1$ si $\theta_\pi \in \Theta$ et soit nul ailleurs, sur $\Pi(G)$.*

Preuve : Soit (M, σ) un représentant de $\theta \in \Theta$. D'après I.5.5, il existe ϕ_M dans $\mathcal{H}(M)$ telle que $\widehat{\phi_M} = 1$ sur l'ensemble des représentations de M de la forme $\sigma \otimes \chi$ et $\widehat{\phi_M} = 0$ ailleurs, sur $\Pi(M)$. D'après I.5.6, il existe une fonction ϕ dans $\mathcal{H}(G)$ telle que $\widehat{\phi} = r^*_{PG}\widehat{\phi_M}$. Par construction $\widehat{\phi}$ est nulle en dehors de l'image réciproque de Θ . Par ailleurs, si π est un composant de $i_{GM}(\sigma \otimes \chi)$, le théorème du sous-module de Casselman et la réciprocité de Frobenius montrent que $r_{PG}\pi$ admet comme composant un conjugué de $\sigma \otimes \chi$ par un élément du groupe de Weyl et donc $\widehat{\phi}(\pi)$ est supérieur à 1 .

$\square$

La propriété fondamentale pour nous du foncteur de Jacquet est la relation de commutation avec le foncteur d'induction, que nous donnons ci-dessous.

Lemme I.5.8 *[BDK86, Lemme 5.4] Soient M, L dans $\mathcal{L}^G$ et P (respectivement Q) un sous-groupe parabolique de Levi M (respectivement L) tels que $P \cap Q$ soit un sous-groupe parabolique de G . Notons W_G^{ML} un ensemble de représentants de $W_L \backslash W_G / W_M$, alors :*

$$r_{QG} \circ i_{GM} = \sum_{w \in W_G^{ML}} i_{L(L \cap w.M)} \circ w \circ r_{(M \cap w^{-1}.Q)M} .$$

I.6 Contrôle μ-presque partout

Soit $\{(L_i,\sigma_i)\}_{i\in I}$ un ensemble de représentants des orbites, sous le normalisateur de M_0 , des orbites sous $X_u^{nr}(L)$ agissant par torsion sur σ , de couples (L,σ) formés d'un Levi $L\in\mathcal{L}^G$ et d'une représentation dans la série discrète σ de L . Nous supposerons de plus, ce qui est loisible, que les L_i sont des sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques Q_i qui contiennent un même sous-groupe parabolique minimal P_0 .

Théorème I.6.1 *Soient $i\in I$ et $f_i\in\mathcal{A}(G)$; il existe $\Phi_i\in\mathcal{H}$ telle que*

$$\widehat{\Phi_i}(\pi)=\delta_{ij}f_i(\theta_\pi)\quad \textit{si } [\pi]=i_{GL_j}(\sigma_j\otimes\chi)\ \textit{avec } \chi\in X^{nr}(L_j)\ .$$

Ici encore δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Preuve : Le cas archimédien résulte immédiatement de la première forme du théorème de Clozel et Delorme, rappelée en I.5.1. Passons au cas $\mathfrak{p}$-adique. Soit $f_{ij}\in A(L_j)$ l'image réciproque de f_i via l'application naturelle

$$\Theta_{L_j}^G\ :\ \Theta(L_j)\to\Theta(G)$$

définie au moyen de l'induction parabolique, ce qui a un sens puisque tous les composants d'une induite parabolique ont même caractère infinitésimal. Choisissons pour chaque j un pseudo-coefficient ψ_{ij} attaché à σ_j et f_{ij} , comme en I.5.5. Nous allons exhiber des scalaires α_i^k tels que

$$\widehat{\Phi_i}=\sum_k\alpha_i^k r^*_{Q_kG}\widehat{\psi_{ik}}\ ,$$

soit une solution de notre problème. Ordonnons les indices de sorte que si L_k contient un conjugué de L_j alors $k\geq j$. En utilisant le lemme I.5.8, nous voyons que, si $\widehat{\psi}$ est une forme linéaire discrète sur $\mathcal{R}(M)$, alors

$$r^*_{QG}\widehat{\psi}(i_{GM}(\sigma))=\widehat{\psi}(r_{QG}i_{GM}(\sigma))=\sum_w\ \widehat{\psi}\left((w.r_{(M\cap w^{-1}Q)M}\sigma)\right)$$

la somme portant sur les $w\in W_G^{LM}$ tels que $wM\supset L$. Si $[\pi]=i_{GL_j}(\sigma_j\otimes\chi)$, les α_i^k doivent donc vérifier :

$$\sum_{k,w}\alpha_i^k\widehat{\psi_{ik}}\left(w.r_{(L_j\cap w^{-1}Q_k)L_j}(\sigma_j\otimes\chi)\right)=\delta_{ij}\ f_i(\theta_\pi)\ ,$$

où la somme porte sur les w de $W_G^{L_jL_k}$ tels que L_k est inclus dans wL_j . D'après I.6.2, il existe des entiers d_{wkj} tels que

$$\widehat{\psi_{ik}}\left((w.r_{(L_j\cap w^{-1}Q_k)L_j}(\sigma_j\otimes\chi)\right)=d_{wkj}\ f_i(\theta_\pi)\ .$$

Il suffit donc de résoudre le système linéaire :

$$\sum_k \alpha_i^k c_{kj} = \delta_{ij} \ ,$$

où

$$c_{kj} = \sum_w d_{wkj} \ .$$

La somme en w porte sur les $w \in W_G^{L_j L_k}$ tels que $wL_j \supset L_k$. Les c_{kj} sont donc nuls si $k > j$ et c_{jj} est le cardinal de l'ensemble des $w \in W_G^{L_j L_j}$ tels que $wL_j = L_j$: c'est un entier positif non nul. La matrice des c_{kj} est triangulaire avec des éléments non nuls sur la diagonale, elle est donc inversible.

□

La matrice des α_i^k est la matrice inverse de celle des c_{kj} et donc $\alpha_i^k = 0$ si $i \geq k$. Nous en déduisons que seules interviennent les fonctions f_{ij} avec $i \leq j$. Nous pourrions donc, comme pour I.5.5 ci-dessus, reformuler le théorème au moyen de ces seules f_{ij} .

Lemme I.6.2 *Supposons que $wL_j \supset L_k$. Il existe des entiers d_{wkj} telles que si $[\pi] = i_{GL_j}(\sigma_j \otimes \chi)$,*

$$\widehat{\psi_{ik}}\left((w.r_{(w^{-1}Q_k \cap L_j)L_j}(\sigma_j \otimes \chi)\right) = d_{wkj}\ f_i(\theta_\pi) \ .$$

De plus $d_{wjj} = 1$.

Preuve : Soit $\tau \in \Pi(L_k)$. Par construction de ψ_{ik} , si $[\theta] = i_{GL_k}(\tau)$, nous avons

$$\widehat{\psi_{ik}}(\tau) = m(\tau, \sigma_k) f_{ik}(\theta_\tau) = m(\tau, \sigma_k) f_i(\theta_\theta)$$

où $m(\tau, \sigma_k)$ est un entier : la multiplicité de $\sigma_k \otimes \nu$ pour un certain $\nu \in X^{nr}(L_k)$ dans l'écriture de τ dans le groupe de Grothendieck comme combinaison linéaire de représentations standard. Donc, compte tenu de la compatibilité entre foncteur de Jacquet et caractère infinitésimal, il existe des entiers $d_{wkj}(\chi)$, indépendants de f_i, tels que si $[\pi] = i_{GL_j}(\sigma_j \otimes \chi)$,

$$\widehat{\psi_{ik}}\left((w.r_{(L_j \cap w^{-1}Q_k)L_j}(\sigma_j \otimes \chi)\right) = d_{wkj}(\chi) f_i(\theta_\pi) \ .$$

Les deux membres de l'équation étant analytiques, il en résulte que les fonctions

$$\chi \mapsto d_{wkj}(\chi)$$

sont constantes. La dernière assertion du lemme est claire.

□

I.7 Contrôle sur l'ensemble singulier, cas archimédien

Supposons F archimédien. Nous cherchons à majorer des fonctions caractéristiques d'ensembles de mesure nulle pour la mesure de Plancherel, par des fonctions $\widehat{\Psi}$ avec $\Psi \in \mathcal{H}$ de mesure arbitrairement petite. Dans tout ce qui suit, nous munissons les complexifiés des espaces vectoriels duaux d'algèbres de Lie d'une métrique euclidienne. Cela définit une distance sur les $X^{nr}(M)$. Tout d'abord, donnons un corollaire de I.1.4.

- Soit X un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'une métrique euclidienne et d'un groupe fini W de transformations orthogonales.
- Soit C un compact de $X_{\mathbf{C}}$ et soit B l'image de $C + iX$ dans le quotient de $X_{\mathbf{C}}$ par W ; c'est une "pseudo bande verticale".
- Soit Y un sous-ensemble fermé du quotient de $X_{\mathbf{C}}$ par W.

On pose $Z = Y \cap B$

- Soit p une fonction sur Z à valeurs réelles positives qui soit la restriction d'une fonction sur $X_{\mathbf{C}}$ définie par un polynôme P sur X invariant par W. On suppose que $P(x + iy)$ tend vers l'infini dans $C + iX$ plus vite que le carré de la norme :

$$|P(a + ib)| \geq ||a||^2 + ||b||^2 \qquad \text{si} \quad a + ib \in C + iX \quad \text{et} \quad ||b|| >> 0 \ .$$

- Soit μ une mesure de Radon sur Z .
- Soit enfin A une sous-algèbre de $C_0(Z) \cap L^1(Z, \mu)$, séparant les points, auto-adjointe et ne s'annulant identiquement nulle part sur Z . On suppose de plus que pour tout $g \in A$ la fonction pg appartient à A .

Lemme I.7.1 *Soit f une fonction sur Z, positive, bornée, à support dans un ensemble de μ-mesure nulle et majorée, en dehors d'un compact, par une fonction g_0 de A . Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe h dans A tel que*

$$f \leq h \qquad et \qquad \mu(h) \leq \epsilon \ .$$

Preuve : Soit C_r l'intersection avec Z de l'image dans le quotient par W de la boule compacte de centre 0 et de rayon r dans $X_{\mathbf{C}}$; soit U_r le complémentaire de C_r dans Z . On peut choisir r assez grand pour que $r^{-2}p \geq 1$ sur U_r et $f \leq g_0$ sur $Y \cap U_r$ de sorte que, si nous notons 1_{U_r} la fonction caractéristique de U_r , nous aurons

$$f 1_{U_r} \leq g_0 1_{U_r} \leq r^{-2} p g_0 \ .$$

Remarquons que $h_0 = r^{-2} p g_0$ appartient à A . Si r est suffisamment grand, on a de plus

$$\mu(h_0) = r^{-2} \mu(p g_0) \leq \epsilon/2 \ .$$

Par ailleurs $f1_{C_r}$ est bornée, à support compact et son ensemble de points de discontinuité est de μ-mesure nulle (en fait, c'est même son support qui est de μ-mesure nulle) et donc $f1_{C_r}$ est μ-Riemann-intégrable, d'après le théorème I.1.1. Nous pouvons utiliser la proposition I.1.4 pour trouver g_1 et h_1 dans A tels que

$$|f1_{C_r} - g_1| \leq h_1 \qquad \text{et} \qquad \mu(h_1) \leq \epsilon/4 \ .$$

Comme $f1_{C_r}$ est réelle, nous pouvons choisir g_1 réelle et nous obtenons

$$f1_{C_r} \leq g_1 + h_1 = h_2$$

et

$$\mu(g_1) \leq \mu(h_1) + \mu(f1_{C_r}) = \mu(h_1) \ .$$

Donc $\mu(g_1) \leq \epsilon/4$ et $\mu(h_2) \leq \epsilon/2$. Nous en déduisons que

$$f = f1_{C_r} + f1_{U_r} \leq h_2 + h_0 = h \qquad \text{et} \qquad \mu(h) \leq \epsilon \ .$$

□

Définition *Soit σ une série discrète de M , nous disons que σ est W_G-singulière s'il existe $w \in W_G$ non trivial tel que $wM = M$ et $w\sigma \simeq \sigma$. Elle est dite W_G-régulière sinon.*

Soit σ une représentation dans la série discrète d'un Levi M . Nous notons $T(\sigma)$ l'ensemble des caractères infinitésimaux hermitiens de la forme $\Theta_M^G \theta_{\sigma_\lambda}$ avec soit λ non unitaire, soit λ unitaire et σ_λ singulière et, pour θ dans $\Theta(G)$ soit $X(\sigma, \theta)$ l'ensemble des λ dans $X^{nr}(M)$ tels que $\Theta_M^G \theta_{\sigma_\lambda}$ soit égal à θ .
Soit M un Levi de G , nous notons $S_M(G)$ l'ensemble des orbites sous l'action de $X_u^{nr}(M)$ des représentations dans la série discrète de M et nous fixons $E_M(G)$ un ensemble de représentants des éléments de $S_M(G)$. Nous notons $E(G)$ la réunion des $E_M(G)$ quand M parcourt un ensemble fixé de représentants des orbites sous W_G des éléments de $\mathcal{L}^G$.
Soient C un compact de $\Theta(G)$, E un sous-ensemble fini de $E(G)$ et σ dans E . D'après le lemme I.4.5, il existe une pseudo bande verticale B à partie réelle compacte qui contient C et l'ensemble des θ_π pour π unitaire de la forme $\mathcal{J}_{\sigma,\lambda}^G(\tau)$ avec σ dans E , λ dans $X^{nr}(M)$ (si σ appartient à $E_M(G)$) et τ dans $A(\sigma)$. Supposons données, pour tout σ' dans E avec $\sigma \prec \sigma'$ et pour tout τ' dans $A(\sigma')$, des fonctions $h_{\sigma',\tau'}$ dans $A(G)$ réelles positives sur les caractères hermitiens dans B et notons $\Psi_{\sigma',\tau'}$ la fonction dans $\mathcal{H}$ associée à $h_{\sigma',\tau'}$ par le lemme I.5.3.

Lemme I.7.2 *Soit ϵ strictement positif. Pour tout τ dans $A(\sigma)$, il existe une fonction $h_{\sigma,\tau}$ dans $A(G)$ réelle positive sur les caractères hermitiens dans B de sorte que, si $\Psi_{\sigma,\tau}$ est la fonction associée à $h_{\sigma,\tau}$ par le lemme I.5.3, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i). pour tout λ dans $X^{nr}(M)$ tel que $\Theta_M^G(\theta_{\sigma_\lambda})$ soit hermitien et appartienne à B ,

$$\sum_{\substack{\sigma'\in E\\ \sigma\preceq\sigma'}}\sum_{\tau'\in A(\sigma')}\widehat{\Psi}_{\sigma',\tau'}\left(\mathcal{J}_{\sigma,\lambda}^G(\tau)\right)\geq 1_{T(\sigma)\cap C}(\Theta_M^G\theta_{\sigma_\lambda})$$

(ii). $$\mu^G(\widehat{\Psi}_{\sigma,\tau})=\mu_{M,\sigma}(\widehat{\Psi}_{\sigma,\tau})\leq\epsilon\ .$$

Preuve : Nous allons appliquer le lemme I.7.1 à la situation suivante :

- $X=\mathfrak{h}^*$,
- Y est l'ensemble des caractères infinitésimaux hermitiens de la forme $\Theta_M^G\theta_{\sigma_\lambda}$ et W est le groupe de Weyl,
- P est induit par l'opérateur du centre de l'algèbre enveloppante somme du carré de l'opérateur de Casimir et du carré d'un opérateur elliptique sur le centre du groupe.
- B est la pseudo bande verticale à partie réelle compacte donnée par l'énoncé.
- μ est la restriction à Z de l'image directe de $\widetilde{\mu}_{M,\sigma}$ par l'application $\lambda\mapsto\Theta_M^G\theta_{\sigma_\lambda}$,
- A est l'ensemble des restrictions à Z de fonctions dans $\mathcal{A}(G)$,
- f est la fonction sur Z

$$f(\theta)=1_{T(\sigma)\cap C}(\theta)+\sum_{\substack{\sigma'\in E\\ \sigma\prec\sigma'}}\sum_{\tau'\in A(\sigma')}\sum_{\lambda\in X(\sigma,\theta)}\left|\widehat{\Psi}_{\sigma',\tau'}\left(\mathcal{J}_{\sigma,\lambda}^G(\tau)\right)\right|\ .$$

Les conditions du lemme I.7.1 sont évidemment vérifiées pour X , Y , μ et $A(G)$. En ce qui concerne P , la formule donnant l'image de l'opérateur de Casimir par l'homomorphisme d'Harish-Chandra (voir par exemple [War72, Exemple 1, page 168]) montre que P se comporte comme $||a+ib||^4$ à l'infini (pour a borné) et, comme l'opérateur de Casimir est hermitien, P induit une somme de carrés de fonctions réelles sur Y .

Vérifions que f satisfait aux conditions du lemme I.7.1. Tout d'abord, il est clair que f est positive et bornée par définition. Vérifions que f est à support dans un ensemble de μ-mesure nulle. Plus précisément, montrons que f n'est non nulle que si θ appartient à $T(\sigma)$. C'est clair pour le premier terme qui définit f . En utilisant l'expression de $\mathcal{J}_{\sigma,\lambda}^G(\tau)$ donnée par le lemme I.4.4 et les propriétés des fonctions $\Psi_{\sigma,\tau}$ construites en I.5.3, nous voyons que le dernier terme est une somme de valeurs absolues de

$$\widehat{\Psi}_{\sigma',\tau'}\left(\mathcal{J}_{\sigma,\lambda}^G(\tau)\right)=n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')\widehat{\Psi}_{\sigma',\lambda'}\left(\mathcal{I}_{\sigma',\lambda'}^G(\tau')\right)$$

et donc de

$$\widehat{\Psi}_{\sigma',\tau'}\left(\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)\right) = n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')h_{\sigma',\tau'}(\Theta^G_M\theta_{\sigma_\lambda}) \ .$$

Remarquons d'ores et déjà que cette expression est réelle. De plus, si elle est non nulle, alors $n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau') \neq 0$ et, en particulier, $\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$ est réductible. La réductibilité entraîne, d'après la théorie de Bruhat [Cas, Theorem 6.6.1], que θ appartient à $T(\sigma)$. Comme $T(\sigma)$ est de μ-mesure nulle, nous avons vérifié la condition de support du lemme I.7.1.

Vérifions la dernière condition. Si θ n'appartient pas à C , nous avons

$$f(\theta) \leq \sum_{\substack{\sigma'\in E \\ \sigma\prec\sigma'}} \sum_{\tau'\in A(\sigma')} \sum_{\lambda\in X(\sigma,\theta)} \left|n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')\right| \widehat{\Psi}_{\sigma',\lambda'}\left(\mathcal{I}^G_{\sigma',\lambda'}(\tau')\right) \ .$$

De plus, chaque $n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')$ est inférieur à une constante n_G ne dépendant que de G , d'après I.4.4, les cardinaux des $X(\sigma,\theta)$ sont bornés par le cardinal du groupe de Weyl, et donc f est majorée par une fonction de A en dehors de C :

$$f(\theta) \leq n_G|W_G| \sum_{\substack{\sigma'\in E \\ \sigma\prec\sigma'}} \sum_{\tau'\in A(\sigma')} h_{\sigma',\tau'}(\Theta^G_M\theta) \ .$$

Nous pouvons donc appliquer le lemme I.7.1 et obtenir une fonction $h_{\sigma,\tau}$ dans A qui majore f et de μ-mesure inférieure à ϵ . En particulier, $h_{\sigma,\tau}$ est réelle positive sur Z . Soit $\Psi_{\sigma,\tau}$ la fonction dans $\mathcal{H}$ associée à $h_{\sigma,\tau}$ par le lemme I.5.3. Nous avons, en utilisant le lemme I.4.4 et les propriétés des fonctions $\Psi_{\sigma,\tau}$:

$$\widehat{\Psi}_{\sigma,\tau}(\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)) = \widehat{\Psi}_{\sigma,\tau}(\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau))$$

et, puisque $\Psi_{\sigma,\tau}$ est associée à $h_{\sigma,\tau}$,

$$\widehat{\Psi}_{\sigma,\tau}(\mathcal{I}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)) = h_{\sigma,\tau}(\Theta^G_M\theta_{\sigma_\lambda})$$

Nous en déduisons

$$\widehat{\Psi}_{\sigma,\tau}(\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)) \geq f(\Theta^G_M\theta_{\sigma_\lambda}) \ .$$

Nous avons déjà remarqué que les quantités $\widehat{\Psi}_{\sigma',\tau'}(\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau))$ sont réelles et donc

$$\widehat{\Psi}_{\sigma,\tau}(\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)) \geq 1_{T(\sigma)\cap C}(\Theta^G_M\theta_{\sigma_\lambda}) - \sum_{\substack{\sigma'\in E \\ \sigma\prec\sigma'}} \sum_{\tau'\in A(\sigma')} \sum_{\lambda\in X(\sigma,\theta)} \widehat{\Psi}_{\sigma',\tau'}\left(\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)\right)$$

D'où notre première assertion. Pour la seconde, nous avons

$$\mu^G(\widehat{\Psi}_{\sigma,\lambda}) = \mu_{M,\sigma}(\widehat{\Psi}_{\sigma,\lambda}) = \mu(h_{\sigma,\tau}) \leq \epsilon \ .$$

□

Théorème I.7.3 *Soient* $\epsilon > 0$ *et* C *un compact de* $\Theta(G)$ *. Il existe* Ψ *dans* $\mathcal{H}$ *telle que*

(i). $\widehat{\Psi}(\pi) \geq 0$ *pour tout* $\pi \in \Pi_u(G)$ *,*

(ii). $\mu^G(\widehat{\Psi}) \leq \epsilon$ *,*

(iii). Pour tout π *dans* $\Pi_u(G)$ *avec* $\theta_\pi \in C$ *, qui est soit non-tempérée, soit tempérée mais non-induite d'une série discrète*

$$\widehat{\Psi}(\pi) \geq 1 \ .$$

Preuve : Notons E' l'ensemble fini des couples $(M, [\sigma])$ associé au compact C par le corollaire I.4.5 où M est dans $\mathcal{L}^G$ et $[\sigma]$ est l'orbite sous $X_u^{nr}(M)$ d'une série discrète σ dans $\Pi(M)$. Pour chacun de ces couples, nous effectuons un choix de représentant dans l'orbite $[\sigma]$ et nous notons E la collection de ces représentants. C'est un ensemble fini dont le cardinal ne dépend que de C .

Nous construisons des fonctions $\Psi_{\sigma,\tau}$ par récurrence descendante sur la longueur des K-types minimaux de σ grâce au lemme I.7.2 et nous posons

$$\Psi = \sum_{\sigma,\tau} \Psi_{\sigma,\tau} \ .$$

Cette somme porte sur σ dans E et τ dans $A(\sigma)$. L'ensemble de sommation étant fini et son cardinal ne dépendant que de C , les fonctions $\Psi_{\sigma,\tau}$ peuvent être choisies telles que $\mu^G(\widehat{\Psi})$ soit inférieur à ϵ .

Il ne reste plus qu'à calculer $\widehat{\Psi}(\pi)$ pour π unitaire, de la forme $\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)$. Soit B la pseudo bande verticale à partie réelle compacte introduite dans le lemme I.7.2. Si θ_π n'appartient pas à B , par définition de B , $\widehat{\Psi}(\pi)$ est nul. Si θ_π appartient à B , en utilisant les lemmes I.4.4 et I.5.3,

$$\widehat{\Psi}_{\sigma',\tau'}\left(\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)\right) = n(\sigma,\lambda,\tau,\sigma',\lambda',\tau')\widehat{\Psi}_{\sigma',\tau'}\left(\mathcal{I}^G_{\sigma',\lambda'}(\tau')\right)$$

et donc cette quantité est nulle sauf peut-être si $\sigma \preceq \sigma'$. Nous en déduisons

$$\widehat{\Psi}\left(\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)\right) = \sum_{\substack{\sigma'\in E \\ \sigma\preceq\sigma'}} \sum_{\tau'\in A(\sigma')} \widehat{\Psi}_{\sigma',\tau'}\left(\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)\right)$$

et donc, d'après le lemme I.7.2

$$\widehat{\Psi}\left(\mathcal{J}^G_{\sigma,\lambda}(\tau)\right) \geq 1_{T(\sigma)\cap C}(\Theta^G_M \theta_{\sigma_\lambda}) \ ,$$

i.e.

$$\widehat{\Psi}(\pi) \geq 1_{T(\sigma)\cap C}(\theta_\pi) \ .$$

□

I.8 Contrôle sur l'ensemble singulier, cas général

Nous donnerons maintenant une autre preuve du théorème I.7.3, valable aussi dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, modulo une hypothèse que nous n'avons vérifiée que pour certains groupes mais que nous croyons toujours vraie. Pour établir le lemme I.8.3 nous aurons besoin de l'hypothèse locale suivante.

Hypothèse I.8.1 *Soient $\theta \in \Theta(G)$ et, pour tout Levi M , un voisinage V_M du caractère trivial dans $X^{nr}(M)$; il existe un voisinage W_θ de θ tel que, pour tout $\pi \in \Pi_u(G)$ de caractère infinitésimal $\theta_\pi \in W_\theta$, il existe un Levi M , une représentation $\sigma \in \Pi(M)$, telle que $i_{GM}\sigma$ admet θ comme caractère infinitésimal, et un caractère non ramifié $\chi \in V_M$ tels que*

$$[\pi] = i_{GM}(\sigma \otimes \chi) \ .$$

Pour simplifier les énoncés nous travaillerons avec des groupes qui vérifient l'hypothèse globale suivante.

Hypothèse I.8.2 *Tout point de $\Theta(G)$ vérifie l'hypothèse locale I.8.1.*

Nous exhiberons en I.10 des groupes qui vérifient l'hypothèse globale.
Soit $\theta \in \Theta(G)$. Soit Π_θ^{reg} l'ensemble des représentations $\pi \in \Pi_{temp}(G)$ de caractère infinitésimal $\theta_\pi = \theta$ induite parabolique d'une série discrète, $\pi = i_{GM}(\sigma)$, telle que σ soit W_G-régulière. Si χ est assez voisin de 1 dans $X_u^{nr}(M)$ la série discrète $\sigma \otimes \chi$ est encore régulière et en particulier $i_{GM}(\sigma \otimes \chi)$ est irréductible [Cas89, Theorem 6.6.1]. Soit $(V_M)_{M \in \mathcal{L}^G}$ une collection de voisinages du caractère trivial, $V_M \subset X^{nr}(M)$, assez petits pour que, si $\pi = i_{GM}(\sigma) \in \Pi_\theta^{reg}$ et si $\pi' = i_{GM}(\sigma \otimes \chi)$ avec $\chi \in V_M$, alors, si $\theta' = \theta_{\pi'}$, $\pi' \in \Pi_{\theta'}^{reg}$. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des représentations $\pi' \in \Pi_{temp}(G)$ de la forme $\pi' = i_{GM}(\sigma \otimes \chi)$ avec χ dans V_M et $\pi = i_{GM}(\sigma) \in \Pi_\theta^{reg}$. Notons $\mathcal{N}$ le complémentaire de $\mathcal{M}$. Nous noterons $1_\mathcal{N}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{N}$ et $\chi_\mathcal{N}$ son extension en une forme linéaire sur $\mathcal{R}(G)$.

Lemme I.8.3 *Il existe une constante c'_G telle que, pour tout $0 < \epsilon < 1$ et tout $\theta \in \Theta(G)$, il existe une fonction $\phi_{\theta,\epsilon}$ dans $\mathcal{H}$ et des voisinages du caractère trivial $V_{M,\epsilon} \subset V_M$, ouverts, tels que pour toute représentation π dans $\Pi_u(G)$ de la forme $i_{GM}\sigma \otimes \chi$ avec χ dans $V_{M,\epsilon}$*

(i). $0 \leq \widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(\pi) \leq \epsilon$ *si* $\pi \in \mathcal{M}$

(ii). $1 \leq \widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(\pi) \leq c'_G$ *si* $\pi \in \mathcal{N}$

(iii). $V_{M,\epsilon}$ *est inclus dans une boule de diamètre* ϵ *.*

Preuve : Considérons l'ensemble des couples (M, σ) tels que $\theta_{i_{GM}\sigma} = \theta$: c'est un ensemble fini. Donc, par indépendance linéaire des caractères, il existe $\phi_{\theta,\epsilon}$ dans $\mathcal{H}$ et à valeurs réelles sur $\Pi_u(G)$ telle que si ρ appartient à $\Pi(G)$ avec $\theta_\rho = \theta$, alors

$$\widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(\rho) = \frac{\epsilon}{2} + 1_{\mathcal{N}}(\rho) \ .$$

De plus, pour chacun des couples (M, σ) considérés, la fonction sur $X^{nr}(M)$

$$\chi \mapsto \widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(i_{GM}\sigma \otimes \chi)$$

est continue. Donc, si ℓ est la longueur de $i_{GM}\sigma$, nous avons

$$\widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(i_{GM}\sigma) = \chi_{\mathcal{N}}(i_{GM}\sigma) + \frac{\ell\epsilon}{2}$$

En particulier, puisque $\ell \leq |W_G|$,

$$\chi_{\mathcal{N}}(i_{GM}\sigma) + \frac{\epsilon}{2} \leq \widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(i_{GM}\sigma) \leq |W_G|(1 + \frac{\epsilon}{2}) \ .$$

Par continuité, pour tout couple (M, σ) , il existe un voisinage $V_{M,\epsilon}$ du caractère trivial dans $X_u^{nr}(M)$, tel que si $\pi = i_{GM}\sigma \in \Pi_\theta^{reg}$ alors, puisque $\ell = 1$,

$$0 \leq \widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(i_{GM}\sigma \otimes \chi) \leq \epsilon$$

et sinon

$$1 \leq \widehat{\phi}_{\theta,\epsilon}(i_{GM}\sigma \otimes \chi) \leq 2|W_G| \ .$$

Nous pouvons bien sûr choisir ce voisinage assez petit pour qu'il soit inclus dans V_M et que l'assertion (iii) soit vraie.

□

Rappelons que $\Theta_h(G)$ désigne le sous-ensemble des caractères infinitésimaux hermitiens.

Lemme I.8.4 *Soit* $0 < \epsilon < 1$. *Soit* B *une pseudo bande verticale de* $\Theta(G)$ *à partie réelle compacte. Étant donnés deux ouvert* W *et* W' *relativement compacts de* B *tels que* $\overline{W} \subset W'$, *il existe une fonction* $f \in \mathcal{A}(G)$, *à valeurs réelles sur* $\Theta_h(G)$ *telle que*

(i). $0 \leq f \leq 1 + \epsilon$ *sur* $B \cap \Theta_h(G)$

(ii). $f(\theta) \geq 1$ *si* $\theta \in W \cap \Theta_h(G)$

(iii). $f(\theta) \leq \epsilon$ *si* $\theta \in (B \setminus W') \cap \Theta_h(G)$

Preuve : Il existe une fonction g continue positive majorée par $1+\epsilon/4$ sur $B \cap \Theta_h(G)$ qui vaut $1+\epsilon/4$ sur $W \cap \Theta_h(G)$ et qui est nulle en dehors de $W' \cap \Theta_h(G)$. Les fonctions de $\mathcal{A}(G)$ forment une algèbre de fonctions sur $B \cap \Theta_h(G)$ séparant les points ne s'annulant identiquement nulle part, auto-adjointe d'après I.4.1, nulles à l'infini. Nous pouvons donc grâce au théorème de Weierstraß-Stone approcher g sur $B \cap \Theta_h(G)$ à $\epsilon/4$ près par une fonction $f_1 \in \mathcal{A}(G)$ réelle sur $\Theta_h(G)$; la fonction $f = f_1^2$ est une solution.

□

Nous aurons aussi besoin d'un résultat de minoration.

Lemme I.8.5 *Soit C un ensemble de $\Pi_u(G)$ dont l'image dans $\Theta(G)$ est compacte ; il existe ψ dans $\mathcal{H}$ telle que $\widehat{\psi}$ est plus grande que 1 sur C et positive ou nulle sur tout $\Pi_u(G)$.*

Preuve : Compte tenu de la compacité de l'image de C et du lemme I.3.1, il suffit de montrer que, pour chaque point de $\theta \in \Theta(G)$, il existe ϕ dans $\mathcal{H}$ dont la transformée de Fourier scalaire ne s'annule sur aucun π de caractère infinitésimal $\theta' = \theta_\pi$ assez voisin de θ . Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, il suffit de considérer la mesure image directe, par l'injection canonique, de la mesure de Haar d'un sous-groupe ouvert compact de G assez petit. Nous pourrions aussi faire appel à la fonction construite en I.5.7 . Dans le cas archimédien, il suffit d'utiliser le lemme I.5.3. Plus précisément, si nous nous donnons un voisinage compact de θ dans $\Theta(G)$, le lemme I.4.5 nous fournit un ensemble fini E de couples $(M, [\sigma])$ où M est un Levi et $[\sigma]$ est l'orbite sous $X^{nr}(M)$ d'une série discrète σ de M . En utilisant les fonctions données par le lemme I.5.3 et une récurrence descendante sur la longueur des K-types minimaux de σ , nous construisons une fonction ψ dans $\mathcal{H}$ non nulle dans sur toute représentation unitaire dont le caractère infinitésimal appartient au voisinage compact de θ considéré.

□

Nous aurons, enfin, besoin d'un lemme de topologie. Ce lemme est à rapprocher des théorèmes de recouvrement à la Besicovitch [EG92, Theorem 1.5.2].

Lemme I.8.6 *Soit C un compact de $\mathbf{R}^n$. Nous supposons donné, pour tout point x de C, un voisinage ouvert V_x de x . Il existe un ensemble fini I d'ouverts $(W_i)_{i \in I}$ tels que*

(i). Pour tout $i \in I$, il existe $x \in C$ tel que $\overline{W_i} \subset V_x$.

(ii). Les W_i recouvrent C.

(iii). Tout point de C appartient à au plus 2^n ouverts W_i .

Preuve : Raffinons d'abord les V_x et choisissons, pour tout x dans C , un voisinage ouvert U_x de x tel que $\overline{U_x} \subset V_x$ et tel que U_x soit un pavé de la forme

$$U_x = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \ |p_i(y) - p_i(x)| < c_i(x)\}$$

où les p_i sont les projections sur les axes de coordonnées. Extrayons un sous-recouvrement fini de $(U_x)_{x \in C}$: soient $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ tels que les U_{x_i} recouvrent C . Considérons la famille $\mathcal{F}$ des hyperplans définis par les faces des U_{x_i} . Cette famille d'hyperplans définit des pavés ouverts $(C_j)_{1 \leq j \leq m}$: ce sont les composantes connexes de

$$\mathbf{R}^n \setminus \left(\bigcup_{H \in \mathcal{F}} H \right) .$$

A chaque C_j nous associons un ouvert W_j tel que

(i). Si $\overline{C_j} \subset \overline{U_{x_i}}$, alors $\overline{W_j} \subset V_{x_i}$.

(ii). $\overline{C_j} \subset W_j$.

(iii). Pour tout y de W_j et tout indice k , si $d(C_j, C_k) \neq 0$, alors $d(y, C_j) < \frac{1}{2} d(C_j, C_k)$.

Soit y de C un point qui appartient à deux ouverts, W_j et W_k . Comme

$$d(C_j, C_k) \leq d(C_j, y) + d(y, C_k) ,$$

d'après la propriété (iii) des W_j , les ouverts C_j et C_k sont nécessairement adjacents : $d(C_j, C_k) = 0$. Il y a au plus 2^n pavés C_j adjacents deux à deux. Il en résulte que y ne peut appartenir à plus de 2^n ouverts W_j .

$\square$

Remarquons que l'énoncé précédent se généralise immédiatement aux variétés différentiables dont les composantes connexes ont des dimensions bornées, ainsi qu'aux quotients de ces variétés par des groupes finis. Il peut donc être appliqué à la variété (quasi)-algébrique des caractères infinitésimaux. La dimension des composantes connexes de cette variété est majoré par une constante ne dépendant que de G .

Théorème I.8.7 *Soient $\epsilon > 0$ et C un compact de $\Theta(G)$. Nous supposons que tous les points de C satisfont l'hypothèse I.8.1 . Il existe Ψ dans $\mathcal{H}$ telle que*

(i). $\widehat{\Psi}(\pi) \geq 0$ pour tout $\pi \in \Pi_u(G)$,

(ii). $\mu(\widehat{\Psi}) \leq \epsilon$,

(iii). Pour tout π dans $\Pi_u(G)$ avec $\theta_\pi \in C$ qui est soit non-tempérée soit tempérée mais non-induite d'une série discrète

$$\widehat{\Psi}(\pi) \geq 1 .$$

Preuve : Fixons nous provisoirement des réels strictement positifs $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ et un voisinage compact C_1 de C . Le lemme I.8.3 nous permet pour tout $\theta \in \Theta(G)$ de fabriquer une fonction ϕ_{θ,ϵ_1} et une collection $(V_M)_{M \in \mathcal{L}^G}$ de voisinages du caractère trivial, $V_M \subset X^{nr}(M)$. L'hypothèse I.8.1 nous donne un voisinage V_{θ,ϵ_1} de θ attaché aux V_M et nous pouvons supposer que V_{θ,ϵ_1} est inclus dans C_1 . En faisant appel au lemme I.8.6, nous voyons qu'il existe une constante c''_G ne dépendant que de G et un recouvrement de C par des ouverts W_i avec $1 \leq i \leq N(\epsilon_1)$ chacun étant inclus dans un certain V_{θ_i,ϵ_1} et de sorte que

$$\sum_{i=1}^{N(\epsilon_1)} 1_{W_i} \leq c''_G 1_{C_1} ,$$

puisque tous les W_i sont inclus dans C_1 . Comme d'habitude, 1_X désigne sa fonction caractéristique de X. Nous posons

$$M(\epsilon_1) = \sup_{\substack{i=1,\dots,N(\epsilon_1) \\ \pi \in \Pi_u(G)}} |\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1}(\pi)| .$$

D'après le lemme I.4.5, il existe une pseudo bande verticale à partie réelle compacte B telle que les $\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1}$ soient nulles sur toute représentation unitaire dont le caractère infinitésimal est en dehors de B . Nous choisissons un voisinage W'_i de chaque de W_i , tel que $\overline{W_i} \subset W'_i \subset C_1$ et

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N(\epsilon_1)} W'_i \setminus W_i\right) \leq \epsilon_2 .$$

Nous choisissons des fonctions f_i dans $\mathcal{A}(G)$ vérifiant pour chaque i le lemme I.8.4 pour les données $\epsilon_3 > 0$, B, W_i et W'_i .

Soit $\mathcal{N}$ le sous-ensemble de $\Theta(G)$ formé des caractères infinitésimaux des représentations tempérées induites de série discrète singulière ou unitaires induites non unitaires de série discrète ; nous notons $\mathcal{N}(\epsilon_1)$ le voisinage tubulaire de $\mathcal{N}$ formé des caractères de $\Theta(G)$ dont la distance à $\mathcal{N}$ est inférieure à ϵ_1 et $\mathcal{N}(\epsilon_1)^c$ son complémentaire.

Lemme I.8.8 *Sur le spectre unitaire, les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned}
|\sum_{i=1}^{N(\epsilon_1)} f_i \widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1}| &\leq \epsilon_3 (\sum_{i=1}^{N(\epsilon_1)} |\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1}|) + (1+\epsilon_3) M(\epsilon_1) N(\epsilon_1) 1_{\cup (W'_i \setminus W_i)} \\
&\quad + (1+\epsilon_3) c'_G c''_G 1_{C_1} 1_{\mathcal{N}(\epsilon_1)} + (1+\epsilon_3)\epsilon_1 c''_G 1_{C_1} . \\
1_{C_1} 1_{\mathcal{N}(\epsilon_1)} - \epsilon_3 N(\epsilon_1) M(\epsilon_1) &\leq \sum_{i=1}^{N(\epsilon_1)} f_i \widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1}
\end{aligned}$$

Preuve : Rappelons que B a été choisi de sorte que

$$\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1} = 1_B \widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1} \qquad \text{sur } \Pi_u(G) .$$

Pour tout i , nous pouvons décomposer 1_B de la façon suivante

$$1_B = 1_{B \setminus W_i'} + 1_{W_i' \setminus W_i} + 1_{W_i} \left(1_{\mathcal{N}(\epsilon_1)} + 1_{\mathcal{N}(\epsilon_1)^c} \right) \ .$$

Le lemme résulte des propriétés des fonctions f_i et $\phi_{\theta_i,\epsilon_1}$ construites par les lemmes I.8.3 et I.8.4.

□

Soit maintenant ϕ_0 dans $\mathcal{H}$ telle que $\widehat{\phi_0}$ soit plus grande que 1 sur C_1 ; c'est possible d'après I.8.5. Considérons la fonction

$$\epsilon_3 N(\epsilon_1) M(\epsilon_1) \widehat{\phi_0} + \sum_{i=1}^{N(\epsilon_1)} f_i \widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1} \ ,$$

C'est la transformée de Fourier scalaire d'une fonction Ψ_1 dans $\mathcal{H}$ puisque les f_i définissent des multiplicateurs de $\mathcal{H}$. D'après ce qui précède $\widehat{\Psi_1}$ est partout positive sur C_1 et plus grande que 1 sur les représentations unitaires, de caractère infinitésimal dans C_1 , non-tempérées ou tempérées mais non-induites unitaires de série discrète.

D'après les inégalités précédentes, nous avons

$$\begin{aligned} \mu(|\widehat{\Psi_1}|) \ \leq \ & \epsilon_3 \mu \left(\sum_{i=1}^{N(\epsilon_1)} |\widehat{\phi}_{\theta_i,\epsilon_1}| \right) + (1+\epsilon_3) M(\epsilon_1) N(\epsilon_1) \mu \left(\bigcup_{i=1}^{N(\epsilon_1)} (W_i' \setminus W_i) \right) \\ & + (1+\epsilon_3) c_G' c_G'' \mu \left(C_1 \cap \mathcal{N}(\epsilon_1) \right) + (1+\epsilon_3) \epsilon_1 c_G'' \mu \left(C_1 \right) \ . \end{aligned}$$

Il est donc clair que nous pouvons choisir ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 de sorte que $\mu(\widehat{\Psi_1})$ soit inférieur à $\epsilon/2$. Soit maintenant, grâce au lemme I.3.1, une fonction Ψ_2 dans $\mathcal{H}$ telle que

$$|\widehat{\Psi_1}| \leq \widehat{\Psi_2} \ ,$$

sur le spectre unitaire. Soit ϵ_4 un réel strictement positif tel que

$$\mu(\epsilon_4 \widehat{\Psi_2}) \leq \epsilon/3 \ .$$

Choisissons une fonction g dans $\mathcal{A}(G)$ telle que

$$\begin{array}{lllll} 1 & \leq g & \leq 4/3 & \text{sur} & C \cap \Theta_h(G) \\ 0 & \leq g & \leq 4/3 & \text{sur} & C_1 \cap \Theta_h(G) \\ |g| & \leq \epsilon_4 & \leq 4/3 & \text{sur} & \Theta_h(G) \setminus C_1 \ , \end{array}$$

comme il est loisible d'après le théorème de Weierstraß-Stone. Dans ces conditions, soit Ψ dans $\mathcal{H}$ telle que

$$\widehat{\Psi} = g \widehat{\Psi_1} + \epsilon_4 \widehat{\Psi_2} \ .$$

En particulier, sur le spectre unitaire,

$$\widehat{\Psi} \geq g\widehat{\Psi_1}$$

et

$$\widehat{\Psi} \geq \epsilon_4\widehat{\Psi_2} - |g|.|\widehat{\Psi_1}| \ .$$

De la première inégalité, il résulte que, par restriction au spectre unitaire, $\widehat{\Psi}$ est supérieure à $\widehat{\Psi_1}$ sur C et est positive sur C_1 . De la seconde, nous déduisons que, toujours par restriction au spectre unitaire, $\widehat{\Psi}$ est positive en dehors de C_1 . De plus

$$\begin{aligned} \mu(\widehat{\Psi}) &\leq 4/3\mu(\widehat{\Psi_1}) + \mu(\epsilon_4\widehat{\Psi_2}) \\ &\leq 2\epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

et donc la fonction Ψ vérifie bien les conditions requises par le théorème.

□

Extension à un nombre fini de places

Considérons maintenant un groupe G produit de groupes G_v pour v appartenant à un ensemble fini S et où G_v est l'ensemble des points sur un corps local F_v de caractéristique 0 d'un groupe linéaire, réductif, connexe $\mathbf{G}_v$ défini sur F_v . Dans la pratique, nous prenons un corps global F sur lequel est défini le groupe $\mathbf{G}$, S un ensemble fini de places de F et nous considérons $G = \prod_{v\in S}\mathbf{G}(F_v)$, mais une telle restriction n'est pas nécessaire pour énoncer les résultats. Nous étendons les notations $\mathcal{A}(G)$, $\mathcal{H}$ à cette situation produit.
Soit $\{(L_i,\sigma_i)\}_{i\in I}$ un ensemble de représentants des orbites, sous le normalisateur de M_0 , des orbites sous $X_u^{nr}(L)$ agissant par torsion sur σ , de couples (L,σ) formés d'un Levi $L \in \mathcal{L}^G$ et d'une représentation dans la série discrète σ de L . Nous supposerons de plus, ce qui est loisible, que les L_i sont des sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques Q_i qui contiennent un même sous-groupe parabolique minimal P_0 .

Corollaire I.8.9 *Soient $i \in I$ et $f_i \in \mathcal{A}(G)$; il existe $\Phi_i \in \mathcal{H}$ telle que*

$$\widehat{\Phi_i}(\pi) = \delta_{ij}f_i(\theta_\pi) \quad \text{si } [\pi] = i_{GL_j}(\sigma_j\otimes\chi) \text{ avec } \chi \in X^{nr}(L_j) \ .$$

Ici δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Preuve : Cela résulte directement du théorème I.6.1 par produit.

□

Corollaire I.8.10 *Soient $\epsilon > 0$ et C un compact de $\Theta(G)$ de la forme $\prod C_v$. Nous supposons que, si F_v n'est pas archimédien, tous les points de C_v satisfont l'hypothèse I.8.1 . Alors, il existe Ψ dans $\mathcal{H}$ telle que*

(i). $\widehat{\Psi}(\pi) \geq 0$ *pour tout* $\pi \in \Pi_u(G)$,

(ii). $\mu(\widehat{\Psi}) \leq \epsilon$,

(iii). Pour tout π dans $\Pi_u(G)$ avec $\theta_\pi \in C$ qui est soit non-tempérée soit tempérée mais non-induite d'une série discrète

$$\widehat{\Psi}(\pi) \geq 1 \ .$$

Preuve : Nous prendrons comme fonction Ψ une somme indexée par S de produits de fonctions :

$$\Psi = \sum_{v \in S} \left(\bigotimes_{w \in S} \Psi_w^v \right) \ .$$

Pour Ψ_v^v , nous prenons la fonction que nous donnent les théorème I.8.7 et I.7.3 ; pour $v \neq w$, nous prenons Ψ_w^v positive et plus grande que 1 partout sur C_w ; une telle fonction a été construite en I.8.5. Le produit de ces fonctions a bien une mesure de Plancherel (produit) arbitrairement petite. Leur somme est plus grande que 1 sur les représentations dont le caractère infinitésimal appartient à C et telles que l'un des facteurs est soit non-tempéré, soit non-induit unitaire de série discrète.

□

I.9 Démonstration du théorème de densité

Nous appliquerons les résultats du paragraphe I.2 à la situation suivante : Π une "pseudo bande verticale à partie réelle bornée" du dual unitaire $\Pi_u(G)$ de G , $\mathfrak{F}$ l'espace des restrictions à Π des transformées de Fourier scalaires des éléments de l'algèbre de Hecke, μ la restriction à Π de la mesure de Plancherel, Θ une pseudo bande verticale à partie réelle compacte du sous-espace des caractères infinitésimaux hermitiens et A la restriction à Θ de $\mathcal{A}(G)$. La condition $(\star)$ est vérifiée d'après I.3.1. Nous nous plaçons dans une situation produit, telle que décrit à la fin du paragraphe précédent.

Notons $\mathfrak{B}_c$ l'espace des fonctions f sur $\Pi_u(G)$ boréliennes bornées à support dans un ensemble dont l'image dans $\Theta(G)$ est compacte. Notons $\mathfrak{R}$ et $\overline{\mathfrak{F}}$ les sous-espaces suivants :

(i). $\mathfrak{R}$ est le sous-espace des $f \in \mathfrak{B}_c$ telles que, pour tout Levi M et toute représentation σ dans la série discrète de M , la fonction sur $X_u^{nr}(M)$,

$$\chi \to f(i_{GM}(\sigma \otimes \chi))$$

a des points de discontinuité de mesure nulle pour la mesure $\widetilde{\mu}_{M,\sigma}$.

(ii). $\overline{\mathfrak{F}}$ est l'espace des fonctions f sur $\Pi_u(G)$ telles que, pour tout ϵ strictement positif, il existe ϕ et ψ dans $\mathcal{H}$ avec, pour toute représentation unitaire $\pi \in \Pi_u(G)$,

$$|f(\pi) - \widehat{\phi}(\pi)| \leq \widehat{\psi}(\pi) \quad \text{et} \quad \mu(\widehat{\psi}) \leq \epsilon \ .$$

Lemme I.9.1 *Les espaces de fonctions* $\mathfrak{R}$ *et* $\overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{B}_c$ *sont des modules sur* $C_0(\Theta(G))$ *.*

Preuve : C'est clair pour $\mathfrak{R}$. Pour $\overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{B}_c$, cela résulte du corollaire I.2.3.

□

Proposition I.9.2 *Si le dual de* G *satisfait l'hypothèse I.8.1, alors* $\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{B}_c$ *.*

Preuve : Par définition même des fonctions $\widetilde{\mu}_{M,\sigma}$-Riemann-intégrables (I.1.1), nous voyons que $\overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{B}_c$ est inclus dans $\mathfrak{R}$. C'est l'autre inclusion que nous devons établir. Soit $f \in \mathfrak{R}$ et soit C un compact de $\Theta(G)$ qui contienne un voisinage de l'image du support de f . Soit (L, σ) un couple formé d'un sous-groupe de Levi $L \in \mathcal{L}^G$ et d'une série discrète $\sigma \in \Pi_2(L)$. Considérons les fonctions

$$f_\sigma \ : \chi \to f(i_{GM}(\sigma \otimes \chi)) \ .$$

Par hypothèse, c'est une fonction $\widetilde{\mu}_{L,\sigma}$-Riemann-intégrable. Notons $\mu^*_{L,\sigma}$ l'image directe de la mesure $\widetilde{\mu}_{L,\sigma}$ sur $\mathcal{A}(G)$. D'après I.1.4, étant donné ϵ_1 , il existe g_σ et h_σ dans $\mathcal{A}(G)$ avec

$$|f(\pi) - g_\sigma(\theta_\pi)| \leq h_\sigma(\theta_\pi) \quad \text{si } \pi = i_{GM}(\sigma \otimes \chi) \qquad \text{et} \quad \mu^*_{L,\sigma}(h_\sigma) \leq \epsilon_1 \ .$$

Soit maintenant I un ensemble de couples (L_i, σ_i) défini comme en I.6.1 . Le théorème I.6.1 permet de fabriquer des fonctions Φ_i et Ψ_i associées à g_{σ_i} et h_{σ_i} respectivement. Compte tenu de la compacité de l'image du support de f et d'après I.4.5, les fonctions Φ_i et Ψ_i peuvent être choisies nulles sauf pour un ensemble fini d'indices de cardinal $N(f)$. Posons

$$\phi = \sum \Phi_i \qquad \text{et} \qquad \psi_1 = \sum \Psi_i \ .$$

Nous avons

$$|f(\pi) - \widehat{\phi}(\pi)| \leq \widehat{\psi_1}(\pi)$$

sur toute représentation π unitaire irréductible qui est une induite de série discrète d'un Levi. De plus

$$\mu(\widehat{\psi}) \leq N(f)\epsilon_1 .$$

Soit $c \in C_c(\Theta(G))$ positive et égale à 1 sur le support de f . L'inégalité

$$|f(\pi) - c\widehat{\phi}(\pi)| \leq c\widehat{\psi_1}(\pi)$$

a lieu partout sur $\Pi_u(G)$ sauf peut-être sur l'ensemble, de mesure nulle, des π dans le support de c qui sont non-tempérées ou tempérées mais non-induites de séries discrètes. Il existe un réel a tel que

$$|f(\pi) - c\widehat{\phi}(\pi)| + c|\widehat{\psi_1}(\pi)| \leq a$$

partout sur $\Pi_u(G)$. D'après le théorème I.7.3 ou le théorème I.8.7 , si l'hypothèse I.8.1 est vérifiée, il existe une fonction Ψ de mesure arbitrairement petite, de sorte que, partout sur $\Pi_u(G)$,

$$|f(\pi) - c\widehat{\phi}(\pi)| \leq c\widehat{\psi_1}(\pi) + a\widehat{\Psi}(\pi)$$

et donc

$$|f - g| \leq h \qquad \text{avec} \qquad g = c\widehat{\phi} \qquad \text{et} \qquad h = c\widehat{\psi}_1 + a\widehat{\Psi}$$

et telle que $\mu(h)$ soit arbitrairement petit. D'après I.2.1 et I.2.2 cela implique $f \in \overline{\mathfrak{F}}$.

$\square$

Lemme I.9.3 *Si U est un ouvert, borné, μ-régulier, de $\Pi_u(G)$, sa fonction caractéristique appartient à $\mathfrak{R}$.*

Preuve : Notons f la fonction caractéristique de U , prolongée comme d'habitude en forme linéaire sur $\mathcal{R}(G)$. La fonction f est μ-mesurable car U est ouvert. Soient $M \in \mathcal{L}^G$ et $\sigma \in \Pi_2(M)$, la fonction

$$f_\sigma \ : \ \chi \mapsto f(i_{GM}(\sigma \otimes \chi))$$

prend des valeurs entières positives ou nulles. Distinguons les sauts de 0 à 1 des autres. Les sauts de 0 à 1 correspondent à des points de la frontière de U et sont donc par hypothèse de $\mu_{M,\sigma}$-mesure nulle. Les autres sauts se produisent en des points où f_σ vaut plus que 1 et donc où l'induite $i_{GM}(\sigma \otimes \chi)$ n'est pas irréductible. Ces points sont soit en dehors du support de la mesure, soit dans un ensemble de codimension 1 car ils sont stabilisés par un élément non trivial de W_M d'après [Sil79, Theorem 2.5.9] en $\mathfrak{p}$-adique et [Enr79, Theorem 1 et Theorem (page 6)] en archimédien. En conséquence, ces points sont de $\mu_{M,\sigma}$-mesure nulle ; en effet, cette mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $X_u^{nr}(M)$.

□

En résumé nous avons démontré le théorème de densité suivant.

Théorème I.9.4 (Théorème de densité) *Soit $G = \mathbf{G}(F_S)$. Supposons que G_v vérifie I.8.2 pour toute place finie de S . Soit f une fonction sur $\Pi_u(G)$ μ-mesurable bornée et à support dans un ensemble d'image compacte dans $\Theta(G)$. Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

(i). Pour tout Levi M et toute représentation σ dans la série discrète de M , la fonction sur $X_u^{nr}(M)$,

$$\chi \to f(i_{GM}(\sigma \otimes \chi))$$

a des points de discontinuité de mesure nulle pour la mesure $\mu_{M,\sigma}$.

(ii). Pour tout ϵ strictement positif, il existe ϕ et ψ dans $\mathcal{H}$ vérifiant, pour toute représentation unitaire $\pi \in \Pi_u(G)$,

$$|f(\pi) - \widehat{\phi}(\pi)| \leq \widehat{\psi}(\pi) \qquad et \qquad \mu(\widehat{\psi}) \leq \epsilon \ .$$

En particulier, soit f la fonction caractéristique d'un ouvert μ-régulier de $\Pi_u(G)$ et à support dans un ensemble d'image compacte dans $\Theta(G)$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe ϕ et ψ dans $\mathcal{H}$ telles que

$$|f - \widehat{\phi}| \leq \widehat{\psi} \qquad et \qquad \mu(\widehat{\psi}) < \epsilon \ .$$

Nous déduisons du théorème le corollaire annoncé :

Corollaire I.9.5 *Soit $G = \mathbf{G}(F_S)$. Supposons que G_v vérifie I.8.2 pour toute place finie de S . Soit μ_n une suite de mesures boréliennes positives sur $\Pi_u(G)$ telles que, pour toute $\phi \in \mathcal{H}$, la fonction $\widehat{\phi}$ soit μ_n-intégrable (pour tout n) et supposons que*

$$\lim_{j\to\infty} \mu_n(\widehat{\phi}) = \mu(\widehat{\phi}) \ .$$

Alors, pour tout ouvert $U \subset \Pi_u(G)$, borné et régulier pour la mesure de Plancherel

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(U) = \mu(U) \ .$$

Preuve : En effet, nous venons de voir que si f est la fonction caractéristique de U , il existe ϕ et ψ dans $\mathcal{H}$ telles que $|f - \widehat{\phi}| \leq \widehat{\psi}$ et $\mu(\widehat{\psi}) \leq \epsilon$. Le corollaire résulte alors de I.2.4 .

□

I.10 Étude de cas particuliers des hypothèses I.8.1 et I.8.2

Lemme I.10.1 *Si G de rang semi-simple 1 , l'hypothèse I.8.2 est vérifiée. Plus généralement si M est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique maximal et soit θ le caractère infinitésimal défini par une représentation cuspidale de M ou de G l'hypothèse I.8.1 est vérifiée sur la composante connexe contenant θ .*

Preuve : Le seul cas à étudier est celui d'un caractère infinitésimal correspondant à une représentation cuspidale σ du “Levi maximal” M . Les caractères χ où l'induite $i_{GM}\sigma \otimes \chi$ se décompose correspondent

– soit aux singularités des opérateurs d'entrelacement ; or ce sont des fonctions méromorphes et ces singularités sont donc des points isolés dans $X^{nr}(M)/X^{nr}(G)$;

– soit aux χ tels que $\sigma \otimes \chi$ soit singulier et là encore il ne peut s'agir que de points isolés.

Par conséquent, il existe un voisinage V_θ de θ dans $\Theta(G)$ tel que toute représentation π dans $\Pi(G)$ dont le caractère infinitésimal θ_π appartient à $V_\theta \setminus \{\theta\}$ soit une induite irréductible d'une donnée cuspidale, i.e.

$$\pi = i_{GM}\rho$$

avec ρ dans $\Pi_{cusp}(M)$. Soient $\sigma_1 \dots \sigma_t$ les représentations cuspidales de M telles que $\Theta_M^G\theta_{\sigma_i}$ soit égal à θ . Par propreté de l'application Θ_M^G , si $\Theta_M^G\theta_\rho$ est proche de θ , alors θ_ρ est proche de l'un des θ_{σ_i} . Par suite ρ s'écrit $\sigma_i \otimes \chi$ pour χ dans $X^{nr}(M)$, car l'ensemble des orbites sous $X^{nr}(M)$ des caractères infinitésimaux de représentations cuspidales de M est discret pour la topologie quotient. De plus χ (qui n'est défini que modulo le stabilisateur de σ_i dans $X^{nr}(M)$,) peut-être choisi proche du caractère trivial dans $X^{nr}(M)$. Par ailleurs, l'hypothèse I.8.1 est clairement vérifiée pour les représentations de caractère infinitésimal θ .

□

Lemme I.10.2 *Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, si $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, l'hypothèse I.8.2 est vérifiée.*

Preuve : Nous avons besoin d'un résultat de classification [Zel80, Proposition 8.6] et nous allons introduire quelques notations pour l'exposer. Soient $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles cuspidales des groupes GL_k pour tout k dans $\mathbf{N}$ et $\rho_1, \dots, \rho_r$ des éléments de $\mathcal{C}$, nous notons

$$\rho_1 \times \dots \times \rho_r$$

l'induite de $\mathrm{GL}_{n_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{n_r}$ à $\mathrm{GL}_{n_1+\dots+n_r}$ de $\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_r$, si les ρ_i sont respectivement des représentations du groupe GL_{n_i} . Nous noterons ν le caractère de GL_k défini par $\nu(g) = |\det g|$, où $|\ |$ est la norme standard sur F . Nous faisons un abus de notation en ne précisant pas k , mais il n'y aura jamais d'ambiguïté.

Nous appellerons $\mathbf{Z}$-droite tout sous-ensemble Π de $\mathcal{C}$ de la forme

$$\Pi = \{\rho \otimes \nu^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

et segment tout sous-ensemble Δ de $\mathcal{C}$ de la forme

$$\Delta = \{\rho \otimes \nu^k \mid k \in [0 \ldots l]\} \ ,$$

où ρ est un élément fixé de $\mathcal{C}$ et l un entier positif quelconque. Nous noterons $\mathcal{S}$ l'ensemble des segments. Nous savons alors [Zel80, 3.1 et Proposition 2.10] que, si Δ est un segment de la forme précédente, alors

$$\rho \times (\rho \otimes \nu) \times \ldots \times (\rho \otimes \nu^l)$$

admet un unique sous-module irréductible ; nous le notons $\langle \Delta \rangle$. Zelevinsky introduit $\mathcal{O}$ l'ensemble des multi-ensembles finis de segments, c'est-à-dire qu'un élément a de $\mathcal{O}$ s'écrit

$$a = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_r\}$$

où les Δ_i sont des segments, mais ne sont pas nécessairement distincts. Une autre façon de le voir est de se donner une fonction caractéristique de a , ψ_a . Par définition

$$\psi_a = 1_{\Delta_1} + \ldots + 1_{\Delta_r} \ ,$$

et c'est donc une fonction de $\mathcal{S}$ dans $\mathbf{N}$. Réciproquement si ψ est une fonction arbitraire de $\mathcal{S}$ dans $\mathbf{N}$ et à support fini, elle définit un multi-ensemble. Si a et b appartiennent à $\mathcal{O}$, nous noterons $a+b$ l'élément de $\mathcal{O}$ tel que ψ_{a+b} soit égal à $\psi_a + \psi_b$. Pour plus de détails, voir le paragraphe consacré aux multi-ensembles dans [Zel80]. Remarquons que a donne aussi naissance à une fonction ϕ_a de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{N}$; ϕ_a est donnée par la même formule que ψ_a , mais en l'interprétant comme fonction de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{N}$, i.e. 1_{Δ_i} est la fonction caractéristique de Δ_i vu comme sous-ensemble de $\mathcal{C}$ et non comme élément de $\mathcal{S}$. Il faut prendre garde que deux a distincts peuvent très bien avoir même ϕ_a .

Zelevinsky introduit aussi la relation entre les segments "Δ_1 précède Δ_2" ; voir [Zel80] pour plus de précision. Alors, si $a = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_r\}$ appartient à $\mathcal{O}$ et si les Δ_i sont numérotés de telle sorte que si i est inférieur à j , Δ_i ne précède pas Δ_j , nous savons [Zel80, Theorem 6.1] que

$$\langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle \times \ldots \times \langle \Delta_r \rangle$$

admet un unique sous-module irréductible ; nous le notons $\langle a\rangle$ car il ne dépend pas de la numération choisie [Zel80, Proposition 6.4]. De plus, toute représentation irréductible de GL_n est isomorphe à $\langle a\rangle$ pour un certain a dans $\mathcal{O}$ [Zel80, Theorem 6.5] .
Soit maintenant ϕ une fonction de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{N}$. Si supp ϕ , le support de ϕ , est fini, nous noterons

$$\mathcal{O}(\phi) = \{a \in \mathcal{O} \mid \phi_a = \phi\}$$

et, si Π est une $\mathbf{Z}$-droite de $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{O}(\Pi) = \cup_{\text{supp } \phi \subset \Pi} \mathcal{O}(\phi) \ .$$

Nous pouvons enfin énoncer

Lemme I.10.3 *[Zel80, Proposition 8.6] Si $\Pi_1, \ldots, \Pi_p$ sont des $\mathbf{Z}$-droites de $\mathcal{C}$ distinctes (deux à deux) et si a_i appartient à $\mathcal{O}(\Pi_i)$, alors*

$$\langle a_1 + \ldots + a_p\rangle = \langle a_1\rangle \times \ldots \times \langle a_p\rangle \ .$$

Soit maintenant θ un point de $\Theta(G)$; il lui correspond une donnée cuspidale ou encore un multi-ensemble a de $\mathcal{C}$. Cela nous donne aussi un ensemble de $\mathbf{Z}$-droites $\Pi_1, \ldots, \Pi_p$. Soit π tel que $\theta_p i$ soit dans un voisinage de θ' ; écrivons $\pi = \langle b\rangle$ pour un b dans $\mathcal{O}$. Nous pouvons décomposer b sous la forme

$$b = b_1 + \ldots + b_p \ ,$$

où chacun des b_i appartient à $\mathcal{O}(\Pi_i)$ pour des $\mathbf{Z}$-droites $(\Pi_i')_{i=1\ldots q}$ distinctes deux à deux. Nous pouvons choisir un voisinage de θ dans $\Theta(G)$ tel que les translatés de chacune des $\mathbf{Z}$-droites Π_i par un élément de ce voisinage aient une intersection vide. Sous cette hypothèse, tout segment Δ' intervenant dans b est translaté d'un segment Δ , inclus dans C .
Dès lors, si $b_i = \{\Delta'_{i,1}, \ldots, \Delta'_{i,k_i}\}$, il existe des segments $(\Delta_{i,j})_{j=1\ldots k_i}$ tels que

$$\Delta'_{i,j} = \Delta_{i,j} \otimes \lambda_{i,j} \ ,$$

pour certains $\lambda_{i,j}$ dans un voisinage du caractère trivial dans $X^{nr}(\mathrm{GL}_{n_{i,j}})$. Toujours à cause de l'hypothèse de disjonction des translatées des Π_i , les $\lambda_{i,j}$ ne dépendent en fait que de i ; nous pouvons énoncer cela sous la forme : il existe λ_i dans $X^{nr}(\mathrm{GL}_{n_i})$ tel que

$$b_i = a_i \otimes \lambda_i \ .$$

Le lemme I.10.3 montre alors

$$\begin{aligned} \langle b\rangle &= \langle a_1 \otimes \lambda_1\rangle \times \ldots \times \langle a_p \otimes \lambda_p\rangle \\ &= (\langle a_1\rangle \otimes \lambda_1) \times \ldots \times (\langle a_p\rangle \otimes \lambda_p) \ . \end{aligned}$$

Bien sûr, le multi-ensemble $a_1 + \ldots + a_p$ est égal à a et donc

$$\langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_p \rangle$$

est de caractère infinitésimal θ . Le lemme est prouvé.

$\square$

Remarque : dans le cas archimédien, la véracité de l'hypothèse, pour un groupe quelconque semble résulter de la classification de Vogan et notamment du lemme I.5.3 .

II Théorèmes limites

II.1 Le cas co-compact

Soit $\widetilde{G}$ un groupe localement compact unimodulaire, notons $\Pi_u(\widetilde{G})$ le dual unitaire de $\widetilde{G}$, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de $\widetilde{G}$, muni de la topologie de Fell. Soit Γ un sous-groupe discret co-compact dans $\widetilde{G}$. La représentation régulière droite ρ_Γ de $\widetilde{G}$ dans $L^2(\Gamma\backslash\widetilde{G})$ est somme directe dénombrable de représentations unitaires $\widetilde{\pi}$ avec multiplicités finies, $m_\Gamma(\widetilde{\pi})$. La mesure

$$\mu_\Gamma = \operatorname{vol}(\Gamma\backslash\widetilde{G})^{-1} \sum_{\widetilde{\pi}\in\Pi_u(\widetilde{G})} m_\Gamma(\widetilde{\pi})\delta_{\widetilde{\pi}}$$

est, au facteur $\operatorname{vol}(\Gamma\backslash\widetilde{G})^{-1}$ près, la mesure associée à la décomposition spectrale de trace dans la représentation régulière droite de $\widetilde{G}$ dans $L^2(\Gamma\backslash\widetilde{G})$. En effet, soit $f \in C_c^\infty(\widetilde{G})$ une fonction lisse et à support compact sur $\widetilde{G}$, l'opérateur $\rho_\Gamma(f)$ a pour trace

$$\operatorname{tr}\,(\rho_\Gamma(f)) = \sum_{\widetilde{\pi}\in\Pi_u(\widetilde{G})} m_\Gamma(\widetilde{\pi}) \operatorname{tr}\,(\widetilde{\pi}(f))$$

et donc

$$\operatorname{tr}\,(\rho_\Gamma(f)) = \operatorname{vol}(\Gamma\backslash\widetilde{G})\ \mu_\Gamma(\widehat{f})\ .$$

La formule des traces de Selberg, qui est simple à prouver et à écrire dans le cas co-compact, donne une expression "géométrique" pour cette trace. Notons $\{\Gamma\}$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans Γ . Nous avons

$$\operatorname{tr}\,(\rho_\Gamma(f)) = \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} \operatorname{vol}(\Gamma_\gamma\backslash\widetilde{G}_\gamma)\ \Phi_{\widetilde{G}}(\gamma, f)$$

où $\Phi_{\widetilde{G}}(\gamma, f)$ est l'intégrale orbitale de f sur l'orbite de γ :

$$\Phi_{\widetilde{G}}(\gamma, f) = \int_{\widetilde{G}_\gamma\backslash\widetilde{G}} f(x^{-1}\gamma\, x)\, d\dot{x}\ .$$

Toutes les sommes et intégrales sont absolument convergentes. Appliquons ce qui précède à un groupe $\widetilde{G}$ qui soit un produit :

$$\widetilde{G} = G \times G' \ .$$

Soit f une fonction sur $G \times G'$ décomposée, i.e. une fonction de la forme $f = \phi \otimes h$.

Lemme II.1.1 *Soit h dans $C_c^\infty(G')$ de type positif; alors, pour toute représentation π dans $\Pi_u(G)$, la série*

$$\sum_{\pi' \in \Pi_u(G')} m_\Gamma(\pi \otimes \pi')\widehat{h}(\pi')$$

est convergente. Nous noterons sa somme $m_\Gamma(\pi, h)$.

Preuve : Soit π dans $\Pi_u(G)$, il existe ϕ dans $C_c^\infty(G)$ de type positif et dont la transformée de Fourier scalaire ne s'annule par sur π . Nous savons que l'opérateur $\rho_\Gamma(\phi \otimes h)$ est à trace et donc

$$\left(\sum_{\pi' \in \Pi_u(G')} m_\Gamma(\pi \otimes \pi')\widehat{h}(\pi') \right) \widehat{\phi}(\pi) \leq \mathrm{tr}\ \left(\rho_\Gamma(\phi \otimes h)\right) \leq \infty \ .$$

□

Sous ces conditions, nous définissons une mesure borélienne positive sur $\Pi_u(G)$ en posant

$$\mu_h = \frac{1}{\mathrm{vol}\,(\Gamma\backslash\widetilde{G})} \sum_{\pi \in \Pi_u(G)} m_\Gamma(\pi, h)\delta_\pi \ ,$$

où δ est la masse de Dirac. La mesure μ_h est telle que

$$\mu_h(\widehat{\phi}) = \frac{1}{\mathrm{vol}\,(\Gamma\backslash\widetilde{G})} \mathrm{tr}\ \left(\rho_\Gamma(\phi \otimes h)\right) \ .$$

Définition *Nous dirons qu'une suite de fonctions $h_n \in C_c^\infty(G')$ tend fortement vers l'indicatrice de* 1 *si :*

– *pour tout n*

$$h_n(1) = 1 \ ,$$

– *pour tout $x \in G'$ distinct de* 1

$$\lim_{n \to \infty} h_n(x) = 0 \ ,$$

– *il existe une fonction g continue et à support compact sur G' qui majore absolument tous les éléments de la suite :*

$$|h_n(x)| \leq g(x) \ .$$

Proposition II.1.2 *Soit Γ un sous-groupe co-compact de $\widetilde{G} = G \times G'$ qui se projette injectivement dans le second facteur. Soit h_n une suite de fonction de type positif, tendant fortement vers l'indicatrice de 1 sur G' . Alors, pour toute fonction ϕ lisse et à support compact sur G , on a*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{h_n}(\widehat{\phi}) = \mu^G(\widehat{\phi})$$

où μ^G est la mesure de Plancherel de G.

Preuve : Les intégrales orbitales sont absolument convergentes. Le théorème de convergence dominée montre que si h_n tend fortement vers l'indicatrice de 1 et, si $x \neq 1$, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{G'}(x, h_n) = 0 \ .$$

Comme

$$\Phi_{\widetilde{G}}(\gamma, \phi \otimes h_n) = \Phi_G(\gamma, \phi)\Phi_{G'}(\gamma, h_n) \ ,$$

la contribution de chaque classe de conjugaison non triviale tend vers 0. Par ailleurs, par hypothèse $\Phi_{G'}(1, h_n) = h_n(1) = 1$. Comme toutes les expressions dans la formule des traces sont absolument convergentes, une nouvelle application du théorème de convergence dominée montre qu'à la limite

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{tr}\ (\rho_\Gamma(\phi \otimes h_n)) = \mathrm{vol}\,(\Gamma\backslash\widetilde{G})\ \phi(1) \ .$$

□

Nous allons maintenant construire divers exemples de cette situation.

Le cadre classique

Soit G un groupe localement compact unimodulaire et soit Γ_n une famille de sous-groupes discrets co-compacts de G tels que

(i). Pour tout n , Γ_n est normal dans Γ_0 ,

(ii). Pour tout n , $\Gamma_n \supset \Gamma_{n+1}$,

(iii). L'intersection des Γ_n est réduite à $\{1\}$.

Nous dirons qu'une telle famille de sous-groupes est une tour de sous-groupes tendant vers 1. Soit G' le groupe profini limite projective des quotients $\Gamma_n\backslash\Gamma_0$:

$$G' = \lim_{\leftarrow} \Gamma_n\backslash\Gamma_0 \ .$$

Nous pouvons identifier Γ_0 à un sous-groupe dense de G'. Soit Γ le sous-groupe de $\widetilde{G} = G \times G'$ obtenu par le plongement diagonal de Γ_0 dans le produit. L'adhérence de Γ_n dans G' est un sous-groupe ouvert compact H_n . La projection de $\Gamma\backslash\widetilde{G}$ sur $\Gamma_n\backslash G$ admet pour fibres H_n ; en effet

$$\Gamma\backslash\widetilde{G}/H_n = \Gamma\backslash(G \times G'/H_n) \simeq \Gamma_n\backslash G \ .$$

Notons h_n la fonction caractéristique de H_n . C'est une suite de fonctions qui tend fortement vers l'indicatrice de 1 . La projection ci-dessus montre que, dans ce cas, les mesures μ_{h_n} ne sont autres que les mesures μ_{Γ_n} construites dans l'introduction :

$$\mu_{h_n}(\widehat{\phi}) = \frac{1}{\mathrm{vol}\,(\Gamma\backslash\widetilde{G})} \,\mathrm{tr}\, (\rho_\Gamma(\phi \otimes h_n)) = \frac{1}{\mathrm{vol}\,(\Gamma_n\backslash G)} \,\mathrm{tr}\, (\rho_{\Gamma_n}(\phi)) = \mu_{\Gamma_n}(\widehat{\phi}) \ .$$

Nous en déduisons le

Théorème II.1.3 *Soit un groupe G localement compact et $\mathcal{H}$ une algèbre de fonctions lisses à support compact sur G tels que le couple $(G, \mathcal{H})$ vérifie le principe de densité. Soit $(\Gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une tour de sous-groupes discrets co-compacts de G tendant vers 1. Alors pour tout ouvert U relativement quasi-compact μ^G-régulier, la suite des mesures μ_{Γ_n} est telle que*

$$\mu_{\Gamma_n}(U) \to \mu^G(U) \ .$$

Preuve : Le théorème résulte immédiatement de la proposition précédente et de I.2.4 .

□

Le cadre adélique

Soit F un corps de nombres et $\mathbf{G}$ un groupe linéaire algébrique réductif connexe défini sur F . Soit F_v la complétion de F à la place v . Soit S un ensemble fini de places de F ; nous posons

$$F_S = \prod_{v\in S} F_v \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A}^S = \prod_{v\notin S}{}' F_v \ ,$$

i.e. $\mathbf{A}^S$ est le "produit restreint" des complétés en dehors de S . Nous posons

$$G = \mathbf{G}(F_S) \qquad\qquad G' = \mathbf{G}(\mathbf{A}^S) \qquad\qquad \Gamma = \mathbf{G}(F) \ .$$

Supposons que S contienne les places archimédiennes et soit H_n une famille emboîtée de sous-groupes ouverts compacts de G' dont l'intersection est réduite à l'élément neutre. Soit h_n la fonction caractéristique de H_n . C'est une suite de fonctions qui tend fortement vers l'indicatrice de 1 . Si de plus $\mathbf{G}$ est F-anisotrope, les groupes G et Γ vérifient les hypothèse de la proposition ci-dessus.

Théorème de DGWD : le cas S-arithmétique co-compact

Théorème II.1.4 *Soit F un corps de nombres, S un ensemble fini de places de F et $\mathbf{G}$ un groupe linéaire algébrique réductif défini sur F . Supposons que G_v satisfait l'hypothèse I.8.2 pour les places finies $v \in S$. Soit G le produit des groupes $(\mathbf{G}(F_v))$. Soient G' un groupe localement compact et Γ un sous-groupe discret co-compact de $G \times G'$ qui se projette injectivement dans le second facteur. Si h_n est une suite de fonctions sur G' , de type positif, qui tend fortement vers l'indicatrice de 1 sur G' , alors pour tout ouvert $U \subset \Pi_u(G)$ relativement quasi-compact μ^G-régulier, la suite des mesures μ_{h_n} est telle que*

$$\mu_{h_n}(U) \to \mu^G(U) \ .$$

Preuve : Le théorème résulte immédiatement du théorème II.1.3 et du théorème de densité.

□

Le théorème II.1.4 ci-dessus redonne les théorèmes de De George Wallach et Delorme en les généralisant au cadre S-arithmétique co-compact sous l'hypothèse I.8.2 pour les places finies.

Théorème II.1.5 *Soit F un corps de nombres, S un ensemble fini de places et $\mathbf{G}$ un groupe linéaire algébrique réductif défini sur F . Supposons que G_v satisfait l'hypothèse I.8.2 pour les places finies $v \in S$. Soit $G = \mathbf{G}(F_S)$ et soit $(\Gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une tour de sous-groupes discrets co-compacts de G tendant vers 1 . Alors pour tout ouvert U relativement quasi-compact μ^G-régulier, la suite des mesures μ_{Γ_n} est telle que*

$$\mu_{\Gamma_n}(U) \to \mu^G(U) \ .$$

II.2 Théorèmes limites avec séries discrètes

Dans l'étude du cas non-co-compact nous nous limiterons au cadre adélique et nous reprendrons les notation de Jim Arthur. Soit F un corps de nombres et soit $\mathbf{G}$ un groupe semi-simple défini sur F . Soit S un ensemble fini de places contenant les places archimédiennes de F . Quand $\Gamma \subset \mathbf{G}(F_S)$ n'est plus co-compact, par exemple si Γ est un sous-groupe S-arithmétique d'un groupe $\mathbf{G}$ isotrope, la formule des traces devient beaucoup plus compliquée ; elle reste cependant assez simple pour des fonctions $f = \otimes f_v$ avec en une place v un pseudo-coefficient de série discrète. On peut, au choix, utiliser la formule des traces sous sa forme invariante ou non invariante. La formule des traces invariante présente l'avantage de nous donner des termes spectraux très simples au moins dans ce cas.

On dit qu'une fonction sur G_v est cuspidale – au sens de J. Arthur – si sa transformée de Fourier scalaire s'annule sur les représentations de G_v induites à partir d'un sous-groupe parabolique propre. Dans la terminologie du chapitre précédent cela signifie que la forme linéaire sur le groupe de Grothendieck associée à f_v est discrète. Par exemple, un pseudo-coefficient de série discrète (cf. I.5.5) est toujours cuspidal. Soit $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ un ensemble fini de place réunion disjointe de trois sous ensembles. On posera

$$G_i = \prod_{v \in S_i} \mathbf{G}(F_v) \ .$$

On supposera S_0 non vide. En rassemblant divers résultats d'Arthur, principalement [Art88, Theorem 7.1 (a)] on obtient l'énoncé suivant.

Théorème II.2.1 *Soit $f = f_{S_0} \otimes f^{S_0}$ et supposons que f_{S_0} est cuspidale. Il existe un ensemble fini S' contenant S tel que*

$$\sum_{\mathbf{M} \in \mathcal{L}^G} |W_0^{\mathbf{M}}||W_0^{\mathbf{G}}|^{-1} \sum_{\gamma \in \{\mathbf{M}(F)\}_{\mathbf{M},S'}} a^{\mathbf{M}}(S',\gamma) I_{\mathbf{M}}(\gamma, f) = \sum_t \left(\sum_{\pi \in \Pi_{disc}(\mathbf{G},t)} a^{\mathbf{G}}_{disc}(\pi) \operatorname{tr}\ \pi(f) \right)$$

la somme en γ porte sur un sous-ensemble (dépendant de S') d'un ensemble de représentants des classes de conjugaisons dans $\mathbf{M}(F)$. Si $f = f_S \otimes h^S$ où h^S est la fonction caractéristique d'un sous groupe ouvert compact fixe, l'ensemble S' peut être choisi indépendant de f_S. De plus la distribution $I_{\mathbf{M}}(\gamma, f)$ se factorise en un produit de distributions indexé par les places de F :

$$I_{\mathbf{M}}(\gamma, f) = I^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\gamma, f_{S_0})\ I^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}}(\gamma, f^{S_0}_{\mathbf{M}})$$

où $I^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}}(\gamma, *)$ est l'intégrale orbitale $\Phi_{\mathbf{M}}(\gamma, *)$ sur le groupe $\mathbf{M}$ normalisée par un jacobien et $f^{S_0}_{\mathbf{M}}$ le terme constant de f^{S_0} le long de $\mathbf{M}$.

La sommation partielle en t est nécessaire faute de savoir que l'expression spectrale de la formule des traces est absolument convergente. Toutefois ce fait est connu pour le spectre discret [Mül89].

Lemme II.2.2 *Soit v une place de S_0 et $\pi_0 \in \Pi_2(G_v)$. Soit $f_v \in \mathcal{H}(G_v)$ un pseudo-coefficient pour π_0 . Soit $\pi \in \Pi_u(G_v)$ une sous-représentation d'une induite $i_{G_v L_v}\sigma$ pour un sous-groupe de Levi L_v propre et $\sigma \in \Pi_u(M_v)$ qui soit W_G-singulière, alors* $\operatorname{tr}\ \pi(f_v) = 0$.

Preuve : Soit donc f_v un pseudo-coefficient pour une série discrète π_0 et supposons que $\operatorname{tr}\ \pi(f_v)$ soit non nul ; cela implique que le caractère infinitésimal de π est celui d'une série discrète. Si v est archimédienne, un tel caractère est associé à un paramètre λ régulier dans une sous algèbre de Cartan du complexifié or notre hypothèse implique au contraire que ce paramètre est singulier, c'est une contradiction (cet argument est emprunté à la preuve de la proposition 3.2 de [Art89]). Si v est une place finie, il existe un sous-groupe parabolique Q_v de G_v avec sous-groupe de Levi M_v et ρ une représentation cuspidale de M_v tels que $\mathcal{I}_{Q,\rho}^{G_v}$ ait la série discrète π_0 comme sous-quotient. Mais par ailleurs il existe un sous-groupe parabolique $P_v \subset L_v$ avec sous-groupe de Levi M_v tels que σ est un sous-quotient unitaire de $\mathcal{I}_{P_v,\rho}^{L_v}$. Comme L est un sous-groupe de Levi propre, la partie réelle du caractère central de ρ est singulière. On obtient ainsi une contradiction avec le critère de Casselman [Cas, Theorem 4.4.6] pour l'existence de série discrète comme sous quotient d'une induite de cuspidale.

□

Corollaire II.2.3 *Si $f = f_{S_0} \otimes f^{S_0}$ avec f_{S_0} pseudo-coefficient de série discrète ; les représentations pour lesquelles $a^{\mathbf{G}}_{disc}(\pi)\,\mathrm{tr}\ \pi(f) \neq 0$ sont des représentations du spectre discret. Dans ce cas $a^{\mathbf{G}}_{disc}(\pi)$ est la multiplicité de π dans le spectre discret :*

$$a^{\mathbf{G}}_{disc}(\pi) = m_{disc}(\pi)$$

Preuve : D'après [Art88, corollaire 7.3], ces termes proviennent de la décomposition spectrale de

$$\sum_{\mathbf{M}} |W_0^{\mathbf{M}}||W_0^{\mathbf{G}}|^{-1} \sum_{s\in W(\mathfrak{a}_{\mathbf{M}})_{reg}} |\det(s-1)_{\mathfrak{a}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}}|^{-1}\,\mathrm{tr}\ \left(M_{Q|sQ}(0)\rho_Q(s,0,f)\right) .$$

Si $\mathbf{M} \neq \mathbf{G}$ le terme tr $\left(M_{Q|sQ}(0)\rho_Q(s,0,f)\right)$ est une combinaison linéaire de caractères de sous-représentations π d'induites à partir de représentations unitaires σ stabilisées par un élément non trivial s de W_G . Le lemme II.2.2 montre que ces termes sont nuls. Seul $\mathbf{M} = \mathbf{G}$ peut contribuer non trivialement.

□

Puisque le spectre discret est à trace et que donc la somme qui nous reste est absolument convergente, on peut donc, si f_{S_0} est un pseudo-coefficient de série discrète, récrire la formule du théorème comme suit :

$$\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{L}^G} |W_0^{\mathbf{M}}||W_0^{\mathbf{G}}|^{-1} \sum_{\gamma\in\{\mathbf{M}(F)\}_{\mathbf{M},S'}} a^{\mathbf{M}}(S',\gamma) I_{\mathbf{M}}(\gamma, f_{S_0}) I^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}}(\gamma, f^{S_0}_{\mathbf{M}}) = \mathrm{tr}\ \rho_{disc}(f)$$

où

$$\mathrm{tr}\ \rho_{disc}(f) = \sum_{\pi\in\Pi_u(\mathbf{G})} m^{\mathbf{G}}_{disc}(\pi)\,\mathrm{tr}\ \pi(f)$$

est la trace de f dans le spectre discret de $L^2(\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbf{A}))$; on a noté $m^{\mathbf{G}}_{disc}(\pi)$ la multiplicité de π dans le spectre discret. On sait que $a^{\mathbf{G}}(S',1)$ est indépendant de S' et que :

$$\mathrm{vol}\,(\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbf{A})) \;= a^{\mathbf{G}}(S',1)\ .$$

Supposons que f_{S_0} est un pseudo-coefficient normalisé f_{π_0} pour la série discrète π_0 :

$$\mathrm{tr}\ \ \pi_0(f_{\pi_0}) = 1\ .$$

Soit d_{π_0} le degré formel de π_0 , on a $f_{\pi_0}(1) = d_{\pi_0}$. Nous pouvons maintenant énoncer un théorème limite :

Théorème II.2.4 *Soient f_{π_0} un pseudo-coefficient normalisé de série discrète et h_n une suite de fonction caractéristiques de sous-groupes ouverts compacts au-dessus d'un ensemble fini $S_2 \subset S$ de places, tendant fortement vers l'indicatrice de 1 . Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{tr}\ \ \rho_{disc}(f_{\pi_0}\otimes\phi\otimes h_n\otimes h^S) = \mathrm{vol}\,(\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbf{A}))d_{\pi_0}\,\phi(1)\ .$$

Preuve : Les distributions $I^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}}(\gamma,(h_n)_{\mathbf{M}})$ sont des combinaisons linéaires finies d'intégrales orbitales sur G_2

$$\Phi_{G_2}(\gamma\eta,h_n)$$

pour des éléments de la forme $\gamma\eta$ où η est un unipotent du centralisateur de γ dans G_2 non trivial si $\mathbf{M}\neq\mathbf{G}$. Par hypothèse ces distributions tendent vers zéro si $\gamma\eta\neq 1$ et donc :

$$\lim_{n\to\infty} I^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}}(\gamma,(h_n)_{\mathbf{M}}) = 0$$

si $\gamma\neq 1$ ou si $\mathbf{M}\neq\mathbf{G}$. L'ensemble de sommation en γ dans II.2.1 étant fixe et la série étant absolument convergente (en fait seul un ensemble fini fixe de termes peuvent être non nuls) la proposition s'en suit compte tenu de ce que $h_n(1)h^S(1) = 1$.

□

Posons

$$\mu^{disc}_{\pi_0,h_n,h^S}(\widehat{\phi}) = \frac{1}{d_{\pi_0}\ \mathrm{vol}\,(\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbf{A}))}\ \mathrm{tr}\ \ \rho_{disc}(f_{\pi_0}\otimes\phi\otimes h_n\otimes h^S)\ .$$

On peut reformuler ce qui précède comme suit.

$$\lim_{n\to\infty}\mu^{disc}_{\pi_0,h_n,h^S}(\widehat{\phi}) = \mu^{G_1}(\widehat{\phi})\ .$$

où μ^{G_1} est la mesure de Plancherel du groupe G_1 . On prendra garde que les mesures $\mu^{disc}_{\pi_0,h_n,h^S}$ ne sont en général positives. En effet tr $\pi(f_{\pi_0})$ peut être négative. Cependant, si nous supposons que π_0 est une série discrète dont les pseudo-coefficients sont tels que tr $\pi(f_{\pi_0}) = 0$ sauf si $\pi = \pi_0$, ces mesures sont positives et nous pouvons donc utiliser I.9.5. C'est le cas des représentations cuspidales et aussi, quoique nous n'ayons pas de référence, des séries discrètes intégrables.

Corollaire II.2.5 *Soit h_n une suite de fonction caractéristiques de sous-groupes ouverts compacts au-dessus d'un ensemble fini $S_2 \subset S$ de places, tendant fortement vers l'indicatrice de* 1 *; supposons que G_v vérifie I.8.2 pour toute place finie de S_1 . Soit π_0 une série discrète dont les pseudo-coefficients sont tels que* $\mathrm{tr}\ \pi(f_{\pi_0}) = 0$ *sauf si $\pi = \pi_0$. Alors, pour tout ouvert $U \subset \Pi_u(G_1)$, borné et régulier pour la mesure de Plancherel, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \mu^{disc}_{\pi_0,h_n,h^S}(U) = \mu^{G_1}(U) \ .$$

Trace asymptotique du spectre cuspidal

On souhaiterait formuler les mêmes assertions en remplaçant le spectre discret par le spectre cuspidal. La preuve peut être facile si le spectre discret non cuspidal quelque fois appelé le spectre résiduel et qui provient de résidus de séries d'Eisenstein est très simple. Par exemple, si $\mathbf{G} = SL(2)$, il n'y a que la représentation triviale et il est clair que la contribution à la trace dans le spectre discret de la représentation triviale tend vers zéro lorsque h_n tend fortement vers l'indicatrice de 1 : en effet l'intégrale de h_n sur G_2 est par la formule de Weyl une intégrale d'intégrales orbitales, et on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Il en est de même si on considère $PGL(2)$ ou bien $GL(2)$ avec un comportement fixé sur la partie vectorielle du centre, comme il résulte de la formule de Poisson pour le groupe $F^\times/(F^\times)^2$. Par ailleurs, dans le cas, $GL(2)$ l'ensemble $\{\mathbf{M}(F)\}_{\mathbf{M},S'}$ du théorème II.2.1 peut être choisi indépendant de S' car il n'y a dans $GL(2)$ qu'une seule classe de conjugaison d'unipotents non triviaux. Enfin les représentations non tempérées qui pourraient contribuer en présence de pseudo-coefficients sont les représentations de dimension 1 qui ne peuvent intervenir que dans le spectre résiduel. Nous considérons $S = S_0 \cup S_1$ un ensemble fini de place réunion disjointe de deux sous ensembles. On supposera S_0 non vide. On obtient le théorème limite suivant.

Théorème II.2.6 *Soient* $\mathbf{G} = GL(2)$ *, f_{π_0} un pseudo-coefficient de série discrète et h_n^S une suite de fonction caractéristiques de sous-groupes ouverts compacts de G^S tendant fortement vers l'indicatrice de 1 . Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{tr}\ \rho_{cusp}(f_{\pi_0} \otimes \phi \otimes h_n^S) = \mathrm{vol}\,(\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbf{A}))d_{\pi_0}\,\phi(1) \ .$$

Supposons F totalement réel, soit S_0 l'ensemble des places archimédiennes. Si la fonction ϕ est bi-invariante en chaque place de S_1 par le sous-groupe compact maximal naturel, elle définit, dans le langage classique, un opérateur de Hecke. On a ainsi obtenu une expression asymptotique pour sa trace dans les formes modulaires cuspidales, dont le poids est défini par la série discrète π_0 , au moyen de la mesure de Plancherel. Posons

$$\mu^{cusp}_{\pi_0,h_n}(\widehat{\phi}) = \frac{1}{d_{\pi_0}\ \mathrm{vol}\,(\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbf{A}))}\ \mathrm{tr}\ \rho_{cusp}(f_{\pi_0} \otimes \phi \otimes h_n) \ .$$

Ce sont des mesures positives et on a donc, compte tenu de I.9.5, le corollaire suivant :

Corollaire II.2.7 *Soit* $\mathbf{G} = GL(2)$, h_n *une suite de fonction caractéristiques de sous-groupes ouverts compacts au-dessus d'un ensemble fini* $S_2 \subset S$ *de places, tendant fortement vers l'indicatrice de* 1 . *Soit* π_0 *une série discrète. Alors, pour tout ouvert* $U \subset \Pi_u(G_1)$*, borné et régulier pour la mesure de Plancherel on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \mu^{cusp}_{\pi_0,h_n}(U) = \mu^{G_1}(U) \ .$$

Bibliographie

[Art74] J.Arthur, The Selberg trace formula for groups of F-rank one, Annals of Mathematics **100** (1974), 326-385

[Art78] J. Arthur, A trace formula for reductive groups I, Duke Mathematical Journal **45** (1978), 911-952

[Art80] J. Arthur, A trace formula for reductive groups II, Compositio Mathematica **40** (1980), 87-121

[Art82] J. Arthur, On a family of distributions obtained from Eisenstein series, American Journal of Mathematics **104** (1982), 1243-1336

[Art83] J. Arthur, A Paley-Wiener theorem for real reductive groups, Acta Mathematicæ **150** (1983), 1-88

[Art85] J. Arthur, A measure on the unipotent variety, Canadian Journal of Mathematics **37** (1985), 1237-1274

[Art86] J. Arthur, On a family of distributions obtained from orbits, Canadian Journal of Mathematics **38** (1986), 179-214

[Art88] J. Arthur, The invariant trace formula. II. Global theory, Journal of the american mathematical society (1988), 501-554

[Art89] J. Arthur, The L^2-Lefschetz numbers of Hecke operators, Inventiones mathematicæ **94** (1989), 257-290

[AMD69] M. F. Atiyah, I.G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, 1969

[AM66] L. Auslander, C. Moore, *Unitary representations of solvable Lie groups*, Memoirs of the American Mathematical Society **62** (1966)

[BDx60] P. Bernat, J. Dixmier, Sur le dual d'un groupe de Lie, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome **250**, Série I, 2 (1960), 1778-1779

[BDe84] J.N. Bernstein, P. Deligne, Le “centre” de Bernstein, in *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris, 1984

[BDK86] J.N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, Trace Paley-Wiener theorem for reductive p-adic groups, Journal d'Analyse Mathématique **47** (1986), 180-192

[Bla69] A. Blanchard, *Initiation à la théorie analytique des nombres premiers*, Dunod, Paris, 1969

[Bor65] A. Borel, Linear algebraic groups, in *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Proceeding of symposia in pure mathematics, volume **IX** (1965), 3-19

[Bor69] A. Borel, Introduction aux groupes arithmétiques, Hermann, Paris, 1969

[BW80] A. Borel, N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups*, Annals of Mathematics Studies, Study 94, Princeton University Press, 1980

[Bou74] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, **I-X**, Deuxième édition, Hermann, Paris, 1974

[Car79] P. Cartier, Representations of p-adic groups : a survey, in *Automorphic forms, representations and L-Functions*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, volume **XXXIII**, Part 1 (1979), 111-155

[Cas89] W. Casselman, Introduction to the Schwartz space of $\Gamma\backslash G$, Canadian Journal of Mathematics **45** (1989), 285-320

[Cas] W. Casselman, Some general results in the theory of admissible representations of p-adic groups (preprint)

[CD84] L. Clozel et P. Delorme, Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs, Inventiones mathematicæ **77** (1984), 427-453

[Clo86] L. Clozel, On limit multiplicities of discrete series representations in spaces of automorphic forms, Inventiones mathematicæ **83** (1986), 265-284

[CD90] L. Clozel et P. Delorme, Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs II, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (4) **23**, (1990), 193-228

[Clo91] L. Clozel, Invariant analysis on the Schwartz space of a reductive p-adic group, in *Harmonic analysis on reductive groups*, William Barker and Paul Sally editors, Progress in mathematics **101**, Birkhäuser, 1991, 101-121

[Cor77] L. Corwin, The Plancherel measure in nilpotents groups as a limit of point measures, Mathematische Zeitschrift **155** (1977), 151-162

[DKV84] P. Deligne, D. Kazhdan, M.F. Vignéras, Représentations des algèbres simples p-adiques, in *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris, 1984

[DGW78] D.L. DeGeorge et N. Wallach, Limit formulas for multiplicities in $L^2(\Gamma\backslash G)$, Annals of Mathematics **107** (1978), 133-150

[DGW79] D.L. DeGeorge et N. Wallach, Limit formulas for multiplicities in $L^2(\Gamma\backslash G)$, II. The tempered spectrum, Annals of Mathematics **109** (1979), 477-495

[Del84] P. Delorme, Multipliers for the convolution algebra of left and right K-finite compactly supported smooth functions on a semi-simple Lie group, Inventiones Mathematicae **75** (1984), 9-23

[Del86] P. Delorme, Formules limites et formules asymptotiques pour les multiplicités dans $L^2(G/\Gamma)$, Duke Mathematic Journal **55** (1986), 691-731

[Dix64] J. Dixmier, *Les* $\mathbf{C}^\star$*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964

[DM78] J. Dixmier, P. Malliavin, Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables, Bulletin des sciences mathématiques **102**, (1978), 307-330

[DL71] M. Duflo et J.P. Labesse, Sur la formule des traces de Selberg, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (4) **4**, (1971), 193-284

[DS57] N. Dunford, J. Schwartz, Linear Operators, Part I, Interscience Publishers, Pure and applied mathematics **VII**, Wiley, New York, (1957)

[EW78] T. Enright, N. Wallach, The fundamental series of semisimple Lie algebras and semisimple Lie groups, Acta Mathematicæ **140** (1978), 1-32

[Enr79] T. Enright, On the fundamental series of a real semisimple Lie algebra : their irreducibility, resolution and multiplicity formulae, Annals of mathematics **110** (1979), 1-82

[EG92] L. Evans, R. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in advanced mathematics, CRP Press, Boca Raton, 1992

[Fel60] J. M. G. Fell, The dual space of $\mathbf{C}^*$-algebras, Transactions of the American Mathematical Society **94** (1960), 365-403

[GJ79] S. Gelbart et H. Jacquet, Forms on GL(2) from the analytic point of view, in *Automorphic forms, representations and L-Functions*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, volume **XXXIII**, Part 1 (1979), 213-251

[GGPS69] I.M. Gel'fand, M.I. Graev, I.J. Piatetskii-Shapiro, *Automorphic functions and representation theory*, W.B. Saunders Co., Philadelphia, 1969

[HC51] Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups, IV, Proceedings of the National Academy of Sciences **37** (1951), 691-694

[HC66] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups II, Acta mathematica **116** (1966), 1-111

[HC68] Harish-Chandra, *Automorphic forms on semisimple Lie groups*, Lecture Notes in Mathematics **62**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1968

[HC74] Harish-Chandra, Harmonic analysis on reductive p-adic groups, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, volume **XXVI** (1974), 167-192

[HC76] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups, III, Annals of Mathematics **104** (1976), 117-210

[HC83] Harish-Chandra, The Plancherel formula for reductive p-adic groups, in *Harish-Chandra collected papers* volume **4** (1970-1983)

[Jac71] H. Jacquet, Représentations des groupes linéaires p-adiques, in *Theory of group representations and Fourier analysis*, C.I.M.E. Edizioni Cremonese, Rome (1971), 119-220

[Kaz86] D. Kazhdan, Cuspidal geometry of p-adic groups, Journal d'analyse mathématique **47** (1986), 1-36

[Kna86] A. Knapp, *Representation theory of semisimple groups : An overview based on examples*, Princeton University Press, 1986

[KZ82] A. Knapp, G. Zuckerman, Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups, Annals of Mathematics **116** (1982), 389-501

[Lab90] J.P. Labesse, The present state of the trace formula, in *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-Functions*, Academic Press, 1990

[Lab91] J.P. Labesse, Pseudo-coefficients très cuspidaux et K-théorie, Mathematische Annalen **291** (1991), 607-616

[Lang70] S. Lang, *Algebraic number theory*, Addison-Wesley, 1970

[Lan76] R.P. Langlands, On the functional equation satisfied by Eisenstein series, Lecture Notes in Mathematics **544**, Springer-Verlag, New York, 1976

[Lan89] R.P. Langlands, On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, in *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, Mathematical Surveys and Monographs **31** (1989), 101-170

[Mia83] R.J. Miatello, Alternating sum formulas for multiplicities in $L^2(G/\Gamma)$ II., Mathematische Zeitschrift **182** (1983), 35-43

[Mit56] T. Mitsui, Generalized prime number theorem, Japan Journal of Mathematics **26** (1956), 1-42

[Mül89] W. Müller, The trace class conjecture in the theory of automorphic forms, Annals of Mathematics **130** (1989), 473-529

[OW78] M. Osborne, G. Warner, Multiplicities of the integrable discrete series : the case of a lattice in a **R**-rank one semisimple group, Journal of Functional Analysis **30** (1978), 287-310

[RS87] J. Rohlfs, B. Speh, On limit multiplicities of representations with cohomology in the cuspidal spectrum, Duke Mathematical Journal **55** (1987), 199-212

[Sat63] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques **18** (1963), 1-69

[Sav89] G. Savin, Limit multiplicities of cusp forms, Inventiones Mathematicæ **95** (1989), 149-159

[Sch81] L. Schwartz, *Cours d'analyse*, Hermann, Paris, 1981

[Ser68] J-P. Serre, Corps Locaux, Hermann, Paris, 1968

[Ser] J-P. Serre, Conférence au séminaire "Groupes réductifs et formes automorphes", Paris VII

[Sil78] A. J. Silberger, The Langlands quotient theorem for p-adic groups, Mathematische Annalen **236** (1978), 95-104

[Sil79] A. J. Silberger, *Introduction to harmonic p-adic analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1979

[SV80] B. Speh, D. A. Vogan Jr., Reducibility of generalized principal series representations, Acta mathematica **145** (1980), 227-299

[Spr79] T. A. Springer, Reductive groups, in *Automorphic forms, representations and L-Functions*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, volume **XXXIII**, Part 1 (1979), 3-27

[Tad83] M. Tadić, The topology of the dual space of a reductive group over a local field, Glasnik Mathematički **18** (1983), 259-279

[Tad84] M. Tadić, Dual spaces of Adélic groups, Glasnik Mathematički **19** (1984), 39-48

[Tad88] M. Tadić, Geometry of the dual space of reductive groups (non-archimedean case), Journal d'Analyse Mathématique **51** (1988), 139-181

[Tat67] J. Tate, Fourier analysis in number fields and Hecke's Zeta function (thesis 1950), in *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967

[Vog79] D. A. Vogan, The algebraic structure of representation of semisimple Lie Groups I, Annals of Mathematics **109** (1979), 1-60

[Vog81] D. A. Vogan, *Representations of real reductive Lie groups*, Progess in mathematics, Birkhaüser, 1981

[Wal79] N. Wallach, Representations of reductive Lie groups, in *Automorphic forms, representations and L-Functions*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, volume **XXXIII**, Part 1 (1979), 71-86

[Wal90] N. Wallach, Limit multiplicities in $L^2(G/\Gamma)$, in *Cohomology of arithmetic groups and automorphic forms*, J.P. Labesse et J. Schwermer Editeurs, Lecture Notes in Mathematics **1447**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1990

[War72] G. Warner, Harmonic analysis on semisimple Lie groups I, II, Springer-Verlag, New York, 1972

[Wei65] A.Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1965

[Wei74] A. Weil, *Basic number theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **144**, Springer-Verlag, New York, 1974

[Zel80] A. V. Zelevinsky, Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups II. On irreducible representations of $\mathrm{GL}(n)$, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, (4) **13**, (1980), 165-210

Table des matières