Devinette multicolore

Le 4 février 2010, par **Charles Boubel**
Maître de conférences à l'Université de Strasbourg (**page web**)

VOICI des photos, sous plusieurs angles, d'un anneau de bois que j'ai peint. Saurez-vous trouver ce que ce coloriage a de particulier ? Bien sûr, le mieux serait de tenir l'objet en main, ce qu'ont pu faire les visiteurs de la fête de la science 2008 à Strasbourg, pour laquelle j'ai réalisé [1] cet objet. La réponse est donnée après les photos.

Un indice : cliquer pour déplier.

Combien y a-t-il de zones colorées ? Quelles sont les zones frontalières d'une zone de couleur donnée ?

Un indice plus précis : cliquer pour déplier.

Sur l'avant-dernière photo, on voit toutes les zones que touche la zone rouge : lesquelles sont-elles ? Sur la dernière photo, on voit toutes les zones touchées par la zone blanche : lesquelles ? Semblablement, observez la zone bleue et la zone verte sur la cinquième photo à partir de la fin. Vous pouvez enfin vérifier le même phénomène pour toutes les zones.




On peut aussi tourner autour de l’anneau posé sur une table, sur une de ses faces :

et posé sur l'autre de ses faces :

Après cette visite, vous avez deviné je pense. La surface de l'anneau est partagée en sept zones de sept couleurs différentes, et chaque zone touche toutes les autres. Ce présent billet est donc un écho à un **précédent article** de ce site. Cet article évoquait le célèbre *théorème des quatre couleurs* :

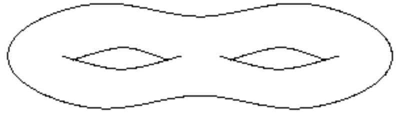
- On remarque facilement que certaines cartes nécessitent quatre couleurs pour que deux pays voisins soient toujours de couleur différente. Regardez par exemple une carte représentant l'Allemagne, la Belgique, le Luxembourg et la France. Chaque pays touche les trois autres, il faut au moins quatre couleurs.
- Dans l'autre sens, et c'est très difficile à montrer, n'importe quelle carte dessinée sur une sphère ou sur un plan peut être coloriée avec seulement quatre couleurs, de sorte que deux pays voisins soient toujours de couleur différente.

La surface de l'anneau présentée ici montre donc que, si quatre couleurs suffisent toujours pour colorier les cartes dessinées sur une sphère ou un plan, ce n'est plus forcément vrai pour des cartes tracées sur d'autres surfaces. La surface d'un anneau s'appelle un tore :

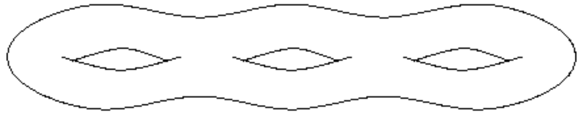
- Comme ici chacune des sept zones touche toutes les autres, sept couleurs au moins sont nécessaires pour colorier cette carte tracée sur le tore.
- On peut montrer par ailleurs, mais c'est difficile, que n'importe quelle carte dessinée sur un tore peut être coloriée avec seulement sept couleurs. Un « théorème des sept couleurs » est vrai pour le tore.

La géopolitique terrestre n'est pas simple, mais estimons-nous heureux de ne pas habiter une planète torique, où les problèmes de voisinage peuvent être encore plus complexes !

On peut continuer à se poser la même question pour toute sorte de surfaces. Par exemple, on appelle « surface compacte orientable de genre 2 » la surface d'une « bouée à deux places, » comme sur le dessin qui suit. On appelle « surface compacte orientable de genre 3 » celle d'une « bouée à trois places », *etc*.



Surface « de genre 2 »



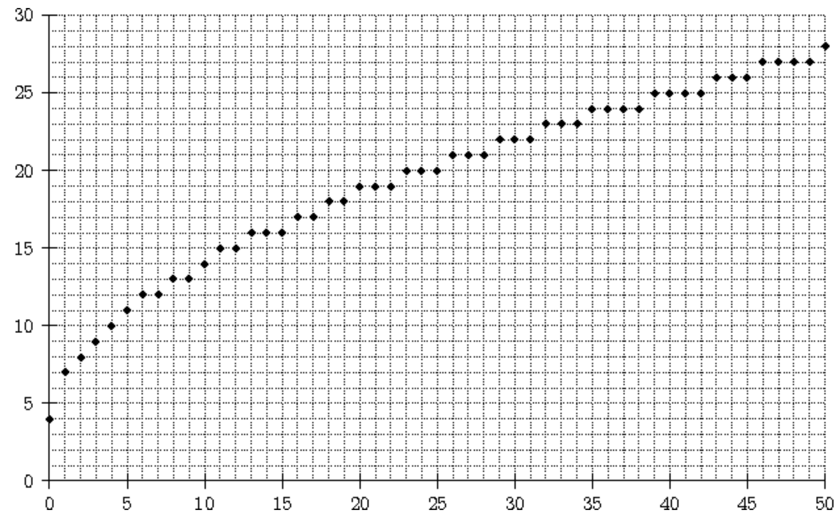
Surface « de genre 3 »

Pour la surface de genre deux, il faut et il suffit de disposer de huit couleurs pour colorier n'importe quelle carte. Pour celle de genre trois, il faut et il suffit d'utiliser neuf couleurs.

J'ai trouvé cette information ... sur **wikipedia** [**2**] : remplacez le genre *g* par 2, puis par 3, dans la deuxième formule du paragraphe *Généralisations du théorème des quatre couleurs*. Le crochet ouvert en haut qui entoure l'expression signifie « partie entière » : on oublie ce qui est après la virgule.

Combien de couleurs pour des bouées à beaucoup de places (surfaces de grand genre) ?
Cliquer pour déplier.

J'ai représenté ci-dessous la fonction trouvée sur wikipedia : le nombre de couleurs nécessaires pour être sûr de pouvoir colorier n'importe quelle carte, en fonction de la surface considérée. Plus exactement, les abscisses indiquent le genre de la surface (compacte, orientable), c'est-à-dire le nombre de places dans la bouée, dans le vocabulaire introduit précédemment.



Vous retrouvez les premières valeurs : la bouée à zéro place est la sphère. Le point se situe à la hauteur 4 : c'est le théorème des quatre couleurs, pour la sphère. Une bouée à une place est un tore. Le point est à la hauteur 7. Pour la surface de genre deux, autrement dit bouée à deux places, on retrouve la valeur 8, etc. Vous voyez le nombre de couleurs nécessaires augmenter avec le genre de la surface, mais de moins en moins vite. Pour le genre 10000 par exemple, on trouve 349 couleurs.

Enfin, Jérôme Germoni me signale une **version polyédrale** du coloriage du tore présenté dans cette article, sur l'excellent site **mathcurve**. Ce « polyèdre de Szillassi », du nom du mathématicien hongrois qui l'a conçu, est en forme de tore, et il comporte sept faces qui se touchent toutes mutuellement.

Les coulisses de la conception de ce tore

Pour ceux qui veulent aller un peu plus loin, voici comment j'ai partagé le tore en sept zones. Je n'ai pas procédé au hasard. Essayez donc de trouver cinq zones toutes mutuellement voisines, puis six, à tâtons : ce n'est pas facile. Cette construction est l'occasion de découvrir, en images, la manière classique pour les mathématiciens de concevoir le tore, surface extrêmement usuelle et riche de propriétés particulières.

Trois idées se cachent derrière l'établissement de la carte :

1. un tore, c'est une *Pac planète*,
2. chaque carte est codée par un ensemble de points reliés par des traits (on dit un *graphe*),
3. on peut obtenir un dessin (un graphe) bien régulier en utilisant des « droites » du tore, vu comme au point 1.

1. Un tore, c'est la planète de Pac Man, ou « Pac planète ».

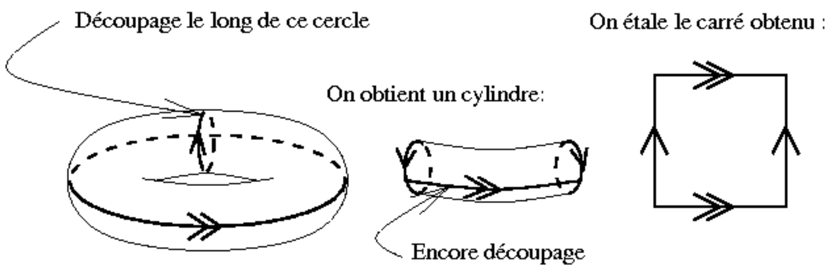
Difficile de faire de la géométrie sur un tore vous ne trouvez pas ? Un tore est rond et tordu, il a toujours une face cachée quel que soit le point de vue ... Dans cette partie, on va le déplier, comme on étalerait le patron d'un vêtement. On y verra alors plus clair pour la suite.

J'emprunte l'expression de *Pac planète* à **Matthieu Gendulphe**, qui l'utilisait pour de la vulgarisation lors de sa thèse à Bordeaux [3]

Les lecteurs de plus de trente ans se souviennent du célèbre **Pac Man**, ancêtre des jeux vidéo. Ce personnage habite un labyrinthe carré. S'il sort par la sortie du côté droit, il réapparaît instantanément dans l'entrée côté gauche, et vice-versa. Ici, on imaginera aussi que Pac Man peut sortir par le haut, ce qui n'était pas prévu dans le jeu, en réapparaissant alors instantanément en bas et vice-versa.

Bref, Pac Man habite un *tore*. En effet, un tore est un carré dont les côtés gauche et droit, d'une part, et haut et bas, d'autre part, sont identifiés l'un à l'autre, ou collés l'un à l'autre si vous préférez. Je vais trop vite ? Reprenons cette affirmation image par image.

Voici comment transformer un tore en un carré. Découpez un tore le long d'un petit cercle comme sur le dessin de gauche. Vous obtenez un cylindre. Le cercle de découpe, marqué d'un chevron « > », se dédouble et apparaît à chaque extrémité du cylindre. Découpez alors ce cylindre le long d'un segment reliant ses extrémités. Vous obtenez alors un carré, où la deuxième ligne de découpe, dédoublée également, constitue les côtés haut et bas, marqués d'un double chevron « >> ». La première ligne de découpe, dédoublée, devient les côtés droit et gauche du carré.



En parcourant les étapes ci-dessus de droite à gauche, on reconstitue, par collage, un tore à partir d'un carré. Recollez les côtés haut et bas, voici un cylindre. Recollez alors les extrémités droite et gauche du cylindre, vous retrouvez un tore. Autrement dit, par ces deux collages, ou coutures, successives, vous avez habillé un tore à partir d'un patron carré.
Or, les côtés droit et gauche d'une part, et haut et bas d'autre part, du carré de Pac Man communiquent magiquement. Cette magie s'explique sans difficulté si on imagine que ce carré habille en fait un tore, selon la manipulation ci-dessus. Les côtés droit et gauche du Pac-carré sont en fait deux images d'un même cercle du tore sur lequel vit Pac Man. Idem pour les côtés haut et bas.

Pour concevoir ma carte, il me suffit donc de la tracer sur un carré, de sorte que ses côtés droit et gauche, d'une part, et haut et bas, d'autre part, se recollent de manière cohérente. C'est ce que j'ai fait :

Vérifiez que je ne mens pas ! Le collage haut-bas est cohérent : de gauche à droite apparaissent un peu d'orange, beaucoup de vert, puis de jaune, puis un peu de bleu. Je peux reconstituer un cylindre par collage, en recollant haut et bas. Chaque couleur sera recollée contre sa semblable. De même, on peut recoller droite et gauche.

Une fois ce patron établi, je l'ai donc reporté à l'aide d'un rapporteur sur mon tore en bois. J'ai reporté les points importants, puis les ai reliés, obtenant des zones hexagonales. Les côtés verticaux du patron correspondent à un petit cercle dessiné sur le tore en bois, comme sur la figure précédente. J'ai enfin peint les zones. Observez le patron : quels sont les voisines de la zone violette ? Celles de la zone orange ?

Voisines de la zone orange : réponse, cliquer pour déplier.

> *Suivons le bord de la zone orange. Partons par exemple du point de rencontre des zones blanche, violette et orange, à peu près à mi hauteur, vers la gauche. Tournons dans le sens des aiguilles d'une montre. On longe la zone violette, première voisine. Verticalement, on longe ensuite la zone rouge, deuxième voisine, puis toujours en descendant, la zone verte, troisième voisine. On se heurte au côté du bas du patron, mais sur le tore, ce n'est pas un obstacle. C'est*

> *une simple ligne de couture du patron, nous amenant en haut du patron, en face. Le côtoiement de la zone verte s'y poursuit. On tourne alors, remontant et longeant la zone bleue, quatrième voisine. On croise alors un angle du carré, c'est-à-dire, sur le tore, l'endroit où les deux coutures du patron se croisent. Comme on est en train de monter vers la gauche, on se retrouve ... à l'angle en bas à droite du patron (imaginez comment les quatre coins du carré sont cousus ensemble). On y longe toujours la zone bleue. On rencontre un nouvel angle et on longe la frontière, verticale, avec la zone jaune, cinquième voisine. Un dernier angle nous amène à longer la zone blanche, sixième voisine. Ce parcours nous refait traverser une couture du patron : son côté droit. On se retrouve à gauche, continuant de monter vers la droite pour retourver le point de départ.*
>
> *La zone orange a six voisines, c'est-à-dire voisine toutes les autres zones.*

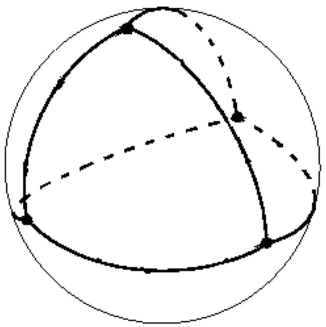
Nous voici familiers avec la version « carrée » du tore. Il me reste à expliquer comment je suis parvenu au coloriage ci-dessus de cette version carrée du tore. C'est l'objet des deux parties suivantes.

2. Chaque carte est codée par un graphe.

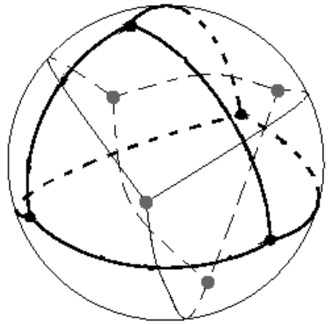
Encore une fois, on va simplifier le problème : la forme des régions n'est pas si importante, ce qui compte, c'est le contact entre elles. Nous allons modéliser ce contact le plus simplement possible.

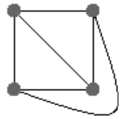
Cette partie se comprend encore essentiellement par des dessins. Si vous dessinez une carte partageant une surface en différentes zones, vous pouvez alors tracer sur la surface le *graphe dual* de cette carte. Attention, le mot *graphe* a (au moins) deux sens en mathématiques. Il signifie ici « ensemble de points dont certains sont reliés entre eux par des traits », et pas « représentation graphique d'une fonction ».

Vous symbolisez chaque zone par un point (un « sommet » du graphe) que vous placez dans la zone. Ensuite, vous reliez deux points s'ils sont situés dans des zones ayant une frontière commune. Il suffit pour cela de tracer une route du premier point au deuxième (une « arête » du graphe), traversant la frontière commune. Une moitié de la route est intégralement située dans la première zone, l'autre, dans la deuxième. De la sorte, on peut s'arranger pour qu'aucune des routes tracées, les arêtes, n'en rencontre une autre, excepté aux sommets. Voici, par exemple, une carte partageant la sphère en quatre zones « triangulaires ». On remarque d'ailleurs que ces zones ont une frontière commune avec chacune des trois autres.

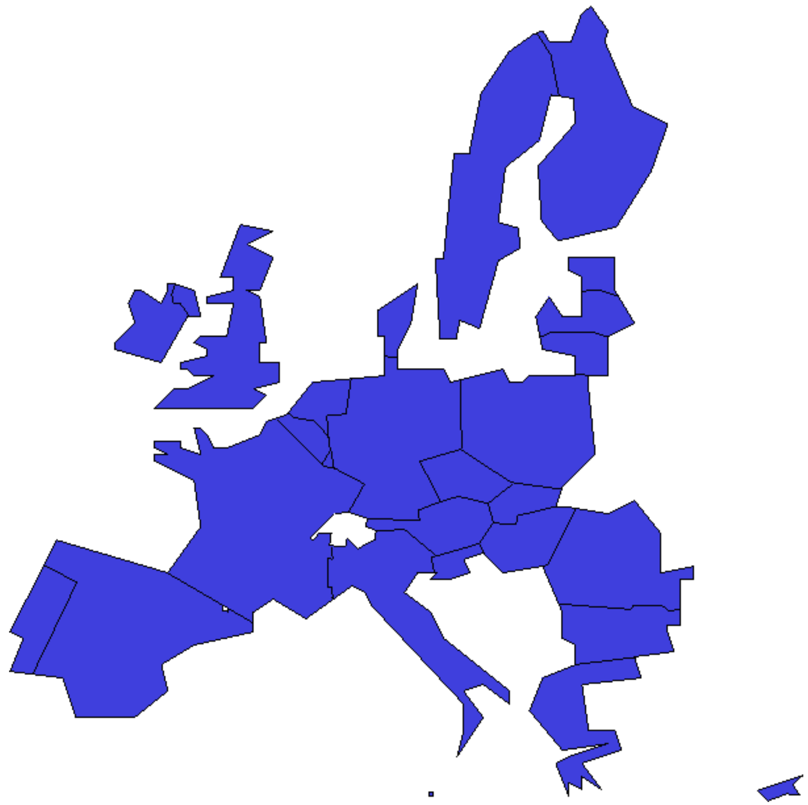


Voici alors, tracé en trait fin sur la sphère, le graphe dual de cette carte. Ici, chaque sommet est relié à tous les autres car chaque région touche toutes les autres. J'ai en outre représenté, à côté, ce graphe dual de façon abstraite. Ce sont quatre « sommets », tous reliés entre eux par des « arêtes »



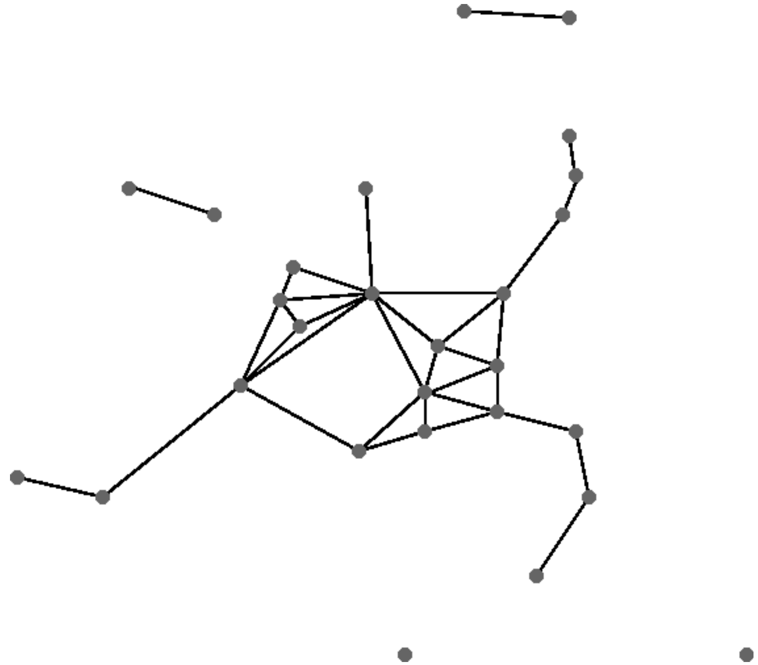


Pour le plaisir de la géographie, et pour être sûr d'être totalement clair, je présente un autre exemple. Voici la carte des 27 Etats membres de l'Union Européenne en 2009, sans leurs îles et sans Gibraltar, pour simplifier.

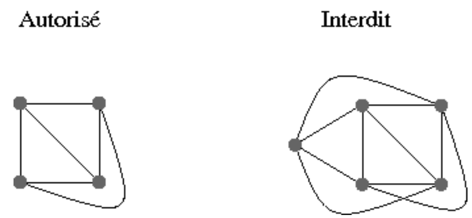


Construisons son « graphe dual ». On symbolise chaque Etat par un point — un « sommet » du graphe, placé n'importe où sur son territoire. Ensuite, on relie deux sommets par un trait — une « arête » du graphe — si les deux Etats symbolisés ont une frontière terrestre commune. On peut le faire de sorte qu'aucune arête n'en croise une autre, excepté aux sommets du graphe.

Voici enfin le graphe seul. On a oublié la carte. La seule information conservée est donc : *qui* a une frontière avec *qui* (pour bien faire, il aurait certes fallu étiqueter les sommets). On voit ainsi que l'Allemagne est l'Etat de l'Union ayant le plus d'Etats membres voisins : huit. Ensuite vient l'Autriche avec six. Malte et Chypre, elles, n'en ont pas.

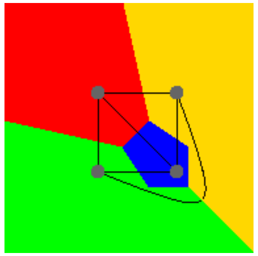


Cette construction peut s'effectuer dans l'autre sens. A partir d'un graphe tracé sur une surface, sans croisement d'arêtes, construisons une carte dont ce graphe est le graphe dual. Voici deux exemples de graphes, tracés sur le plan.

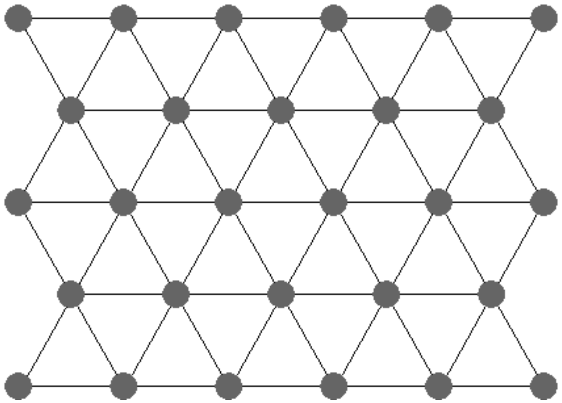


Le premier graphe est autorisé, mais pas le deuxième : en bas, deux arêtes se croisent en un point qui n'est pas un sommet. Oublions ce dernier.

On peut alors noyer chaque sommet du premier graphe dans une zone de couleur, englobant toutes les demi-arêtes qui partent de lui. Ces zones ont alors une frontière commune exactement quand les sommets correspondants sont reliés par des arêtes.

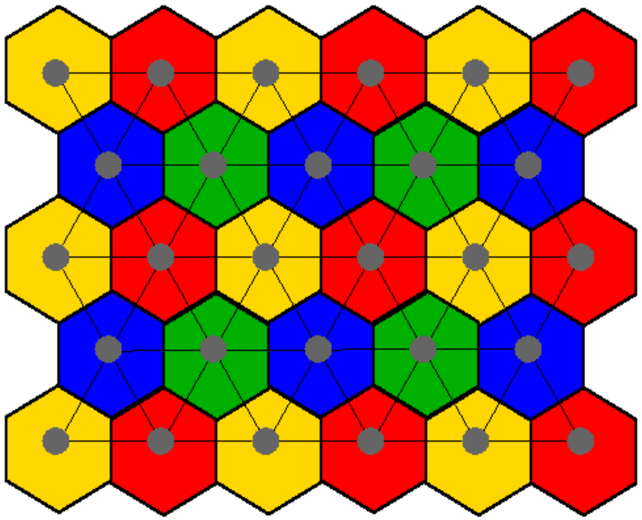


Petite devinette ayant un air de famille avec ce qui va suivre. Quelle carte bien connue a-t-elle pour graphe dual le graphe suivant, qu'on imagine se poursuivant indéfiniment ?



Réponse, cliquer pour déplier.

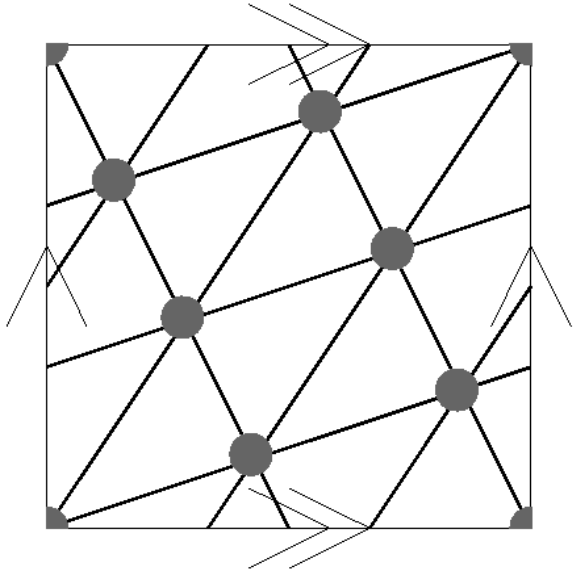
Le graphe indique que chaque zone a six voisines. Une carte qui convient aura donc des zones hexagonales, chacune voisinant six congénères. Une solution est par exemple la carte du pavage hexagonal, en nid d'abeille, bien connu :



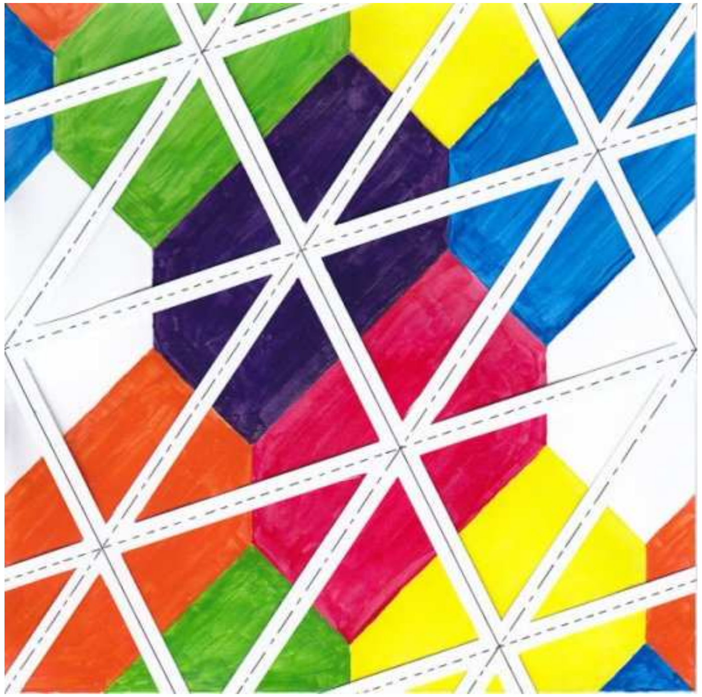
J'ai colorié ce pavage avec quatre couleurs, comme c'est toujours possible dans le plan.

Vous voici familiers des graphes duaux des cartes. Revenons à notre mouton. Le problème « trouver une carte partageant le tore en sept régions se touchant toutes mutuellement » revient au même que « dessiner sur le tore un graphe à sept sommets, chacun relié à tous les autres, sans que les arêtes se croisent ». Cette nouvelle formulation oublie la forme des zones pour ne retenir que l'unique donnée qui nous intéresse : *qui* touche *qui*. C'est une étape très courante d'un raisonnement mathématique : distinguer ce qui est important de ce qui ne l'est pas, pour résoudre une question, et coder ce qui est important de la manière la plus simple possible.

Voici donc le graphe que j'ai tracé sur un tore. Bien sûr, j'ai considéré que le tore est un carré dont les côtés opposés sont identifiés.



Les sommets sont les points gris. Un des sommets, situé aux angles du carré, est visible sous forme de quatre quartiers, qui se recollent en un point entier lorsqu'on reconstitue le tore. Vous voyez donc sept sommets, chacun relié à tous les autres par des arêtes qui ne se croisent pas. Il me restait à noyer chaque sommet dans une zone de couleur, hexagonale, pour obtenir la carte recherchée. Sur la photo ci-dessous, les sommets sont simplement les croisements d'arêtes. Le carré symbolisant le tore est légèrement décalé par rapport à la figure ci-dessus : le sommet précédemment placé dans les angles du carré est cette fois situé au milieu des côtés gauche et droit.



Vous savez à présent comment j'ai peint le tore. Mais sur le fond, il reste une question : la partie qui précède nous a ramené au problème « dessiner sur le tore un graphe à sept sommets, chacun relié à tous les autres, sans que les arêtes se croisent ». Comment faire ? En tâtonnant, ce n'est pas si facile.

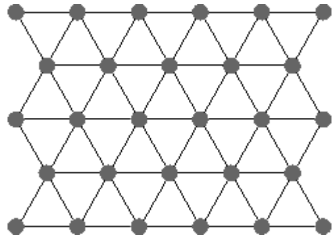
En fait, j'avais déjà rencontré un coloriage du tore à 7 zones toutes mutuellement voisines et me souvenais du principe. Cependant, ce dessin était irrégulier, et je voulais peindre une version bien régulière :

- avec des hexagones, car chaque zone a six voisines,
- avec des hexagones tous semblables, comme dans le nid d'abeille plus haut.

Pour cela, il me fallait construire une version bien régulière du graphe. Seule cette version me ferait mieux comprendre comment il « fonctionne ». Je l'ai fabriqué à partir de *lacets « rectilignes »*.

3. On peut obtenir un graphe bien régulier en utilisant des « droites » du tore

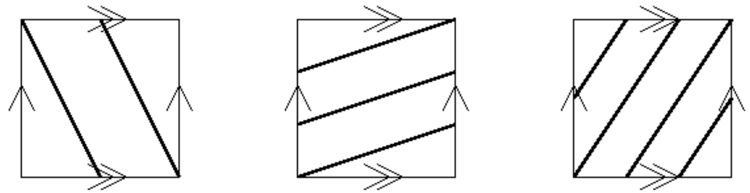
Souvenez-vous du graphe du plan à maille triangulaire un peu plus haut, celui qui est dual du nid d'abeilles (imaginez le graphe continuant indéfiniment) :



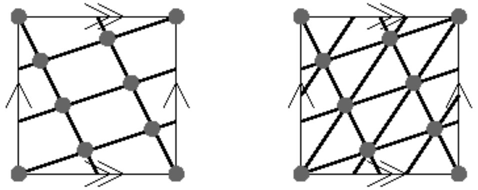
Chaque sommet a six voisins : six arêtes partent de chaque sommet. Par ailleurs il est bien régulier en ce sens que les arêtes successives s'enchaînent, pour former des droites, selon trois directions : des droites horizontales, des droites inclinées « montantes » et des droites inclinées « descendantes ».

J'aimerais dessiner quelque chose de semblable sur le tore, avec cette fois exactement sept sommets (il n'est pas dit *a priori* que ce soit possible). Autrement dit, j'aimerais trouver trois droites sur le tore, qui se croisent les trois ensemble à chaque carrefour. Si un carrefour voit passer trois droites, c'est donc que six arêtes en partent : on peut en effet emprunter chaque droite dans deux sens, en partant du carrefour. Chaque carrefour aurait donc six voisins. Si j'y arrive, et que je forme sept carrefours, j'aurai donc gagné. Ah, un détail : qu'est-ce qu'une « droite » sur le tore ? C'est simplement un trait rectiligne ... quand on le voit sur le carré représentant le tore.

Utilisant mes souvenirs, j'ai alors considéré les trois « droites » A, B et C suivantes :



A B C



Notez comme d'habitude que ces droites sont cohérentes avec les recollements haut-bas et droite-gauche du carré. Suivez le trajet de chacune ... vous allez toujours tout droit et finissez par revenir au point de départ. On remarque alors que les droites A et B se croisent exactement 7 fois, et que la droite C coupe elle-même A et B exactement en ces sept points. On a gagné : en décrétant que ces points d'intersection sont les sommets d'un graphe, et que les portions de droites entre les sommets sont les arêtes du graphe, on obtient, comme voulu, un graphe à sept sommets, six arêtes s'échappant de chaque sommet pour le joindre aux six autres.

Le voyage est terminé, vous connaissez les coulisses de la conception du tore.

J'ajoute une petite excursion pour ceux qui ont encore du courage et de la curiosité. En effet, parler de « patron carré » et de « droites » du tore nous fait passer tout près du monde des *lacets* du tore : vous avez les outils pour les comprendre, et ils sont des objets massivement utilisés par les mathématiques

d'aujourdhui, depuis **H. Poincaré à la fin du 19ème siècle** plus précisément.
Cette excursion vous permettra en outre de voir les zones colorées du tore comme trois colliers de perles, enroulés de trois manières différentes autour du tore.

Excursions gratuite et sans obligation dans le monde des lacets du tore. Cliquer pour déplier.

Les lacets d'un tore sont les courbes fermées sur elles-mêmes tracées sur le tore. Les « droites » A, B et C introduites plus haut sont trois exemples de tels lacets.

Quitte à déformer un lacet du tore, on se rend compte qu'il revient toujours à faire le tour du tore, « un certain nombre de fois dans un sens », par exemple celui du « cercle à double chevron » du tore, et « un certain nombre de fois dans l'autre » celui du « cercle à simple chevron » du tore. Numérotons-les arbitrairement « premier » et « deuxième » sens.

Voici un lacet tournant autour du tore une fois dans le premier sens et zéro fois dans le deuxième.

Voici un lacet tournant autour du tore zéro fois dans le premier sens, et une fois dans le deuxième.

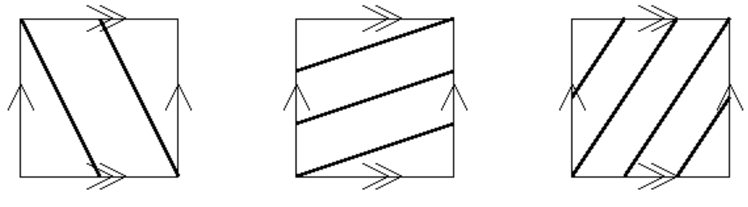
Voici un lacet tournant autour du tore une fois dans chaque sens. Son image sur le tore-bouée est un peu déformée, mais on ne prête pas ici attention à ces déformation de lacets. Ces derniers glissent à volonté sur le tore comme des lassos.

Voici enfin un lacet tournant autour du tore une fois dans le premier sens et deux fois dans le deuxième.

On s'aperçoit donc que tout lacet sur le tore est codé par deux nombres : son nombre de « tours dans un sens » et son nombre de « tours dans l'autre ».

Les lacets A, B et C que j'ai utilisés sont les suivants :

- *le lacet A est celui qui fait 1 fois le tour du tore dans le premier sens et -2 fois dans le deuxième (c'est à dire deux fois, mais dans le sens rétrograde par rapport aux flèches indiquées sur le coté du carré),*
- *le lacet B est celui qui fait 3 fois le tour du tore dans le premier sens et 1 fois dans le deuxième,*
- *et le lacet C est celui qui fait 2 fois le tour du tore dans le premier sens et 3 fois dans le deuxième.*



A B C

Si vous revenez au tore en bois ou éventuellement au carré peint, vous pouvez donc suivre les zones de couleur, comme des perles sur un collier, le long du lacet A. Les zones violette, rouge, jaune, bleue, blanche, orange et verte forment un collier s'enroulant sur le tore, une fois dans un sens et deux fois dans l'autre. Le long du lacet B, les zones violette, bleue, verte, jaune, orange, rouge et blanche forment un collier s'enroulant sur le tore, trois fois dans un sens et une fois dans l'autre. Le long du lacet C, les zones violette, jaune, blanche, verte, rouge, bleue, et orange forment un collier s'enroulant sur le tore, deux fois dans un sens et trois fois dans l'autre. On pourrait s'amuser à comprendre ces permutations des places des couleurs le long de chaque collier, mais j'ai la flemme.

Je resterai ici un peu mystérieux, en rappelant seulement que ces histoires de lacets ne sont pas une curiosité ou une anecdote, mais un outil fondamental pour comprendre les surfaces, le tore ou d'autres. Ce billet était juste l'occasion d'un aperçu à leur propos.

Un exercice montrant « pourquoi », les lacets A, B et C fonctionnent pour construire le graphe, et comment construire d'autres graphes semblables, pour les lecteurs connaissant un peu de maths de première année du supérieur.

On résume la définition de A, B et C par : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Les nombres qui apparaissent, superposés, sont les nombres de tours de A, B et C dans chaque sens. On remarque alors que le déterminant de la matrice :*

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

vaut sept. C'est ce qui explique que A et B se croisent sept fois. Pourquoi ? Par ailleurs, en additionnant terme à terme, on constate que $C = B - A$, *c'est-à-dire que :*

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (A, B) = M.(A, B)$$

avec cette fois M *une matrice à coefficients entiers, de déterminant l'entier* ***inversible*** *-1. C'est ce qui explique que* $C \cap A = C \cap B = A \cap B$ *. Pourquoi ?*

Cet exercice permet de construire une infinité d'autres graphes sur le tore, à sept sommets, tous reliés, sans croisement d'arêtes. Il suffit de trouver des matrices à coefficients entiers et de déterminant 7 : elles fournissent les lacets A et B adéquats. On construit alors C de la même façon, à partir des A et B choisis.

Pour ma part, j'ai choisi A et B tels que les lacets A,B et C obtenus s'enroulent le moins de fois possible autour du tore. Cela évite d'obtenir une carte illisible, avec des hexagones très fins et très enroulés.

Remerciements. Je remercie J. Germoni, **S. Cantat** et **X. Caruso** pour leur relecture attentive et leurs suggestions nombreuses et utiles.

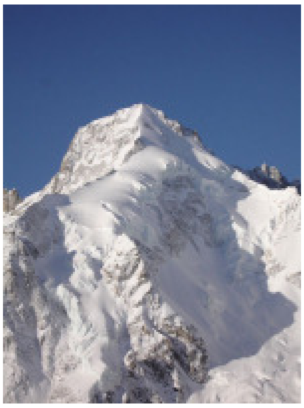
Notes

[1] Plus exactement, j'ai conçu et peint l'anneau. Mais je l'ai fait tailler, en bois d'aulne et sur mesure, par un tourneur sur bois, métier que j'ai découvert à cette occasion.

[**2**] Il est frappant que ces théorèmes des 7, 8, 9 couleurs, etc, sur des surfaces apparemment compliquées, ont été prouvés en 1968, donc bien avant le théorème des quatre couleurs pour le plan. Ce devait être plus facile ; j'ignore pourquoi.

[**3**] Si cette excursion dans le monde des Pac planètes, les tores, vous plaît, je vous conseille la lecture de ce **travail** de lycéens de Talence dans le cadre de l'association ***Maths en jeans***. Il a été encadré par mon collègue Pierre Mounoud et fait toucher des maths profondes et tout à fait contemporaines, sous une formulation simple.

Coloriages de cartes : mathématiques, droit, géographie et politique



Le 15 juillet 2009, par **Pierre de la Harpe**

Professeur à l'Université de Genève (**page web**)

Dans son livre sur « Les frontières de la Suisse : questions choisies » [**1**], l'auteur consacre un chapitre à la question des *tripoints*, ou *points triples*, points de jonction de plusieurs frontières ; il y en a six sur le périmètre de la Suisse. Les notions de carte, frontière et point triple se rencontrent en mathématiques et ailleurs. Mais le passage d'un domaine à l'autre est surprenant (nous devrions y être plus habitués !), comme c'est mon but de l'évoquer ici.

Mathématiques : le problème-théorème des quatre couleurs

C'est un vieux problème que de déterminer le nombre minimal de couleurs suffisant à colorier toute carte de géographie dessinée sur une sphère, de telle sorte que deux pays adjacents soient toujours de couleurs différentes ; plusieurs livres y sont consacrés, par exemple [**2**]. Le mathématicien commence par préciser qu'il s'agit de cartes représentant des pays réels ou imaginaires (peu importe), que les cartes sont tout à fait sommaires puisqu'elles n'indiquent des pays que leurs frontières (supposées raisonnablement régulières), et qu'elles se limitent aux cas les plus simples (pas d'enclave, pas de « territoire d'outre-mer », ...). Un argument assez élémentaire [**3**] montre qu'on peut de plus supposer que les points multiples des frontières sont tous des points triples [**4**], et que le morceau de frontière commun à deux pays est toujours d'un seul tenant (contrairement au cas de la frontière austro-suisse, constituée de deux parties séparées par le Liechtenstein).

On montre sans peine qu'il faut au moins quatre couleurs : par exemple en examinant la situation de la Slovaquie et des pays adjacents (Ukraine, Pologne, République tchèque, Autriche, Hongrie) [**5**], ou de tout autre pays entouré d'un nombre impair [**6**] de pays. Par ailleurs, de nombreux essais montrent que quatre couleurs suffisent. D'où une conjecture célèbre : *quatre couleurs suffisent dans tous les cas.*

La conjecture fut formulée en 1852 par Francis Guthrie, puis publiée en 1878 dans un article de Cayley. Elle gagna en célébrité et fut prétendument démontrée plusieurs fois à la fin du XIXème siècle ; mais l'argument n'était jamais correct, et la conclusion ne fut qu'un résultat plus faible, démontré par Heawood en 1890 : *cinq couleurs suffisent dans tous les cas.* La suffisance de quatre couleurs devint dès lors une conjecture bien établie, et suscita de nombreux travaux pendant tout le XXème siècle ; ils sont d'ailleurs pour beaucoup dans la naissance de la théorie des graphes.

Parmi les résultats positifs des travaux entrepris, voici un exemple de théorème, dû à Whitney (1931), qui ramène le cas général à une classe plus restreinte de cas ; *pour démontrer la conjecture des quatre couleurs, il suffit de montrer qu'on peut colorier avec quatre couleurs toute carte dessinée sur la sphère dont chaque pays a une portion de territoire sur l'équateur* [**7**]. En 1976, il fut annoncé par Appel et Haken que la conjecture des quatre couleurs était démontrée « à l'aide d'ordinateurs ». La complexité de la démonstration est liée au fait qu'il faut dresser des listes de configurations particulières, à examiner ; l'ordinateur est utilisé d'une part pour établir ces listes (dont Appel et Haken ne savaient pas *a priori* qu'elles seraient finies) et d'autre part pour analyser les cas. Sans machine, il est absolument hors de question de tout vérifier, ni dans l'argument original de Appel et Haken (qui nécessitait d'ailleurs des corrections ici et là), ni dans les variantes mises au point depuis [**8**]. La réponse apporte donc autant de frustration que de satisfaction, *et le sujet est loin d'être clos.*

Du point de vue du mathématicien, l'histoire de la période 1850—1980 est bien racontée dans le livre de Saaty et Kainen [2], et la suite dans [**9**] ; voir aussi [**10**].

Droit : quelques questions concernant le point triple entre la France, l'Italie et la Suisse

Brièvement dit, ce point triple est au sommet du Mont Dolent [11]. Ce n'est un point triple que depuis 150 ans, puisque c'est dans le Traité de Turin du 24 mars 1860 que « S.M. le roi de Sardaigne consent à la réunion de la Savoie et de l'arrondissement de Nice à la France .... ». (Les noms ont changé depuis : le Dolent s'appelait alors le Mont Grapillon.)

Pourtant, il y a des difficultés, dues à plusieurs raisons. D'abord, en 1860, personne n'avait gravi le Dolent, dont on sait aujourd'hui qu'il culmine à 3820 m. Ce n'est que le 9 juillet 1864 que des alpinistes en ont atteint le sommet ; parmi eux, Edward Whymper, plus connu pour avoir participé (et survécu) à la tragique première ascension du Cervin, le 14 juillet 1865. Ensuite, et moins anecdotiquement, il y a bien eu

- une convention franco-suisse du 10 juin 1891 pour délimiter la partie de la frontière allant du Dolent au lac Léman, et donc en particulier le point triple qui nous intéresse ici ;
- une convention du 24 juillet 1941 qui décrit la frontière italo-suisse, et donc en particulier ce « même » point triple ;
- mais les descriptions sont incompatibles, et la distance entre les deux déterminations est d'environ 144 mètres.

Les rédacteurs de ces conventions ne savaient peut-être pas que le Dolent possède une arête sommitale enneigée et à peu près horizontale d'environ 150 mètres. Et surtout,

- il n'y eut jamais de convention tripartite italo-franco-suisse pour déterminer précisément les frontières dans cette région.

L'ambiguïté de la description des frontières près du Dolent est loin d'être une exception. Le livre de Schröter abonde d'exemples où les difficultés sont de toutes sortes. Il y en a de faciles à comprendre : un barrage modifie la ligne médiane d'une rivière prise comme définition de la frontière, la fonte des glaciers modifie la ligne de partage des eaux sur la crête des Alpes, la construction des tunnels pose des problèmes qu'il n'était pas naturel d'imaginer il y a deux siècles. Il y en a d'autres plus coriaces à débrouiller : pour la frontière entre l'Allemagne et la Suisse, longue de 382 kilomètres, « il n'existe aucun instrument général de délimitation de la frontière (...), ni même d'instrument bilatéral gemano-suisse relatif à la maintenance de la frontière » (cité de [1], page 41). Il faut donc se référer à une multitude de protocoles, conventions, et autres documents, rédigés entre 1815 et aujourd'hui, d'accessibilité souvent loin d'être immédiate, et fréquemment incompatibles deux à deux ; un salmigondis de coutumes et de traités anciens !

D'où, entre autres, cette monumentale thèse de droit, devenue le livre de Schröter. Fondamental par les questions qu'il soulève, et délectable par les anecdotes dont il fourmille. Parmi les conclusions de l'étude :

- l'imprécision des frontières arrange beaucoup de monde,
- il faut faire un sort à la notion de « frontière naturelle », qui est une invention des nationalismes du XIXème siècle et qui ne correspond à aucune réalité antérieure.

(Cette thèse semble avoir eu un large écho parmi des lecteurs plus coutumiers de ces domaines que moi, voir par exemple [12].)

Géographie et politique

Hors des mathématiques, la réalisation des cartes a souvent des enjeux autrement explosifs que celui des relations entre la Suisse et ses voisins. Voici ce qu'écrit le journaliste Dominique Vidal, notamment membre de la rédaction du *Monde diplomatique* [13].

« Une dernière raison concerne la profession de journaliste. Un des travers de ce métier, c'est la possibilité qu'il offre de tourner autour du pot, en remplaçant la réponse à une question claire par quelques phrases alambiquées — ou empruntées à la fameuse langue de bois. Le cartographe ne jouit pas de cette facilité : il doit tracer, ou non, avec des traits pleins ou tiretés, la frontière entre le Maroc et le Sahara occidental ; rattacher, ou non, le Haut-Karabakh à l'Arménie ; faire figurer, ou non, Taïwan comme Etat ; écrire « golfe Persique », « Arabique », ou encore « Arabo-Persique » ; appeler la mer qui sépare le Japon et la Corée du Sud « mer du Japon » ou « mer de l'Est », etc. Bref, c'est parce qu'elle engage le cartographe que la carte médiatise la relation de l'être humain au monde. »

Pour en lire plus sur ce thème, voir [14]. Pour un autre exemple de conflit de frontière, le conflit Argentine-Chili résolu en 1984, voir [15].

Et l'usage des couleurs lui-même n'est pas innocent. En témoignent quelques phrases du cartographe Philippe Rekacewicz relevées (aussi fidèlement que possible) dans une émission de radio [16] : « On cartographie le monde tel qu'on aimerait qu'il soit », « Il n'y a pas de carte sans intention », « L'utilisation du rouge pour montrer les aspects négatifs. [Je suis] très tenté de montrer les colonies israéliennes à Jérusalem-Est et dans le reste de la Cisjordanie en rouge (...) pas très envie de les dessiner en bleu très joli, très paisible ».

Il y a bien d'autres sources de problèmes que l'imprécision résiduelle des GPS perfectionnés ou que la difficulté des démonstrations de Appel et Haken [17].

Encore trois digressions, sans rapports ou presque les unes avec les autres

Puisque les lecteurs pointilleux sur l'unité de matière ont très probablement décroché depuis longtemps, voici quelques remarques de plus, la plupart suggérées par d'actifs relecteurs (merci a Michèle Audin, Didier Henrion, Pierre Lescanne et Nicolas Schabanel).

(1) En 1889 déjà, Percy John Heawood a posé et partiellement résolu le *problème des empires*. Il s'agit de colorier des cartes représentant des empires, dont chacun peut avoir de nombreuses colonies. Plus précisément, pour tout entier M, appelons comme Martin Gardner *carte d'M-pires* une carte représentant des empires dont chacun a au plus M territoires d'un seul tenant. Un *coloriage propre* d'une telle carte assigne une couleur à chaque M-pire, de telle sorte que deux territoires adjacents faisant partie de deux M-pires différents ne soient jamais de la même couleur [18]. Dans l'article original, Heawood a montré qu'il suffit de disposer de $6M$ couleurs pour colorier toute carte d'M-pires, et que 12 couleurs sont nécessaires lorsque $M = 2$. C'est un résultat de Jackson et Ringel, de 1984, que $6M$ couleurs sont nécessaires pour tout $M \geq 2$ [19].

(2) S'il y a d'autres cartes que celles du théorème des quatre couleurs ou celles de géographes, il y a aussi des points triples d'autre types. L'un des plus étudié est une notion de thermodynamique : étant donné une substance existant sous plusieurs états, par exemple l'eau qui peut être solide (glace), liquide ou gazeuse, il s'agit d'un point sur un plan muni de deux axes, l'un pour les températures et l'autre pour les pressions. Chaque état ne peut exister que dans un domaine bien précis de température et de pression, et un *point triple* est alors un point dont les coordonnées T et p sont une température et une pression auxquelles coexistent trois états. Ainsi, pour l'eau, T vaut $0,01$ degré centigrade et p vaut 611 pascal.

(3) Parmi les écrivains majeurs du XXe siècle, Georges Perec fut certainement l'un de ceux qui goûtait le plus aux charmes des mathématiques. Michèle Audin me signale ce passage du chapitre LXXX de *La vie mode d'emploi*, à propos d'une carte utilisée par les tribus côtières du golfe de Papouasie.

« ... un réseau extrêmement fin de tiges de bambou indique les courants marins et les vents dominants ; çà et là sont disposés, apparemment au hasard, des coquillages (cauris) qui représentent les îles et les écueils. Par rapport aux normes adoptées aujourd'hui par tous les cartographes, cette « carte » semble une aberration : elle n'offre à première vue ni orientation, ni échelle, ni distance, ni représentation des contours ; en fait, il paraît qu'elle se révèle à l'usage d'une efficacité incomparable .... »

Pour sûr une carte posant d'autres problèmes mathématiques que le coloriage des pays.

Notes

[1] François Schröter, *Les frontières de la Suisse : questions choisies*, Schulthess, Genève-Zurich-Bâle 2007 (environ 700 pages).

[2] Thomas L. Saaty et Paul C. Kainen, *The four-color problem, assaults and conquest*, McGraw-Hill 1977. Pour une source plus courte, voir aussi l'article de T.L. Saaty, *Thirteen colorful variations on Guthrie's four-color conjecture*,

American Mathematical Monthly **79**:1 (January 1972), 2—43.

[3] Théorème 3.5 de [2].

[4] Sur la carte du monde, il existe de rares Etats dont la frontière n'a aucun point triple : le Lesotho, qui est entièrement entouré de la République d'Afrique du Sud, ou la Cité du Vatican, pour autant que ce soit un Etat. Il peut aussi exister des points quadruples, par exemple celui commun au Zimbabwe, à la Zambie, à la Namibie, et au Botswana (à moins qu'il n'existe là que deux points triples très rapprochés ?). Mais le cas des points triples est de très loin le plus courant : on en compte une cinquantaine dans le continent européen. Les cartes imaginaires peuvent contenir des points quintuples, sextuples, etc.

[5] http://www.europa-planet.com/carte_europe.htm

[6] C'est d'ailleurs la seule condition. Plus précisément, voici un théorème : *pour qu'une carte puisse être coloriée par trois couleurs, il suffit que chaque pays soit adjacent à un nombre pair de pays* (théorème 2.5 de [2]). Deux pays sont *adjacents* s'ils partagent un morceau de frontière de longueur strictement positive.

[7] Voir le théorème 4.8 de [2]. Notre formulation tente d'éviter l'usage des notions de « graphe dual » et de « graphe hamiltonien ». Enoncé plus standard : *si tout graphe plan hamiltonien peut être colorié avec quatre couleurs, alors tout graphe plan (hamiltonien ou non) peut être colorié avec quatre couleurs.*

[8] Voir **ici**. Voir par ailleurs la page de **Yuri Matyasevich**.

[9] Robin Thomas, *An update on the four-color theorem*, Notices of the AMS, **45**:7 (August 1998), 848—859.

[10] Georges Gonthier, *Formal proof — the four-color theorem*, Notices of the AMS, **55**:11 (December 2008), 1382—1393.

[11] Situé à 20 km. au nord-est du Mont-Blanc. **Photo**.

[12] Lire aussi *Domaine Public*, No 1742 du 13 août 2007. Voir **ici**.

[13] Voir **ici.**

[14] Philippe Rekacewicz, *La cartographie, entre science, art et manipulation*, Le Monde diplomatique, février 2006. Voir **ici**.

[15] Argentine et Chili, voir **ici** et **là**.

[16] Radio Suisse Romande Espace 2, émission *Les temps qui courent*, 14 mai 2009 ; suite à la publication de *Atlas 2009 --- un monde à l'envers*, Hors série du *Monde diplomatique*, mars 2009. Voir **ici.**

[17] Merci à Shalom Eliahou pour plusieurs remarques amicalement coloriées.

[18] On trouve **ici** des illustrations d'exemples historiques de quelques empires coloniaux.

[19] voir **ici.**

Quadripoint

En géographie, un **quadripoint** est un point de la surface de la Terre qui touche quatre régions distinctes, c'est-à-dire où quatre frontières différentes se rejoignent.

Sommaire

Quadripoints internationaux

Actuellement, il n'existe aucun quadripoint généralement reconnu entre quatre pays différents, bien qu'il ait été soutenu qu'un tel point existe dans le Zambèze, à l'Ouest des chutes Victoria, entre le Botswana, la Namibie, la Zambie et le Zimbabwe[1].

Il existe cependant plusieurs endroits où quatre lignes frontalières se rejoignent en un point, mais ces frontières ne concernent à chaque fois que deux pays :

- La commune néerlandaise de Baarle-Nassau et la commune belge de Baarle-Hertog possèdent un territoire fragmenté, avec de nombreuses enclaves. Parmi celles-ci, deux des enclaves belges aux Pays-Bas se touchent en un point, créant ainsi un quadripoint entre les deux pays.
- De façon similaire, le Bangladesh et l'Inde possèdent de nombreuses enclaves dans la région du Cooch Behar, et deux des enclaves indiennes cerné par le territoire bengladeshi se rejoignent en un point.
- La ville autrichienne de Jungholz est rattachée au reste du pays en un point et est entièrement entourée par l'Allemagne.

Les revendications territoriales sur l'Antarctique ne sont pas reconnues au niveau international. Si c'était le cas, le pôle Sud serait le point de rencontre de sept pays (Argentine, Australie, Chili, France, Norvège, Nouvelle-Zélande et Royaume-Uni), soit donc un heptapoint.

Tripoints proches

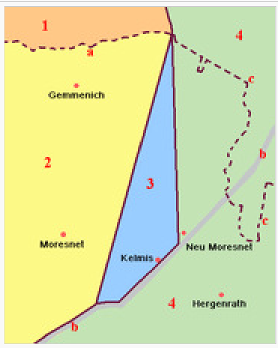
En plusieurs endroits, deux tripoints sont très proches l'un de l'autre et peuvent donner l'impression — avec une carte ne possédant pas une échelle suffisante — qu'un quadripoint existe :

- Les tripoints Kazakhstan-Chine-Russie (49°05'46"N 87°18'43"E) et Mongolie-Chine-Russie (49°10'34"N 87°50'02"E) sont distants d'environ 40 km.
- Les frontières entre le Botswana, la Namibie, la Zambie et le Zimbabwe ne sont pas très bien délimitées ; il ne semble pas exister de quadripoints entre ces quatre pays (vers 17°48'S 25°16'E), mais les tripoints sont en tout cas très proches.
- Le lac Tchad borde quatre pays, mais il n'existe pas de quadripoint à l'intérieur du lac entre le Cameroun, le Niger, le Nigeria et le Tchad (vers 13°00'N 14°00'E)
- Dans le golfe d'Aqaba, il n'existe pas de quadripoint entre l'Arabie saoudite, l'Égypte, Israël et la Jordanie (vers 29°26'N 34°55'E).

Le lac Tchad et les frontières des pays qui le bordent.

Quadripoints historiques

- Entre 1839 et 1919, l'existence du Moresnet créa un quadripoint international entre ce pays, l'Allemagne, la Belgique et les Pays-Bas (50°45'N 06°01'E). L'annexion du Moresnet par la Belgique après la Première Guerre mondiale mit fin à son existence.
- Entre 1922 et 1991, un quadripoint existait entre l'Arabie saoudite, l'Irak, le Koweït et la zone neutre Arabie saoudite-Irak (29°06'N 46°33'E), mais les frontières précises entre les pays ne furent jamais explicitement spécifiées. Il cessa d'exister à la disparition de la zone neutre.



Carte du Moresnet

Quadripoints secondaires

S'il n'existe pas de quadripoint au niveau international séparant quatre pays différents, il est possible d'en trouver au niveau des subdivisions d'un ou plusieurs de ces pays (par exemple entre quatre provinces, États, cantons, communes, etc…).

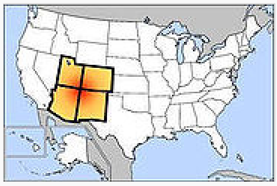
Canada

Au Canada, les *Four Corners* sont un point situé à 60° N 102° W est probablement un quadripoint entre les provinces du Manitoba et de la Saskatchewan, et les territoires du Nord-Ouest et du Nunavut. La définition légale du Nunavut semble indiquer que la création d'un tel point était dans l'intention du parlement du Canada[2] ; il n'est pas impossible cependant que la frontière du Manitoba et de la Saskatchewan ne soit pas précisément située sur le méridien de 102° Ouest dans le système géodésique WGS 84.

Carte du quadripoint canadien

États-Unis

- Les *Four Corners* est le seul point des États-Unis où quatre États se rencontrent (l'Arizona, le Colorado, le Nouveau-Mexique et l'Utah).
- En Floride, les cinq comtés de Glades, Hendry, Martin, Okeechobee et Palm Beach se rencontrent à l'intérieur du lac Okeechobee.



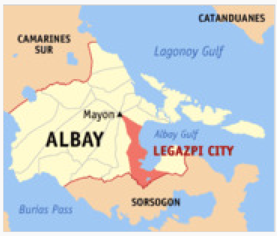
Carte des *Four Corners*

Finlande

En Finlande, les communes d'Aura, Masku, Mynämäki, Nousiainen, Pöytyä, Turku, Vahto et Yläne se rencontrent dans le parc national de Kurjenrahka, formant un octopoint.

Philippines

- Huit munipalités ou villes de la province d'Albay, aux Philippines, y compris la ville de Legazpi se rencontrent à l'intérieur du cratère du Mayon.
- Sur l'île de Mindanao, les quatre provinces de Bukidnon, Cotabato, Davao del Norte et Davao del Sur se rejoignent en un point (probablement l'un des trois sommets du mont Apo).

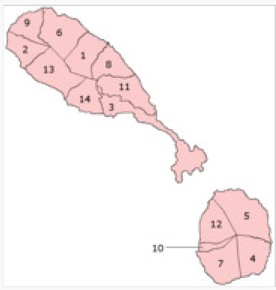


Carte de la province d'Albay, aux Philippines. La ville de Legazpi est mise en évidence en rouge. L'octopoint se situe au niveau du Mayon, au nord-ouest de Legazpi.

Saint-Christophe-et-Niévès

Dans l'État de Saint-Christophe-et-Niévès :

- À l'ouest de l'île Saint-Christophe, les paroisses de Saint-Anne Sandy Point (2), Saint-John Capisterre (6), Saint-Paul Capisterre (9) et Saint-Thomas Middle Island (13) se rencontrent en un point.
- Les cinq paroisses de l'île Nevis : Saint-George Gingerland (4), Saint-James Windward (5), Saint-John Figtree (7), Saint-Paul Charlestown (10) et Saint-Thomas Lowland (12), se rencontrent au centre de l'île.



Carte de Saint-Christophe-et-Niévès indiquant la division du pays en paroisses

Suisse

Dans le canton de Genève, le pont Bochet marque le quadripoint entre les communes de :

- sur la rive droite : Choulex en amont et Vandoeuvres en aval ;
- sur la rive gauche : Puplinge en amont et Thônex en aval.