1 Présentation du moulin

Il s'agit d'une roue tournant autour d'un axe. Sur l'extérieur de la roue sont fixées des tiges et sur les tiges sont accrochés des récipients. Ces récipients sont ouverts en haut et ont une petite fuite en bas.

L'axe est accroché à une poterne qui permet aussi d'amener un tuyau raccordé à une arrivée d'eau. Enfin le tout est posé sur un bac permettant de recueillir l'eau qui déborde.

Quand on ouvre le robinet, le récipient du haut se remplit (tout en se vidant par la fuite). La roue se met alors en mouvement, de sorte que c'est bientôt un autre récipient qui se remplit et ainsi de suite. Si les débits sont bien ajustés les récipients ne se remplissent jamais complètement (ils ne débordent pas non plus).

Des gouttières assurent que les récipients ne se remplissent que lorsqu'ils passent sous l'arrivée d'eau.

Le moulin peut avoir deux types de comportement :

1. Comportement harmonique : il tourne toujours dans le même sens et finit par avoir une vitesse essentiellement constante.
2. Comportement chaotique : il tourne tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. Il est impossible de prédire son comportement à court terme. Néanmoins son comportement général, sur le long terme, est prédictible.

2 Modélisation mathématique

2.1 Modélisation statique

Nous commençons pas décrire les objets de façon statique. Le système considéré est formé de la roue, des tiges et récipients, et de l'eau contenue dans les récipients.

La roue est assimilée à un cercle de rayon R. Ce cercle est dans un plan vertical rapporté à un repère (zOx) avec (Ox) horizontal orienté vers la gauche et (Oz) vertical orienté vers le haut. L'axe de la roue est (Oy) orienté vers l'avant.

Nous munissons le plan (zOx) de coordonnées polaires de sorte que $\theta = 0$ corresponde à la demi-droite (Oz). Le sens positif est le sens trigonométrique. Et nous complétons ce système de coordonnées par la donnée de y, ce que l'on appelle système de coordonnées cylindriques : (r, θ, y), avec $z = r\cos(\theta)$ et $x = r\sin(\theta)$.

Les tiges, au nombre de n, sont fixées sur le bord, initialement en des points de coordonnées polaires

$$\text{Tiges} \qquad (R_i, \theta_{i,0})_{1\leq i\leq n} \; .$$

Y sont attachés des récipients. Pour simplifier nous supposons que le récipient est suffisamment léger pour que l'on puisse considérer que le centre de gravité du système (tige+récipient) soit situé sur la tige, à une distance y_i de la roue. D'un point de vue mécanique le système (tige+récipient) se comporte donc comme une masse pesante, notée M_i, concentrée au point $(R_i, \theta_{i,0}, y_i)$.

$$\text{Tiges et récipients} \qquad (R_i, \theta_{i,0}, y_i; M_i)_{1\leq i\leq n} \ .$$

Pour simplifier nous supposons que R_i est constant égal à R, que M_i est constant égal à M et que y_i est constant égal à y, avec y petit par rapport à R.

Enfin si un récipient est rempli d'une certaine quantité d'eau, on peut la mesurer par un volume, une masse ou une hauteur. La masse volumique de l'eau étant une constante, notée[1] ρ, le volume v_i et la masse m_i sont réliés par l'équation $m_i = \rho.v_i$. Le lien avec la hauteur h_i dépend de la forme du récipient. Nous mesurons la hauteur par rapport au fond du récipient et supposons que les fuites se font par le fond.

Initialement les récipients sont vides : v_i, m_i et h_i sont tous nuls.

2.2 Modélisation dynamique et discrétisation

Le débit de l'eau est supposé contant au cours du temps. Nous le notons Q (il est exprimé en ℓ/s). On peut aussi mesurer la masse d'eau délivrée par le tuyau par unité de temps[2] : $\mu = \rho.Q$ (en kg/s).

Les variables au cours du temps sont les positions des tiges et les masses d'eau contenues dans les récipients : $(m_i, \theta_i)_{1\leq i\leq n}$. Ce sont des fonctions du temps t : $(m_i(t), \theta_i(t))_{1\leq i\leq n}$, et la valeur initiale est donnée par $t = 0$, qui correspond au début de l'expérience.

$$\text{Tiges, récipients et eau} \qquad (R, \theta_i, y; M; m_i)_{1\leq i\leq n} \quad \text{avec} \quad (\theta_i(0) = \theta_{i,0}; m_i(0) = 0)_{1\leq i\leq n} \ .$$

Pour la simulation, il suffit donc de pouvoir calculer ces quantités à tout instant. Nous prendrons un intervalle de temps fixé Δt et notons $m_{i,k}$, $\theta_{i,k}$ les valeurs de m_i et θ_i à l'instant $k.\Delta t$:

$$m_{i,k} = m_i(k.\Delta t) \qquad \text{et} \qquad \theta_{i,k} = \theta_i(k.\Delta t) \ .$$

Les équations de la mécanique faisant apparaître des vitesses et des accélérations, nous notons également $\omega_{i,k}$ la vitesse angulaire de la tige i à l'instant $k.\Delta t$. Autrement dit

$$\omega_i = \theta_i' = \frac{d\theta_i}{dt} \qquad \text{et} \qquad \omega_{i,k} = \omega_i(k.\Delta t).$$

Nous allons approcher les vraies valeurs en calculant ces quantités pour k entier, en approchant l'accroissement de chaque variable entre $k.\Delta t$ et $(k+1)\Delta t$ par Δt multiplié par la dérivée de cette variable.

[1] ρ est la lettre grecque « rho »
[2] μ est la lettre grecque « mu »

3 Modélisation physique

3.1 Modélisation du mouvement de la roue

Cas d'une seule masse – Prenons une masse pesante m astreinte à tourner autour d'un axe, à une distance constante r de celui-ci et soumise à la seule gravité.

Les forces s'exerçant sur la masse sont le poids et d'autres forces qui la contraignent à rester sur un cercle. Les forces qui ne sont pas dans la direction du mouvement se compensent donc. Par conséquent nous ne nous intéressons qu'à la partie de l'équation de Newton qui est « parallèle au cercle », c'est-à-dire tangente au cercle.

Le poids – Si la masse est situé au point (r, θ), ses coordonnées cartésiennes sont $(z = r\cos(\theta), x = r\sin(\theta)$, de sorte que la direction du rayon joignant ce point à l'axe est donnée par le vecteur $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, ou encore $(1, \theta)$ en coordonnées polaires.

La tangente au cercle est perpendiculaire à ce rayon et elle est donc tournée d'un angle droit par rapport à la direction précédente. Un vecteur unitaire de la tangente au cercle est donc $(1, \theta + \pi/2)$. Le poids est, quant à lui, dirigé vers le bas, dans la direction du vecteur $(1, \pi)$. L'angle entre le poids et la tangente au cercle est donc $\pi - (\theta + \pi/2)$, soit $\pi/2 - \theta$.

Le poids est donc la somme d'une force d'amplitude $mg\cos(\pi/2 - \theta)$, parallèle au cercle, et d'une autre d'amplitude $mg\sin(\pi/2 - \theta)$, perpendiculaire au cercle.

Comme $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$ et $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$, la composante du poids parallèlement au cercle est : $mg\sin(\theta)$.

La vitesse – Il nous faut maintenant exprimer l'accélération de la masse pesante en la décomposant de la même façon.

Tout d'abord, le mouvement se faisant sur le cercle, la tangente au mouvement est la tangente au cercle, donc dans la direction $(1, \theta + \pi/2)$. En notant ω l'amplitude de la vitesse angulaire, la vitesse angulaire du point est donc donnée par le vecteur[3] $(\omega, \theta + \pi/2)$. Autrement dit la vitesse de la masse est donnée par[4] $(r\omega, \theta + \pi/2)$.

Autrement dit : quand on dérive en coordonnées polaires, on multiplie l'amplitude par ω et on tourne d'un angle droit.

L'accélération – Venons-en à l'accélération. On s'intéresse donc à $r\omega$ fois le vecteur $(1, \theta + \pi/2)$. Comme c'est un produit, on obtient sa dérivée en faisant la somme de chaque terme du produit dérivé séparément et multiplié par l'autre terme.

[3]Attention ! Ce ne sont pas tout à fait des coordonnées polaires puisque ω n'est pas nécessairement positif et il est donc nécessaire de réinterpréter la formule.

[4]Si la vitesse angulaire est constante, un point situé deux fois plus loin va deux fois plus vite, c'est en quelque sorte le théorème de Thalès.

Comme r est constant la dérivée de $r\omega$ est tout simplement $r\omega'$. La première contribution à l'accélération est donc $(r\omega', \theta + \pi/2)$. Elle est parallèle au cercle.

Quant à la seconde, la dérivée de $(1, \theta+\pi/2)$ est $(\omega, \theta+\pi)$: on multiplie par ω et on tourne d'un angle droit ; par suite la seconde contribution à l'accélération est $(r\omega^2, \theta+\pi)$. C'est-à-dire un vecteur parallèle (de sens opposé) au rayon, et donc perpendiculaire au cercle.

Dérivées – Si on n'est pas convaincu par ces raisonnements géométriques (tout à fait rigoureux néanmoins), on peut revenir aux coordonnées cartésiennes. La formule pour la vitesse, $(r\omega, \theta + \pi/2)$, peut se récrire

$$(-r\omega \sin(\theta), r\omega \cos(\theta))$$

puisque $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin(\theta)$ et $\sin(\theta + \pi/2) = \cos(\theta)$.

On aurait pu deviner cette formule. La masse se situe en le point (r, θ), ou encore $z = r\cos(\theta), x = r\sin(\theta))$. La vitesse du point est obtenue en dérivant cette expression par rapport au temps. Comme r ne varie par, il faut donc savoir dériver θ et les fonctions trigonométriques. La dérivée de $\cos$ est $-\sin$, celle de $\sin$ est $\cos$. De plus la dérivée d'une fonction composée, comme $t \mapsto \cos(\theta(t))$, est obtenue ainsi. Pour h petit, on écrit :

$$\frac{\cos(\theta(t+h)) - \cos(\theta(t))}{h} = \frac{\cos(\theta(t+h)) - \cos(\theta(t))}{\theta(t+h) - \theta(t)} \frac{\theta(t+h) - \theta(t)}{h}$$

et le premier rapport est approximativement donné par

$$\frac{\cos(\theta(t+h)) - \cos(\theta(t))}{\theta(t+h) - \theta(t)} \simeq \cos'(\theta(t)) = -\sin(\theta(t))$$

et le second par

$$\frac{\theta(t+h) - \theta(t)}{h} \simeq \theta'(t) = \omega(t)$$

et on conclut

$$(\cos(\theta))' = -\omega.\sin(\theta)\ .$$

On fait de même avec le sinus :

$$(\sin(\theta))' = \omega.\cos(\theta)\ .$$

Pour l'accélération, il faut dériver une expression comme $r\omega\cos(\theta)$. Nous avons donc affaire à un produit de deux fonctions (r est toujours constant). Sa dérivée est donc

$$r\omega' \cos(\theta) + r\omega\,(\cos(\theta))'$$

et nous venons de calculer le second terme. La dérivée est donc

$$r\omega' \cos(\theta) - r\omega^2 \sin(\theta)\ .$$

La dérivée de $-r\omega\sin(\theta)$ est, quant à elle,

$$-r\omega'\sin(\theta) - r\omega\left(\sin(\theta)\right)'$$

ou encore

$$-r\omega'\sin(\theta) - r\omega^2\cos(\theta)\ .$$

L'accélération est donc la somme du vecteur $(r\omega', \theta + \pi/2)$ et du vecteur $(-r\omega^2, \theta)$, ou plutôt $(r\omega^2, \theta + \pi)$.

Équation du mouvement de la roue – Le premier vecteur est parallèle à la tangente au cercle, et le second lui est perperdiculaire. La composante parallèle de l'accélération est donc d'amplitude $r\omega'$. Et l'équation fondamentale de la dynamique nous donne :

$$mr\omega' = mg\sin(\theta)\ .$$

En physique, la quantité mr^2 s'appelle le moment d'inertie de la masse par rapport à l'axe, tandis que $mgr\sin(\theta)$ représente le couple qu'elle exerce sur cette axe.

Cas de plusieurs masses – Prenons maintenant plusieurs masses ! Même si les quantités θ_i différent, les ω_i sont, elles, toutes égales puisque la roue entraîne toutes les tiges en même temps. Et donc les ω' aussi. L'accélération du système peut donc se résumer à l'accélération angulaire de la roue : ω'. Le moment d'inertie du système est obtenu comme somme des moments d'inertie de ses parties.

On a une première contribution à ce moment par la roue, les tiges et les récipients. Nous le noterons I_0. Puis viennent les moments d'inertie qui proviennent des masses d'eau. Chacune contribue par m_i multiplié par le carré de sa distance à l'axe, que l'on a supposé[5] égale à R. On a donc

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^{n} I_i = I_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i R^2\ .$$

Le couple est aussi la somme des couples donnés par chacune des parties, tout comme la force exercée sur le système est la somme des forces exercées sur les parties. Nous supposons que la roue à vide est statique, il n'y a donc pas de terme C_0 contrairement au terme I_0. Les masses d'eau, quant à elles, contribuent chacune par $C_i = m_i g R\sin(\theta_i)$:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{n} m_i g R\sin(\theta_i)\ .$$

L'équation du mouvement de la roue est donc

$$I\omega' = \left(I_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i R^2\right)\omega' = C = \sum_{i=1}^{n} m_i g R\sin(\theta_i)\ .$$

[5] Comme y est petit devant R, la quantité $R^2 + y^2$ est sensiblement égale à R^2.

Ajout des forces de friction – En fait, en général, il y a un frottement sur l'axe. Ce frottement s'oppose au mouvement d'autant plus que la vitesse angulaire est importante. On le modélise en général par une force proportionnelle, mais opposée, à la vitesse angulaire. Nous écrirons donc

$$I\omega' = C - f\omega$$

ou encore

$$\boxed{\left(I_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i R^2\right)\omega' = -f\omega + \sum_{i=1}^{n} m_i g R \sin(\theta_i)\ .}$$

3.2 Modélisation des masses d'eau - loi de Torricelli

Prenons un récipient avec de l'eau dedans, jusqu'à une hauteur h. La donnée de cette hauteur est équivalente à celle de la masse m ou du volume d'eau v.

Si l'on regarde un court instant le récipient, le volume d'eau baisse de sorte qu'on a trois parties : une partie qui a disparu (en haut), une partie qui a été remplacée par une quantité d'eau équivalente (du bas de la partie précédente jusqu'au fond) et une partie qui est sortie du récipient.

Si l'on considère l'énergie potentielle[6] de la masse d'eau, elle ne varie pas pour la seconde partie. Il y a donc une perte d'énergie potentielle égale à $m_f g h$ où m_f est la masse d'eau qui a fui, comme si cette masse était passée subitement du haut du récipient au bas du récipient (cette différence de hauteur étant égale à h).

Notons s la section de la fuite, c'est-à-dire la surface en m^2 (perpendiculaire à la direction d'écoulement de l'eau) du trou (ou plutôt du tuyau) qui sort du récipient. Si l'eau s'écoule avec la vitesse V_f (en m/s), alors le volume qui sort du récipient par unité de temps est sV_f (en m^3). Son poids est donc $m_f = \rho.sV_f$ et l'énergie cinétique[7] de l'eau sortant par la fuite est $1/2.\rho.sV_f^3$.

Si la surface libre (là où l'eau affleure, en haut du récipient) est de section S, on peut calculer sa vitesse V_h. En effet ce qui sort du récipient est exactement ce qui fait baisser la hauteur d'eau : le volume d'eau du récipient est diminué de SV_h, mais aussi de sV_f et donc $V_h = V_f.s/S$.

Nous supposons que la section de fuite s est petite devant toutes les sections S du récipient. Dans ce cas V_h est toujours négligeable devant V_f. Par conséquent le système gagne de l'énergie cinétique. En effet la différence d'énergie cinétique du système est donnée par la différence entre au niveau de la fuite et en haut, toujours comme si une masse d'eau était passée subitement du haut du récipient au bas du récipient, soit

$$\frac{1}{2}\rho s V_f^3 - \frac{1}{2}\rho S V_f^3 \simeq \frac{1}{2}\rho s V_f^3 = \frac{1}{2} m_f V_f^2\ .$$

[6] L'énergie potentielle d'une masse pesante est donnée par son altitude z et vaut : mgz.

[7] L'énergie cinétique d'une masse pesante est donnée par sa vitesse v et est égale à : $1/2mv^2$

Or la perte d'énergie potentielle est compensée par le gain d'énergie cinétique puisqu'il y a conservation de l'énergie globale, soit :

$$m_f gh = \frac{1}{2} m_f V_f^2$$

ou encore

$$V_f^2 = 2gh \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad V_f = \sqrt{2gh}\ .$$

Nous en déduisons que les masses d'eau fuyant par le trou au fond du récipient sont données par

$$\boxed{\text{Loi de Torricelli : } m_f = \rho s \sqrt{2gh}\ .}$$

4 Modélisation numérique

4.1 Modélisation du récipient

Si le récipient est un cylindre, c'est-à-dire un volume dont toutes les sections horizontales sont les mêmes (dans le langage courant, on réserve cette appellation au cas où la section est un disque), chaque section ayant une surface S fixe, alors la masse d'eau totale contenue dans le récipient est proportionnelle à la hauteur :

$$m = \rho S h$$

et donc

$$m_f = \rho s \sqrt{\frac{2gm}{\rho S}} = \frac{s}{\sqrt{S}} \sqrt{2g\rho m}\ .$$

La fuite d'eau, en masse ou en volume, est proportionnelle à la racine carrée de la masse ou au volume d'eau présent dans le récipient.

Si le récipient se déforme suivant une dimension comme par exemple pour deux plaques raccordées en V, alors son volume est obtenu en mulipliant la dimension constante des plaques par la surface du triangle vertical. Ces triangles sont semblables les uns aux autres dans un rapport donné par la hauteur. Autrement dit leurs surfaces sont proportionnelles à h^2 et il en est donc de même pour le volume du récipient :

$$m = \rho \ell h^2$$

et donc

$$m_f = \rho s \sqrt{2g\sqrt{\frac{m}{\rho \ell}}} = a\sqrt[4]{m}\ .$$

La fuite d'eau, en masse ou en volume, est proportionnelle à la racine quatrième de la masse ou au volume d'eau présent dans le récipient.

Si maintenant le récipient est un cône, alors la masse d'eau totale contenue dans le récipient est proportionnelle à la hauteur au cube :

$$m = \rho c h^3$$

et donc

$$m_f = \rho s \sqrt{2g \sqrt[3]{\frac{m}{\rho c}}} = a.\sqrt[6]{m}\ .$$

La fuite d'eau, en masse ou en volume, est proportionnelle à la racine sixième de la masse ou au volume d'eau présent dans le récipient.

4.2 Équations numériques

La résolution numérique s'intéresse aux variables

$$(m_{i,k}, \theta_{i,k}, \omega_{i,k})_{1 \leq i \leq n}$$

pour k entier naturel.

La valeur initiale correspond à $t = 0$ et donc

$$m_{i,0} = 0\,, \qquad \omega_{i,0} = 0 \qquad\qquad 1 \leq i \leq n\ .$$

On calcule alors

$$C_k = \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} g \sin(\theta_{i,k})$$

et

$$I_k = \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} R^2$$

afin d'écrire

$$\omega_{i,k+1} = \omega_{i,k} + \frac{C_k - f\omega_{i,k}}{I_k} \Delta t$$

ainsi que

$$\theta_{i,k+1} = \theta_{i,k} + \omega_{i,k+1}.\Delta t\ .$$

Un récipient reçoit de l'eau lorsque celui-ci est sous le robinet, ce qui correspond à une valeur de θ_i comprise entre deux valeurs seuil : α et β.

Les masses évoluent donc ainsi (la racine carrée peut être quatrième ou sixième) :

$$m_{i,k+1} = m_{i,k} + \mu.\Delta t - a.\Delta t.\sqrt{m_{i,k}}$$

si $\theta_{i,k}$ est compris entre α et β, et

$$m_{i,k+1} = m_{i,k} - a.\Delta t.\sqrt{m_{i,k}}$$

sinon.

Il faut rajouter que $m_{i,k}$ ne peut dépasser une certaine valeur limite (sinon l'eau déborde !).

4.3 Modélisation sur tableur

Chaque ligne correspond à un k. On écrit la première ligne avec les valeurs initiales, en gardant quelques colonnes pour les calculs intermédiaires, afin que les formules soient lisibles.

Ensuite, sur la seconde ligne, on écrit les formules pour passer d'une valeur de k à la suivante. Et on recopie cette ligne sur suffisamment de colonnes.

Pour faire un film, le mieux est de prendre 25 images par seconde et donc de prendre $\Delta t = 0,04$. Si on veut un film de 2 minutes, alors k varie entre 0 et $25 * 60 * 2 = 3000$.

On met alors dans le tableur, successivement :

1. k : initialisé à 0 et incrémenté de 1 à chaque fois ;
2. Δt : constant égal à 0,04 ;
3. f : constant – valeur à expérimenter ;
4. μ : constant – valeur à expérimenter ;
5. a : constant – valeur à expérimenter ;
6. R : constant, égal au rayon de la roue en mètres ;
7. g : constant, égal à $9,80665$;
8. α et β : a priori $-\pi/n$ et π/n ;
9. θ_1 : initialisé puis calculé à partir de lui-même et ω pris sur la même ligne – valeur initiale à expérimenter ;
10. Autres θ_i : calculés par rapport à θ_1 sur la même ligne ;
11. Tous les m_i : initialisé à 0 puis calculés en fonction d'eux mêmes et de valeurs de seuil (valeur minimale nulle, valeur maximale en fonction du récipient, incrémentation si θ_i est entre α et β) ;
12. Éventuellement des colonnes avec les calculs intermédiaires (calcul brut sans seuil, puis en tenant compte du seuil) ;
13. I : calculé en fonction des m_i sur la même ligne ;
14. Tous les C_i : calculés en focntion des m_i et des θ_i sur la même ligne ;
15. C : la somme des C_i ;
16. $(C - f\omega)\Delta t/I$: calculé à partir des valeurs sur la même ligne ;
17. ω initialisé à 0, puis calculé à partir de lui-même et de la valeur de $(C - f\omega)\Delta t/I$ pris **sur la ligne précédente** ;