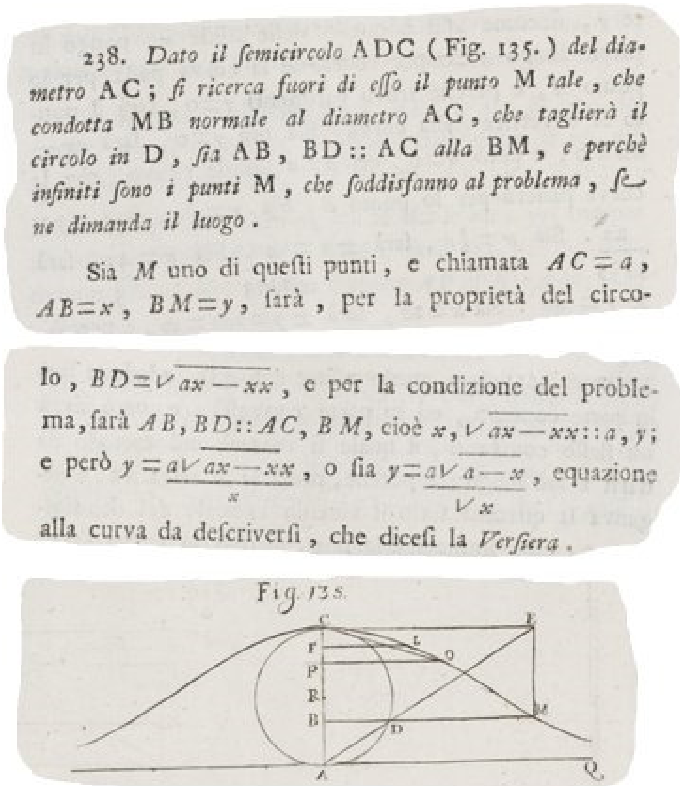
Une sorcière, trois parapluies, un poisson

Le 4 avril 2010, par Michel Coste
Professeur à l' Institut de Recherche Mathématique de Rennes. Université de Rennes I
(page web)

À l'aide des coordonnées cartésiennes, on peut décrire des objets géométriques par des équations. Par exemple, dans le plan, l'équation $y = 2x - 3$ décrit une droite ; l'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ décrit le cercle de centre le point de coordonnées (a, b) et de rayon r. Dans l'espace, avec cette fois-ci trois coordonnées, l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ décrit la sphère de centre l'origine et de rayon 1. L'équation $z^2 = x^2 + y^2$ décrit une autre surface, un cône de révolution. Nous allons rencontrer dans la suite des surfaces, toujours décrites par une équation dans l'espace, qui ont la particularité d'être munies d'un manche, telles des parapluies.

La sorcière et son parapluie [1]

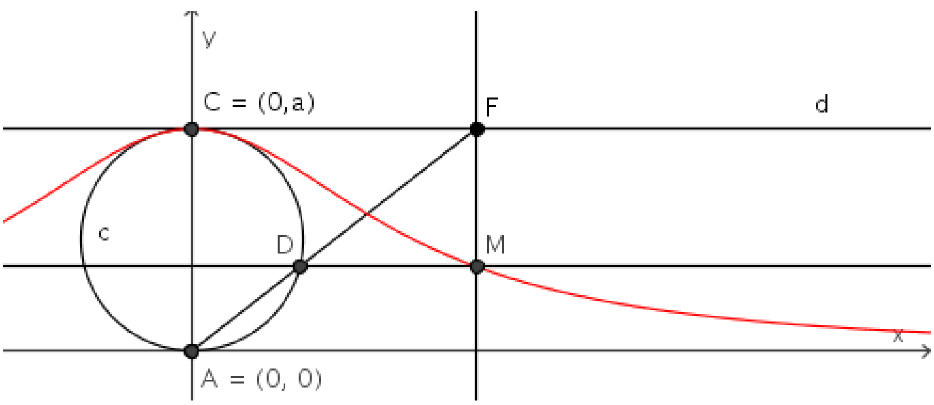
DANS le catalogue des courbes célèbres, on trouve la « sorcière d'Agnesi ». Cette courbe a été étudiée par la mathématicienne italienne Maria Gaetana Agnesi (qui n'avait rien d'une sorcière !) dans son traité *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* paru en 1748. Vous pouvez voir ci-contre un extrait de ce traité où la courbe (appelée « Versiera » par Agnesi) est introduite :


238. *Dato il semicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC; *si ricerca fuori di esso il punto* M *tale, che condotta* MB *normale al diametro* AC, *che taglierà il circolo in* D, *sia* AB, BD :: AC *alla* BM, *e perchè infiniti sono i punti* M, *che soddisfanno al problema, se ne dimanda il luogo.*

Sia M uno di questi punti, e chiamata $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, sarà, per la proprietà del circolo, $BD = \sqrt{ax - xx}$, e per la condizione del problema, sarà $AB, BD :: AC, BM$, cioè $x, \sqrt{ax - xx} :: a, y$; e però $y = \frac{a\sqrt{ax - xx}}{x}$, o sia $y = \frac{a\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$, equazione alla curva da descriversi, che dicesi la *Versiera*.

L'ouvrage d'Agnesi a connu un grand succès, et c'est en fait à l'erreur d'un traducteur anglais qu'on doit le nom de « sorcière » attaché à cette courbe.

Reprenons la construction décrite par Agnesi en gardant ses notations, sauf que nous noterons x l'abscisse et y l'ordonnée. On part du cercle c de diamètre AC, où $A = (0,0)$ est l'origine et $C = (0,a)$ est sur l'axe des y. Soit d la droite horizontale, tangente au cercle c en C. Traçons une droite passant par A ; cette droite coupe la droite d en un point F et recoupe le cercle c en un point D. Soit M le point qui a même abscisse que F et même ordonnée que D. Quand on fait tourner la droite autour de A, le point M parcourt une courbe, en rouge sur le dessin ci-dessous : c'est la sorcière d'Agnesi.



Trouvons maintenant l'équation de la sorcière d'Agnesi. Pour commencer, il est facile de trouver l'équation du cercle c qui a pour centre $(0, a/2)$ et pour rayon $a/2$; c'est :

$$x^2 + y^2 - ay = 0 \,.$$

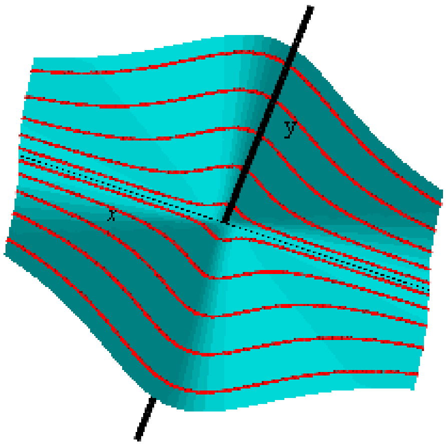
Prenons un point $M = (x, y)$ sur la sorcière d'Agnesi. Alors F a pour coordonnées (x, a). Le point D est l'image de F par l'homothétie de centre l'origine A et de rapport $\frac{y}{a}$; ses coordonnées sont donc $\left(\frac{xy}{a}, y\right)$. On écrit que D satisfait l'équation du cercle c, ce qui donne $\frac{x^2y^2}{a^2} + y^2 - ay = 0$, ou encore $\frac{y}{a^2}\left((x^2 + a^2)\, y - a^3\right) = 0$. Comme on a $y \neq 0$, on trouve comme équation de la sorcière d'Agnesi :

$$(x^2 + a^2)\, y = a^3 \,.$$

Cette courbe à l'allure si sage semble ne rien avoir de bien sorcier. Elle a cependant un petit tour de sorcellerie dans son sac, que nous allons découvrir maintenant. On peut faire varier la longueur a. Remplaçons a par une nouvelle coordonnée z de sorte que l'on obtient ainsi l'équation d'une surface dans l'espace rapporté aux coordonnées x, y, z :

$$(x^2 + z^2)\, y = z^3 \,.$$

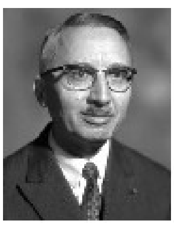
Si on coupe cette surface par le plan $z = a$, on retrouve notre sorcière d'Agnesi. Quand a approche de 0, la sorcière s'aplatit sur l'axe des x. Mais, surprise ! Quand on prend la tranche de la surface correspondant à $z = 0$, on trouve l'équation $x^2\, y = 0$ qui est bien satisfaite par tous les points de coordonnées $(x, 0, 0)$ formant l'axe des x, mais aussi par tous les points $(0, y, 0)$ de l'axe des y. Le dessin de la surface dans l'espace comprend une droite incongrue, l'axe des y, venue semble-t-il de nulle part. Et pourtant, elle fait bien partie de la surface !



Notre surface se retrouve ainsi comme un parapluie — le parapluie de la sorcière — un peu chahuté par le vent, fixé à un manche (l'axe des y). Pas moyen, du point de vue des équations, d'avoir la toile du parapluie sans son manche ! Essayons de préciser un peu cette affirmation. Considérons pour cela une équation voisine de celle du parapluie de la sorcière :

$$(x^2 + z^2)\, y = 0 \,.$$

Les points qui vérifient cette équation sont soit les points du plan $y = 0$ soit les points $(0, y, 0)$ de l'axe des y (ceux qui vérifient $x^2 + z^2 = 0$). On a aussi un parapluie (passablement plat, celui-ci), formé d'un plan et d'une droite perpendiculaire au plan. Mais ici le manche est détachable : on peut démonter le parapluie en sa toile d'équation $y = 0$ et son manche d'équation $x^2 + z^2 = 0$. Par contre on peut montrer que toute équation algébrique vérifiée par les points de la toile du parapluie de la sorcière est aussi vérifiée par les points du manche.




Henri Cartan (à gauche) et Hassler Whitney (à droite), sans leurs parapluies

Le parapluie de la sorcière est parfois appelé « parapluie de Cartan ». Il est donné comme exemple de phénomènes un peu bizarres distinguant la géométrie analytique réelle de sa cousine complexe dans un article de Henri Cartan publié en 1957 [2] mais aussi dans un article de Hassler Whitney publié la même année [3] .

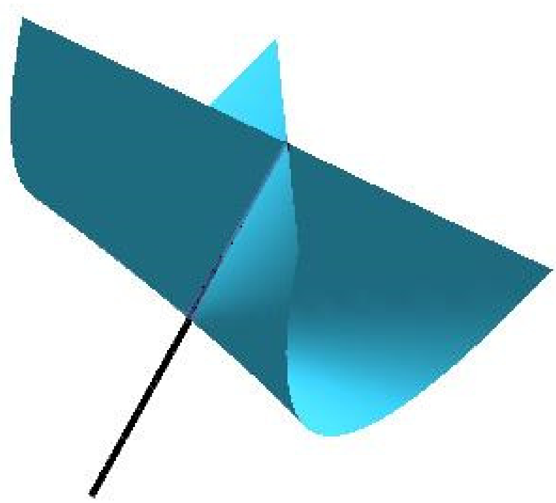
Un parapluie pincé

Le deuxième parapluie de notre histoire appartient justement à Hassler Whitney. Il est déjà apparu dans un précédent objet du mois intitulé ***Le pli et la fronce***, où il était décrit comme l'image d'une fonction du plan $\mathbb{R}^2$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ qui envoie le point (t, u) du plan sur le point de l'espace de coordonnées $x = t$, $y = tu$, $z = u^2$.

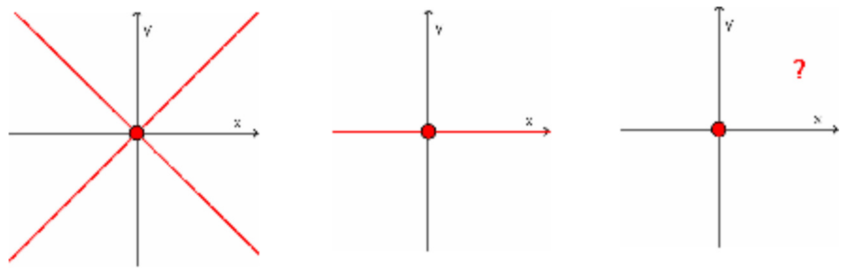
Cherchons à décrire cet objet par une équation ; on remarque que $y^2 = t^2u^2$ est égal à x^2z, ce qui nous donne l'équation

$$x^2z = y^2 .$$

De nouveau, un phénomène bizarre se produit : il y a des points de l'espace qui satisfont cette équation et qui ne proviennent pas de points du plan ! La surface se retrouve affublée d'un manche. Cette fois-ci, le parapluie a été tellement chahuté par le vent qu'il est pincé le long de la moitié du manche, qui est l'axe des z. Il reste toujours une demi-droite qui pointe en dehors de la toile. Le manche du parapluie de Whitney n'est pas plus détachable que celui de son collègue Cartan.



Analysons le phénomène de plus près, en coupant la surface d'équation $x^2z = y^2$ par des plans $z = a$. Si a est un nombre positif, l'équation $y^2 = a\,x^2$ décrit la réunion de deux droites se coupant en l'origine : les droites $y = \sqrt{a}\,x$ et $y = -\sqrt{a}\,x$. Si $a = 0$ les deux droites se confondent en une seule, $y = 0$. Et si a est négatif, alors les deux droites disparaissent en ne laissant comme trace que leur point d'intersection, l'origine $x = y = 0$, tel le chat du Cheshire dans *Alice au pays des merveilles* qui disparaissait en ne laissant que son sourire. Vous avez sans doute déjà vu des droites sans point d'intersection ; ici, vous voyez un point d'intersection sans droites.



Coupes du parapluie pour z égal à 1, 0 et -1

Où sont passées les droites ? Si vous avez déjà rencontré les nombres complexes (par exemple dans **les chapitres 5 et 6 du film *Dimensions***), vous pouvez deviner la réponse : elles sont devenues imaginaires ! Par exemple, si on coupe à $z = -1$, on obtient l'équation $y^2 = -x^2$ qui décrit la réunion des deux droites de pentes imaginaires i (vérifiant $i^2 = -1$) et $-i$: $y = ix$ et $y = -ix$.

Un poisson dans un parapluie

Le troisième parapluie présenté ici est ce qu'on appelle un **discriminant**. Beaucoup connaissent le discriminant d'un polynôme du second degré at^2+bt+c : c'est b^2-4ac. Le discriminant s'annule précisément quand le polynôme a une racine double. Le polynôme a deux racines réelles quand le discriminant est positif et aucune quand le discriminant est négatif. On peut « normaliser » notre polynôme du second degré pour obtenir simplement un polynôme de la forme t^2+c : on se ramène à $a=1$ en divisant par le coefficient de t^2 puis on « complète le carré » pour obtenir $(t+b/2)^2+c-b^2/4$; on prend $t+b/2$ comme nouvelle indéterminée, et on rebaptise c le terme constant $c-b^2/4$. Le discriminant du polynôme normalisé du second degré t^2+c est alors réduit à sa plus simple expression : $-4c$.

Le discriminant du polynôme du troisième degré est moins connu. On peut comme ci-dessus normaliser le polynôme en se ramenant d'abord à avoir 1 comme coefficient de t^3, puis en « complétant le cube » ainsi :

$$t^3+at^2+bt+c=(t+a/3)^3+\text{un polynôme du premier degré},$$

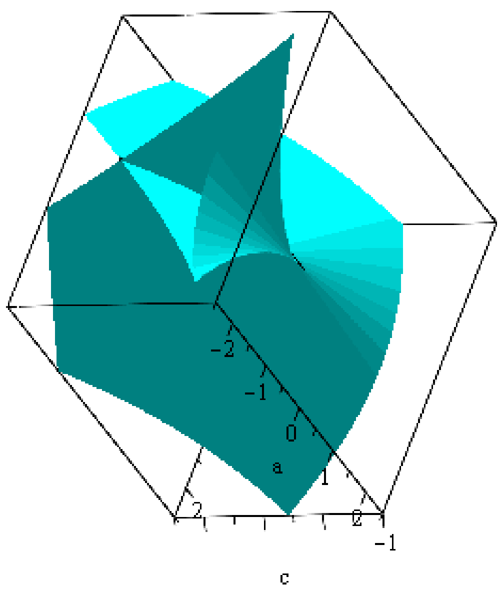
et enfin en prenant $t+a/3$ comme nouvelle indéterminée. On se ramène de cette façon à un polynôme de la forme t^3+bt+c. Le discriminant de ce polynôme est $-4b^3-27c^2$. Il s'annule si et seulement si le polynôme a une racine double. Quand le discriminant est positif, le polynôme a trois racines réelles et il n'en a plus qu'une quand le discriminant est négatif.

Quant au discriminant du polynôme du quatrième degré t^4+at^2+bt+c (on laisse la lectrice deviner comment se débarrasser du terme en t^3), sans doute personne ne pourrait le réciter par cœur :

$$\Delta=-4a^3b^2-27b^4+16a^4c-128a^2c^2+144acb^2+256c^3 .$$

De nouveau, le discriminant s'annule quand le polynôme a une racine double. Pour ce qui est du nombre de racines réelles, c'est un petit peu plus compliqué que précédemment : si le discriminant est positif, le polynôme a quatre racines réelles, ou pas du tout ; si le discriminant est négatif, le polynôme a deux racines réelles.

Dessinons maintenant la surface d'équation $\Delta=0$ dans l'espace des coefficients (a,b,c). Voici ce qu'on obtient :

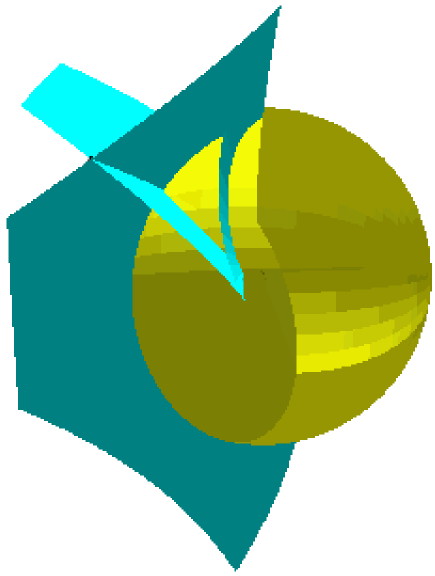


On constate sur le dessin que ce parapluie a été sérieusement endommagé. La toile du parapluie présente des coins, et est pincée le long de la moitié du manche tordu dont l'autre moitié pointe hors de la toile. On devine sur le dessin que le parapluie est symétrique par rapport au plan $b=0$, et ceci est confirmé par le fait que Δ ne contient que des puissances paires de b, et est donc inchangé quand on remplace b par $-b$. Le manche est situé dans ce plan de symétrie et on peut l'identifier en faisant $b=0$ dans Δ et en factorisant ; on obtient

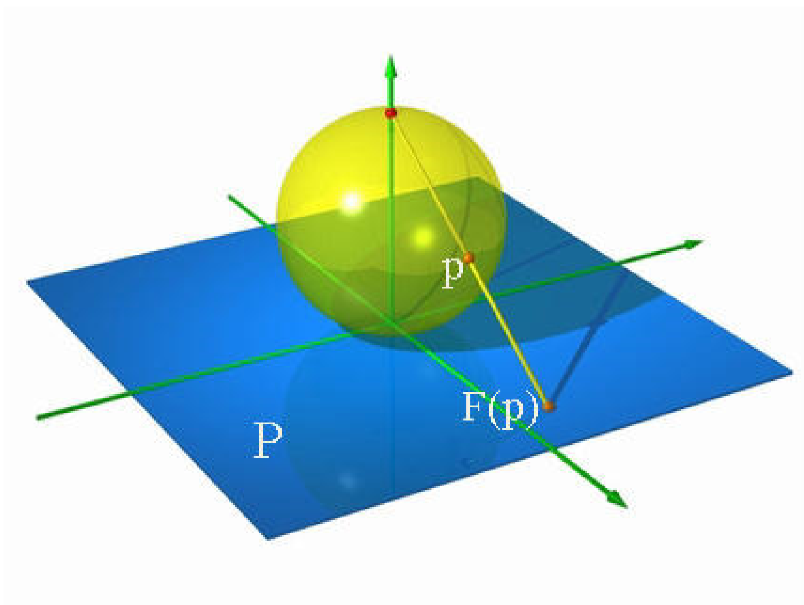
$$16\,c\,(-4\,c + a^2)^2\,.$$

Le manche courbe de ce parapluie est donc la parabole $c = a^2/4$ dans le plan $b = 0$.

Et où donc est le poisson promis dans le titre ? Il apparaît quand on coupe le parapluie par une sphère centrée en l'origine.

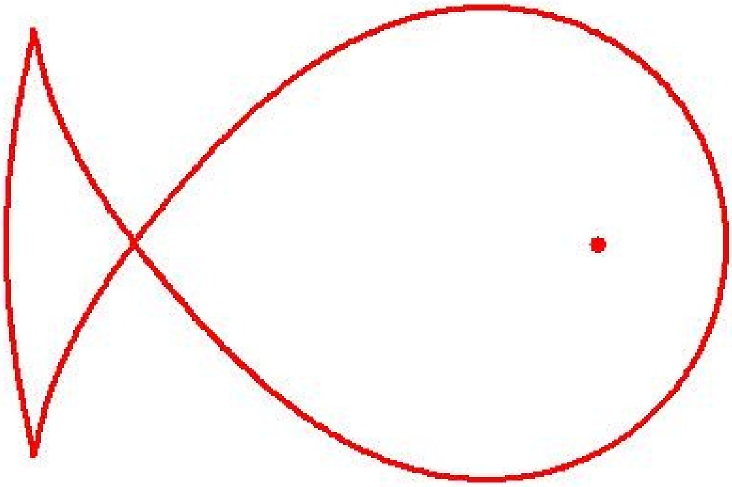


Pour donner une image plate de l'intersection du parapluie avec une sphère, nous allons utiliser la projection stéréographique de la sphère sur le plan. Voici un dessin qui explique comment cette projection depuis le pôle nord de la sphère envoie un point p de celle ci sur le point $F(p)$ du plan.



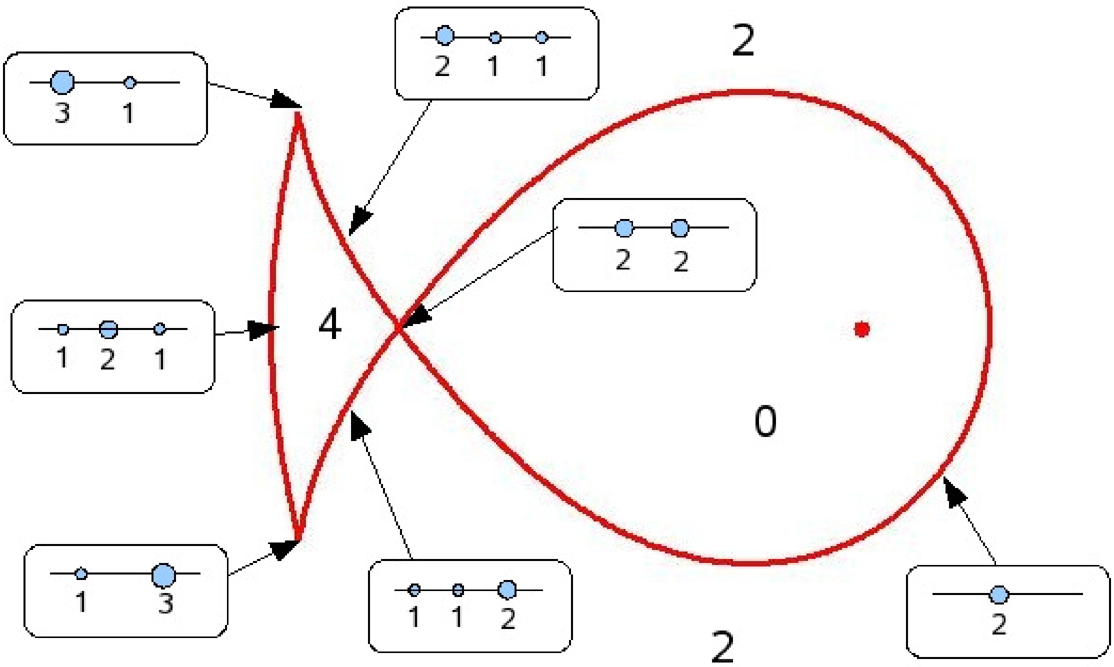
Cette illustration est extraite du **chapitre 1 du film *Dimensions***, où vous pouvez voir la projection stéréographique en action.

Voici la coupe du parapluie par la sphère de rayon 2, aplatie par une projection stéréographique :

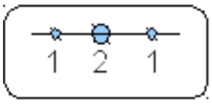


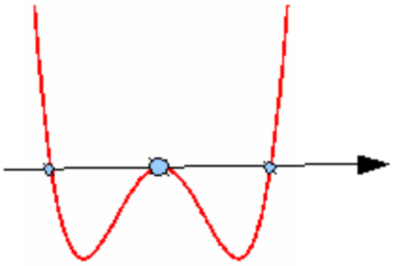
La partie du manche le long de laquelle la toile du parapluie est pincée donne le point d'attache de la queue du poisson ; celle qui pointe hors de la toile donne l'œil du poisson.

Revenons à la nature de ce parapluie : le discriminant Δ du polynôme du quatrième degré. Ce discriminant est nul quand le polynôme a des racines multiples. On montre aussi que le nombre de racines réelles ne peut changer que quand on traverse l'endroit où le discriminant est nul. On peut repérer le nombre de racines réelles sur le poisson : la queue du poisson correspond au domaine où le polynôme a quatre racines réelles, le corps au domaine où le polynôme a zéro racine réelle ; le discriminant Δ est positif sur ces deux domaines. L'eau dans laquelle nage le poisson correspond au domaine où le discriminant est négatif, et où le polynôme a deux racines réelles. La disposition des racines réelles et leurs multiplicités pour les polynômes correspondant au contour du poisson est symbolisée par ce schéma :



Dans chaque cartouche, les points bleus indiquent la disposition des racines sur la droite réelle ; la taille du point représente la multiplicité de la racine, aussi indiquée par le nombre en dessous du point. Voici par exemple l'allure d'un polynôme correspondant à l'un des cartouches.





Mais alors, que se passe-t-il à l'œil du poisson ? Rappelons que sur cette partie du manche qui dépasse hors de la toile, on a $b=0$, $a>0$ et $c=a^2/4$. L'œil du poisson correspond donc à un polynôme de la forme $t^4+a\,t^2+a^2/4=(t^2+a/2)^2$ avec $a>0$. Ici encore, l'explication est à rechercher dans le complexe : le polynôme a deux racines doubles imaginaires conjuguées, $i\sqrt{a/2}$ et $-i\sqrt{a/2}$. Il se passe bien quelque chose, mais on ne s'en aperçoit pas dans le réel.

Notes

[1] Mes remerciements à Daniel Pecker qui, il y a longtemps, m'avait fait voir la sorcière d'Agnesi dans le parapluie de Cartan

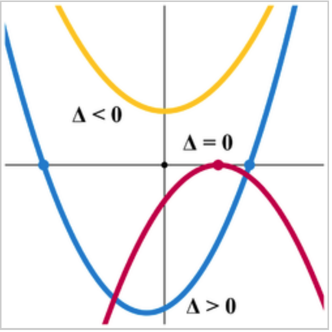
[2] **Henri Cartan**, *Variété analytiques réelles et variétés analytiques complexes*, Bulletin de la Société Mathématique de France 85 (1957), p. 77 à 99

[3] **Hassler Whitney**, *Elementary structure of real algebraic varieties*, Annals of Mathematics 66 (1957), p. 545 à 556

Pour citer cet article : **Michel Coste**, **Une sorcière, trois parapluies, un poisson**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/Une-sorciere-trois-parapluies-un.html`

Discriminant

En mathématiques, le **discriminant** est une notion algébrique. Il est utilisé pour résoudre des équations du second degré. Il se généralise pour des polynômes de degré quelconque et dont les coefficients sont choisis dans des ensembles équipés d'une addition et d'une multiplication. Le discriminant apporte dans ce cadre une information sur l'existence ou l'absence de racine multiple.



Incidence du signe du discriminant sur les racines de l'équation du second degré à coefficients réels

Le **discriminant** est utilisé dans d'autres domaines que celui de l'étude des polynômes. Son usage permet de mieux comprendre les coniques et les quadriques en général. On le retrouve dans l'étude des formes quadratiques ou celle des corps de nombres dans le cadre de la théorie de Galois ou celle des nombres algébriques. Sa définition se fonde sur le calcul d'un déterminant.

Sommaire

Polynôme du second degré

Résolution de l'équation à coefficients réels

Article détaillé : Équation du second degré.

Considérons une équation du second degré, ici *a*, *b* et *c* sont trois coefficients réels tel que *a* est différent de *zéro* :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Discriminant de l'équation du deuxième degré — Le **discriminant** de l'équation précédente est le nombre Δ défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

La connaissance du discriminant permet de résoudre l'équation :

Résolution de l'équation — Si le **discriminant** est strictement positif, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 données par les formules suivantes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si le **discriminant** est nul, l'équation admet une racine double :

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 \quad \text{et} \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Si le **discriminant** est strictement négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle.

Résolution de l'équation à coefficients complexes

Article détaillé : Racine de nombre complexe.

Si les coefficients *a*, *b* et *c* sont complexes ou si les solutions complexes de l'équation sont admises, la situation est un peu différente. Le théorème de d'Alembert-Gauss précise qu'il existe toujours au moins une solution à l'équation. Dans l'ensemble des complexes, un nombre admet toujours deux racines carrées, il existe une valeur δ tel que son carré δ^2 soit égal à Δ :

> **Racines complexes** — Si le **discriminant** est différent de *zéro*, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 données par les formules suivantes :
>
> $$x_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$
>
> Si le **discriminant** est nul, l'équation admet une racine double égal à -*b* / 2*a*.

Discriminant réduit

Si on écrit l'équation du second degré sous la forme suivante :

$$ax^2 + 2b'x + c = 0$$

Il devient plus simple d'utiliser une autre expression :

> **Discriminant réduit** — Le **discriminant réduit** de l'équation précédente est le nombre Δ' défini par :
>
> $$\Delta' = b'^2 - ac$$

L'expression des racines, si elles existent, devient :

$$x_1 = \frac{-b'+\delta'}{a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b'-\delta'}{a} \quad \text{avec} \quad \delta'^2 = \Delta' = b'^2 - ac$$

Exemples

Cherchons à résoudre l'équation suivante :

$$5x^2 - 5x + 1 = 0$$

Le calcul du discriminant Δ et des racines x_1 et x_2 donne :

$$\Delta = (-5)^2 - 4.5.1 = 5 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Dans le cas de l'équation suivante, on remarque que le discriminant réduit est nul, il n'existe qu'une racine égale à -3.

$$x^2+6x+9 = 0 \quad : \quad \Delta' = 3^2-1.9 = 0 \quad \text{; comme} \quad x^2+6x+9 = (x+3)^2 \text{, on a} \quad x_1 = x_2 = -3$$

Le dernier exemple décrit une situation où le discriminant est strictement négatif, ici égal à -3. On remarque de *i*√3 est une racine carrée du discriminant, si *i* désigne l'unité imaginaire. Ce qui permet de déterminer les solutions :

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4.1.1 = -3 \quad \text{et} \quad x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On peut remarquer que ces deux racines sont des racines de l'unité : elles ont pour cube (pour puissance troisième) le nombre *un*. Le polynôme choisi est un cas particulier de polynôme cyclotomique.

Forme quadratique en dimension deux

Article détaillé : Forme quadratique.

Sur l'ensemble des nombres réels, une forme quadratique φ en dimension deux associe à deux variables *x* et *y* un nombre à l'aide de la formule suivante :

$$\varphi(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{K}$$

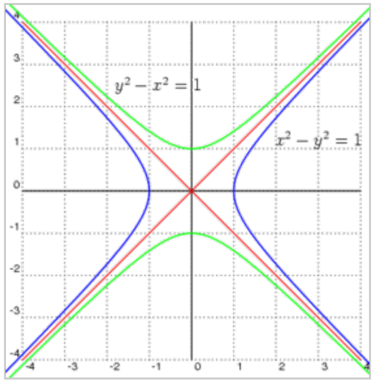
Une forme quadratique possède aussi une expression matricielle :

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Le déterminant de l'expression matricielle est égal à -1/4(b^2 - 4*ac*), on retrouve une expression proche de la précédente. Un changement de base, à l'aide d'une matrice de passage *P* modifie la valeur du déterminant. Plus exactement la valeur dans la nouvelle base est égale à la valeur dans l'ancienne base que multiplie le carré du déterminant de *P*, le signe du déterminant reste invariant. Cette propriété est analysée dans l'article détaillé.

Pour cette raison, il existe trois définitions différentes du discriminant d'une forme quadratique en dimension deux. Le discriminant d'une forme quadratique dans une base *B* est le déterminant de la matrice associée à la forme quadratique dans la base *B*. L'analogie avec la situation précédente permet de définir le discriminant de la forme quadratique comme étant égal à b^2 - 4*ac*. Enfin, comme le seul invariant associé au déterminant de la forme quadratique, le discriminant est aussi défini comme le signe du déterminant qui peut prendre les valeurs +1, 0 ou -1.

Le discriminant sépare les formes quadratiques en trois familles. En dimension deux, avec pour définition du discriminant la valeur du déterminant dans la base canonique, si le discriminant est de signe positif pour une valeur *a* donnée l'ensemble E_a des points (*x*, *y*) vérifiant φ(*x*, *y*) = *a* correspond à une ellipse ou à l'ensemble vide. Si le discriminant est nul, alors l'ensemble E_a correspond à une parabole. Si le discriminant est négatif, E_a est une hyperbole. Les formes quadratiques permettent ainsi d'obtenir les trois différentes formes de coniques.



Si le discriminant de la forme quadratique est négatif, l'ensemble des points de R^2 défini par φ(*x*, *y*) = *a* est une hyperbole. Si *a* est positif, on obtient une courbe analogue à celle en bleu, si *a* est négatif en vert. Si *a* est égal à *zéro* l'hyperbole est dégénérée, on obtient la figure rouge.

Polynôme de degré quelconque

L'extraction de racine d'un polynôme à l'aide du discriminant ne se généralise pas aux degrés supérieurs à deux. Le discriminant d'un polynôme garde néanmoins une utilité.

Dans le cas des équations de degré deux, le discriminant est nul si et seulement si le polynôme possède une racine multiple. L'existence de racine multiple peut avoir d'importantes conséquences. En algèbre linéaire, la présence de racine multiple dans le polynôme minimal d'un endomorphisme modifie sa nature. Cette présence interdit la diagonalisation. Sur les extensions des nombres rationnels, les polynômes irréductibles, c'est-à-dire qui ne sont pas factorisables, n'ont jamais de racine multiple *(cf l'article Extension séparable)*, cette situation n'est pas vraie pour tous les corps. Dans le cadre de la théorie de Galois, cette distinction est importante, les résultats sont différents selon la configuration.

Définition et propriétés

Article détaillé : résultant.

La généralisation du discriminant d'un polynôme de degré quelconque offre un outil permettant de déterminer si ses racines sont simples ou multiples. Dans ce paragraphe *A* désigne un anneau intègre et *P*[*X*] un polynôme de degré *n* dont les coefficients sont notés de la manière suivante :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \text{ et } \quad a_n \neq 0$$

La dérivée formelle de *P* est notée *P'* , elle existe même si *A* est différent du corps des nombres réels ou complexes. Enfin *R* désigne le résultant, c'est-à-dire une application qui à deux polynômes associe un élément de *A*.

- Le **discriminant** de *P*, en général noté Δ(*P*), est la valeur définie par la formule suivante [1] lorsque $deg(P') = n - 1$ (avec $n = deg(P)$) :

$$\Delta(P) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} R(P, P')$$

Le coefficient de normalisation possède son importance, un discriminant peut ainsi être également interprété comme un volume orienté. L'usage d'une telle approche devient évidente lors de l'analyse du discriminant d'une forme quadratique ou d'un anneau de Dedekind dans le cadre de la théorie algébrique des nombres.

Certains résultats de la théorie de Galois s'appliquent au discriminant, il faut alors étendre l'anneau *A* des coefficients. Comme *A* est commutatif unitaire intègre, il possède un corps des fractions *F* commutatif et *P* peut être considéré comme un polynôme à coefficients dans *F*. Ici *K* désigne le corps de décomposition de *P*, c'est-à-dire le plus petit corps contenant *F* et toutes les racines de *P*, à un isomorphisme près. Le discriminant possède la propriété suivante :

- *Le discriminant du polynôme* P *est non nul si et seulement il n'admet aucune racine multiple.*

La démonstration est une conséquence générale du résultant démontrée dans l'article détaillé. Si un polynôme n'admet aucune racine multiple, il est qualifié de séparable.

Il existe une formule différente permettant d'exprimer le discriminant, à l'aide des racines du polynôme :

- *Soit* α_i *pour* i *variant de 1 à* n*, les racines du polynôme* P*, le discriminant vérifie l'égalité suivante :*

$$\Delta(P) = a_n^{2n-2}\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$$

Cette propriété démontre la précédente, elle dérive d'une caractéristique du résultant de deux polynômes. Il est nul si et seulement si les deux polynômes ne sont pas premiers entre eux[2].

Démonstration

D'après les propriétés du résultant *(cf l'article détaillé)*, le discriminant est égal à :

$$R(P,P') = (-1)^{n(n-1)}a_n^{n-1}\prod_{i=1}^{n}P'[\alpha_i] = a_n^{n-1}\prod_{i=1}^{n}P'[\alpha_i]$$

Le polynôme *P* vérifie l'égalité suivante, ce qui, par dérivation donne :

$$P = a_n\prod_{j=1}^{n}(X-\alpha_j) \quad \text{et} \quad P' = a_n\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(X-\alpha_j)$$

On en déduit l'expression de *P'* (α_j) *:*

$$P'(\alpha_i) = a_n\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(\alpha_i-\alpha_j) = a_n\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\alpha_i-\alpha_j)$$

Ce qui fournit l'expression suivante du discriminant :

$$R(P,P') = a_n^{2n-1}\prod_{i\neq j}(\alpha_i-\alpha_j) = a_n^{2n-1}\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)(\alpha_j-\alpha_i)$$

Comme il existe exactement *n*(*n* - 1)/2 couples (*i*, *j*) tel que *i* est strictement plus petit que *j*, on en déduit :

$$R(P,P') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_n^{2n-1}\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$$

La définition du discriminant permet de conclure.

Exemples

- Pour les polynômes du second degré et avec les notations du premier paragraphe, on obtient :

$$\Delta(P) = \frac{(-1)^{\frac{2(2-1)}{2}}}{a}\begin{vmatrix} a & 2a & 0\\ b & b & 2a\\ c & 0 & b\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0\\ b & b & 2a\\ c & 0 & b\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & 2a\\ 0 & b\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} b & 2a\\ c & b\end{vmatrix} = b^2 - 4ac$$

- Pour les polynômes de degré trois on considère généralement le polynôme normalisé, c'est-à-dire celui dont le monôme dominant est égal à 1. et avec les notations suivantes :

$$P = X^3 + aX^2 + bX + c$$

On obtient[3] :

$$\Delta(P) = (-1)^{\frac{3(3-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & 0\\ 0 & 1 & a & b & c\\ 3 & 2a & b & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2a & b & 0\\ 0 & 0 & 3 & 2a & b\end{vmatrix} = a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2$$

L'expression est un peu complexe, pour cette raison, la tradition est de réaliser des substitutions pour obtenir un polynôme de la forme suivante, le discriminant est alors plus simple :

$$P = X^3 + pX + q \quad \text{et} \quad \Delta(P) = -4p^3 - 27q^2$$

Dans le cas d'une équation polynomiale de degré 3 à coefficients réels, si le discriminant est strictement négatif l'équation admet trois solutions réelles, si le déterminant est nul une racine est multiple et toutes sont réelles, si le déterminant est strictement positif, l'équation n'admet qu'une solution réelle, les deux autres sont complexes conjugués.

- Les courbes elliptiques sont un cas particulier de polynômes du troisième degré à deux variables. Pour le cas simple d'une courbe elliptique de la forme $y^2 = x^3 + ax + b$, où les coefficients a, b sont des nombres réels, le discriminant est défini par $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$.

Expression générale

L'expression générale du discriminant du polynôme P défini par :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

est la suivante :

$$\Delta(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & (n-1)a_{n-1} & na_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 & \vdots & (n-1)a_{n-1} & \ddots & 0 \\ a_0 & \vdots & \ddots & a_n & a_0 & \vdots & \ddots & na_n \\ 0 & a_0 & & a_{n-1} & 0 & a_0 & & (n-1)a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

Discriminant d'un anneau d'entiers algébrique

Article détaillé : forme trace.

La théorie algébrique des nombres utilise la notion de discriminant à partir d'une définition qui semble bien différente. Elle correspond à un déterminant d'une forme quadratique et s'applique à un anneau commutatif *A*. Les deux définitions sont néanmoins intimement corrélées. S'il existe un entier algébrique *a* tel que l'anneau *A* est égal à *Z*[*a*], ici *Z* désigne les entiers relatifs, alors le polynôme minimal de *a* possède ses coefficients dans *Z*. Son discriminant au sens des polynômes est égal au discriminant de l'anneau au sens de la théorie algébrique des nombres.

Notes et références

1. Cette définition est fréquente. On la trouve, par exemple dans (en) Eric W. Weisstein, « Polynomial Discriminant (http://mathworld.wolfram.com/PolynomialDiscriminant.html) », *MathWorld* ou encore Résultant et discriminant (http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=affiche&quoi=./r/resultant.html) sur le site bibmath.net. Cependant le coefficient de normalisation n'est pas toujours présent. C'est par exemple le choix fait dans Résultant. Discriminant (http://www.les-mathematiques.net/b/c/e/node9.php3) , sur le site les-mathematiques.net.
2. La démonstration proposée ici provient de (en) The geometry of the discriminant of a polynomial (http://www.nickalls.org/dick/papers/maths/discriminant1996.pdf) , par R. W. D. Nickalls et R. H. Dye, The Mathematical Gazette, 80, juillet 1996, p. 279–285.
3. Cette formule se trouve par exemple dans l'article (en) Discriminant (http://www.britannica.com/eb/article-9030624/discriminant) de l'Encyclopædia Britannica.

Annexes

Bibliographie

- Serge Lang, *Algèbre* [détail des éditions]
- Pierre Samuel, *Théorie algébrique des nombres* [détail des éditions]
- Daniel Perrin, *Cours d'algèbre* [détail des éditions]
- (en) Robert J. Walker, *Algebraic curves*, Springer, 1978 (ISBN 978-03-879-0361-3)

Liens externes

- Le théorème de Bézout et le résultant de deux polynômes (http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/Be%CC%81zoutRMS.pdf) par Michel Waldschmidt
- Racines des polynômes à une indéterminée (http://math.la.asu.edu/~lanchier/files/lec120.pdf) par N. Lanchier (un résumé des différentes propriétés au niveau de l'agrégation)

Résultant

En mathématiques, le **résultant** est une notion qui s'applique à deux polynômes. Elle est utilisée en théorie de Galois et en théorie algébrique des nombres. Le résultant de deux polynômes est un scalaire qui permet de vérifier s'ils possèdent des facteurs communs. Il peut être calculé à partir des coefficients des polynômes à l'aide d'un déterminant. On peut aussi l'obtenir à partir des racines des polynômes si ceux-ci sont scindés.

Sommaire

Définition et expression

Définition

Soient A un anneau intègre, P et Q deux polynômes de degré respectifs n et m à coefficients dans A. Les coefficients des polynômes sont notés a_i et b_i, on a donc les égalités :

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad \text{et} \quad Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$$

- Le **résultant** des deux polynômes P et Q est le déterminant de leur matrice de Sylvester. Il est noté dans cet article $R(P, Q)$.

Expression

Article détaillé : Matrice de Sylvester.

Avec les notations ci-dessus, le résultant est le déterminant de la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & \vdots & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & b_1 & & & b_m \\ a_0 & & & a_{n-1} & b_0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & b_1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{pmatrix}$$

La représentation choisie ici diffère de l'article détaillé. Elle évite une transposition pour exprimer les propriétés du résultant. Comme la transposition ne modifie pas le déterminant, les deux conventions peuvent être choisies [1].

Propriétés

Expressions à l'aide du déterminant

La matrice M ci-dessus est de taille $n + m$, avec les m premières colonnes linéaires en le polynôme P, les n suivantes en le polynôme Q :

- *Le résultant vérifie les formules :*

$$\forall\lambda \in \mathbb{A},\ R(\lambda P, Q) = \lambda^m R(P,Q) \quad \text{et} \quad R(P,\lambda Q) = \lambda^n R(P,Q)$$

La modification de l'ordre des colonnes modifie le signe du déterminant en fonction de sa signature :

- *Le résultant vérifie la formule :*

$$R(P,Q) = (-1)^{n\cdot m} R(Q,P)$$

L'endomorphisme φ de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $n + m - 1$ et de matrice M peut être vu comme une application de l'identité de Bézout. Si A (resp. B) est un polynôme de degré $m - 1$ (resp. $n - 1$) :

$$\varphi(X^n A + B) = P\cdot A + Q\cdot B$$

Si P et Q ne sont pas premiers entre eux, ils ont un facteur commun C et P (resp. Q) est égal à un produit du type $C.P_1$ (resp. $C.Q_1$). L'égalité suivante :

$$\varphi(X^n Q_1 - P_1) = P\cdot Q_1 - Q\cdot P_1 = 0$$

montre qu'alors φ n'est pas injectif et le résultant est nul. Réciproquement une considération de degré montre que si P et Q sont premiers entre eux l'endomorphisme est injectif donc de déterminant non nul :

- *Le résultant est non nul si et seulement si les deux polynômes* P *et* Q *sont premiers entre eux.*[2]

Expressions à l'aide des racines

La lettre F désigne le corps des fractions de A et K une extension de F contenant toutes les racines des deux polynômes, notées α_i pour P et β_j pour Q.

$$P = a_n\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i) \quad \text{et} \quad Q = b_m\prod_{j=1}^{m}(X-\beta_j)$$

Quitte à travailler dans K et non plus dans A, les deux polynômes sont scindés, c'est-à-dire qu'ils se décomposent en produit de polynômes du premier degré et ils admettent chacun autant de racines que leur degré. L'usage de l'extension K offre une nouvelle expression du résultant.

- *Le résultant des polynômes* P *et* Q *s'exprime de la manière suivante*[3] *:*

$$R(P,Q) = a_n^m b_m^n \prod_{i,j}(\alpha_i - \beta_j) = a_n^m \prod_i Q(\alpha_i) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_j P(\beta_j)$$

Cette formule montre par exemple que translater les deux polynômes ne change pas leur résultant :

$$R(P(X+a), Q(X+a)) = R(P(X), Q(X))$$

Si on ajoute à P un multiple de Q, seul le coefficient du second membre est susceptible d'être modifié.

$$P_1 \equiv P \mod Q \Rightarrow R(P,Q) = b_m^{m-\deg P_1} R(P_1, Q)$$

En suivant un algorithme analogue à celui d'Euclide on obtient un procédé de calcul de résultant en temps quadratique.

Démonstration

Supposons dans un premier temps que les deux polynômes soient unitaires, c'est-à-dire que a_n et b_m soient égaux à *un*. Chaque coefficient de P et de Q s'exprime comme le produit d'un polynôme symétrique en les racines. Si le $p^{\text{ième}}$ polynôme symétrique d'ordre q est noté σ_{pq} :

$$\forall i \in [0, n{-}1],\ a_i = (-1)^i \sigma_{in}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \quad \text{et} \quad \forall j \in [0, m{-}1],\ b_j = (-1)^j \sigma_{jm}(\beta_1, \cdots, \beta_m)$$

Le résultant peut être vu comme un polynôme en les différentes racines de P et Q, il existe un polynôme R_r en $n + m$ variables, tel que :

$$R(P,Q) = R_r[\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m]$$

L'anneau des polynômes à coefficients dans K et à $m + n$ indéterminées est factoriel, Le polynôme R_r possède comme facteur $(\beta_j - \alpha_i)$ il existe un polynôme $\lambda[X_1, \ldots, X_{n+m}]$ tel que :

$$R(P,Q) = \lambda[\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m]\prod_{i,j}(\beta_j - \alpha_i)$$

Une considération de degré montre que le polynôme $\lambda[X_1, \ldots, X_{n+m}]$ est constant. Il suffit de choisir judicieusement les polynômes P et Q, par exemple X^n et X^m pour s'assurer que la constante λ est égale à *un*. Pour traiter le cas où les polynômes ne sont pas unitaires, la première proposition du paragraphe précédent permet de conclure.

Applications

Si *x* et *y* sont deux nombres algébriques tels que $P(x) = Q(y) = 0$ et si *z*=*x*+*y*, on vérifie aisément que le résultant des deux polynômes $P(X)$ et $Q(z - X)$ est nul, ce qui prouve que *z* est aussi algébrique ; de même si *t*=*xy*, en considérant le résultant de $P(X)$ et $X^p Q(t/X)$, on montrerait également que *t* est algébrique, et en définitive que les nombres algébriques forment un corps. Une application un peu plus élaborée de la même idée permet d'ailleurs de montrer que ce corps est algébriquement clos.

Une application naturelle du résultant est le discriminant. Cette notion correspond au résultant d'un polynôme et de sa dérivée. Par delà l'intérêt de la résolution d'une équation polynômiale de degré deux, le discriminant permet de déterminer si un polynôme admet des racines multiples ou non. Cette propriété est importante en théorie de Galois car la théorie est différente si une extension n'est pas séparable. En théorie algébrique des nombres le discriminant est une propriété associé à un anneau de Dedekind. Même si la définition est différente, il peut encore se calculer à l'aide d'un résultant. Cette notion est alors intimement liée à celle de norme arithmétique.

Le résultant est un outil permettant de déterminer l'intersection de deux courbes algébriques (c'est le théorème de Bézout) ou la multiplicité d'un point sur une hypersurface. Si, par exemple, on a une courbe paramétrée (x(*t*)=A(*t*)/B(*t*), y(*t*)=C(*t*)/D(*t*)), où A, B, C et D sont des polynômes, alors les points de la courbe vérifient R(x,y)=0, où R est le résultant des deux polynômes (en *t*) xB-A et yD-C.

En théorie de l'information le résultant est utilisé pour des calculs d'arithmétique modulaire permettant de calculer des diviseurs communs à deux polynômes, en général sur un corps fini.

Notes et références

Notes

1. Résultant. Discriminant (http://www.les-mathematiques.net/b/c/e/node9.php3) sur le site les-mathematiques.net
2. Ce résultat est établi sur des exemples de petites dimensions dans (en) The Resultant and Bezout's Theorem (http://www.mathpages.com/home/kmath544/kmath544.htm) , sur le site mathpages.com.
3. Le théorème de Bézout et le résultant de deux polynômes (http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/Be%CC%81zoutRMS.pdf) par Michel Waldschmidt

Références

- Serge Lang, *Algèbre* [détail des éditions]
- Pierre Samuel, *Théorie algébrique des nombres* [détail des éditions]
- (en) Robert J. Walker, *Algebraic curves*, Springer, 1978 (ISBN 978-03-879-0361-3)

Liens externes

- (en) Eric W. Weisstein, « Resultant (http://mathworld.wolfram.com/Resultant.html) », *MathWorld*
- Résultant et discriminant (http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=affiche&quoi=./r/resultant.html) sur le site bibmath.net