ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE - Partie D

TITRE :

Découpage et recollement

Temps de préparation : ……………………………..…………. 2 h
Temps de présentation devant les examinateurs : ………….. 10 minutes
Entretien avec les examinateurs : …………………………... 10 minutes
Commentaire sur l'épreuve après le passage : ……………… 10 minutes

Vous devez vous présenter en L101 au bout des 2h de préparation. Le trajet jusqu'à la salle est inclus dans les 2h !

GUIDE POUR L'ETUDE DU DOSSIER :

Le dossier ci-joint comporte au total : 15 pages.

Document principal (12 pages, dont celle-ci) *: Aires et volumes : découpage et recollement,* texte de Daniel Perrin paru dans la revue Images des mathématiques (26 novembre 2010) éditée par le CNRS. Ce texte est la seconde partie d'un article, dont la première partie est consacrée aux découpages dans le plan. On y démontre que deux polygones de même aire sont équivalents par découpage et recollement.

Annexe (3 pages) : *Une « vie brève » de Max Dehn*, texte de Michèle Audin paru dans la revue Images des mathématiques (8 septembre 2010) éditée par le CNRS.

Travail **suggéré** :

Lire très rapidement l'annexe pour situer le contexte du texte principal. Lire ensuite rapidement le texte principal et en dégager une synthèse.
Il est suggéré de ne pas faire une présentation linéaire du texte, mais de mettre l'accent sur un des résultats principaux et d'en montrer les conséquences d'un point de vue général.
L'exposé devra comporter une démonstration, mais il est conseillé de d'abord s'attacher à dégager une problématique et à la mettre en perspective, avant de plonger dans la technique proprement dite.

CONSEILS GENERAUX POUR LA PREPARATION DE L'EPREUVE :
* Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable (maximum 30 minutes).
* Réservez du temps pour préparer l'exposé devant les examinateurs.
* Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper …
* En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, *etc.*) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêt(e) à débuter votre exposé.

Aires et volumes : découpage et recollement

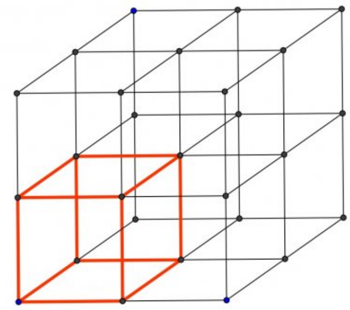
Le 26 novembre 2010 par Daniel Perrin [1]

1 La mesure des volumes, généralités

1.1 Résumé de l'épisode précédent

Dans la première partie de ce texte, nous avons étudié le comportement des aires vis à vis de la méthode de découpage et recollement et montré notamment le théorème de Bolyai : deux polygones de même aire sont équivalents par découpage et recollement [2]. Nous abordons maintenant le cas des volumes.

1.2 Propriétés élémentaires

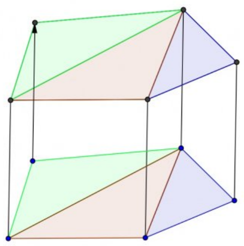


Le cube d'arête double a un volume multiplié par huit.

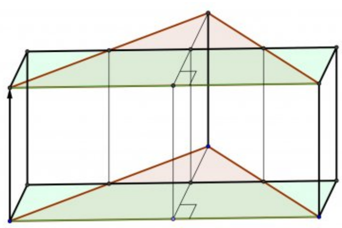
La théorie des volumes, au moins au départ, est très proche de celle des aires. Elle vérifie aussi les propriétés d'additivité et d'invariance par isométrie, donc d'invariance par découpage et recollement. Nous supposerons connue la formule du volume du parallélépipède rectangle comme produit de ses trois dimensions, même si ce résultat requiert (en général) un passage à la limite.
Comme dans le plan, on a aussi une propriété d'homogénéité, mais cette fois, comme on est en dimension 3, c'est par le cube du rapport qu'il faut multiplier les volumes, comme on le voit aussitôt dans le cas du doublement du cube. Cependant nous éviterons d'utiliser cette propriété. Pour comprendre pourquoi, voir plus loin.

1.3 La théorie d'Euclide

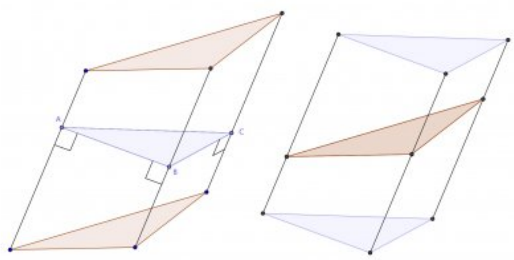
Euclide établit, en utilisant uniquement découpage et recollement, nombre de résultats. Par exemple, il montre que le volume d'un prisme droit est le produit de l'aire de sa base par sa hauteur. Par découpage, on se ramène au cas d'un prisme à base triangulaire et on utilise ensuite le découpage du triangle pour passer d'un prisme droit à base triangulaire à un parallélépipède rectangle.



Découpage d'un prisme en prismes à bases triangulaires



Découpage d'un prisme droit à base triangulaire en un parallélépipède rectangle



On peut aussi découper un prisme oblique pour le ramener à un prisme droit, puis à un parallélépipède rectangle. Il suffit pour cela de le couper par un plan perpendiculaire aux arêtes (le plan bleu de la figure ci-dessus) et de

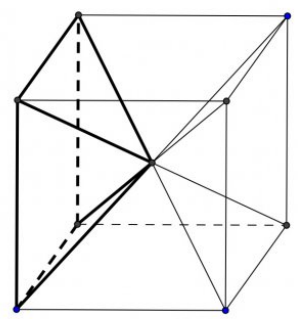
1. Article tiré du site Images des mathématiques, disponible en ligne à l'url http ://images.math.cnrs.fr/Aires-et-volumes-decoupage-et,725.html

2. Comme le précédent, ce texte a bénéficié des critiques pertinentes de Marie-Claude David et de l'aide précieuse de Nelly Bonavent. Il doit aussi beaucoup à Daniel Meyer. C'est lui qui a attiré mon attention sur le texte de Bricard, injustement oublié aujourd'hui, et sur le remarquable article de Benko. Il m'a signalé aussi la difficulté concernant la propriété d'homogénéité. Enfin, nous avons beaucoup échangé (sans conclure totalement) sur les questions de paternité des résultats entre Bricard et Dehn. Je le remercie chaleureusement pour tout cela.

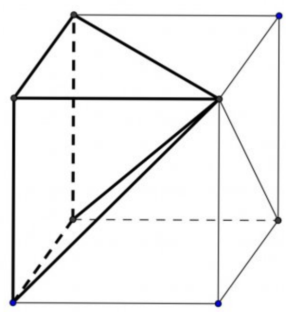
passer le morceau du haut en dessous de l'autre. On en déduit que la formule du volume d'un prisme quelconque est toujours la même : *base* $\times$ *hauteur*.

1.4 Le volume de la pyramide

Là où les choses sont plus délicates, c'est pour le volume de la pyramide. On sait qu'alors le volume est le tiers du produit *base* $\times$ *hauteur* et l'on peut assez facilement découvrir cette formule (dès le collège) dans des cas particuliers. Par exemple, les six pyramides ayant pour sommet commun le centre d'un cube d'arête a et pour bases les faces du cube ont toutes même volume (on passe de l'une à l'autre par rotation), et ce volume est donc le sixième du volume du cube : $a^3/6$. On vérifie alors que ce volume est bien le tiers du produit *base* $\times$ *hauteur*. En effet, la base d'une telle pyramide est une face du cube, donc d'aire a^2, et sa hauteur est une moitié d'arête $a/2$, et on a bien $\dfrac{a^3}{6} = \dfrac{1}{3} \times a^2 \times \dfrac{a}{2}$. De même les trois pyramides dont le sommet est un sommet du cube et dont les bases sont les faces du cube qui ne contiennent pas ce sommet, ont pour volume le tiers du volume du cube comme annoncé par la formule $\dfrac{1}{3} \times a^2 \times a$.



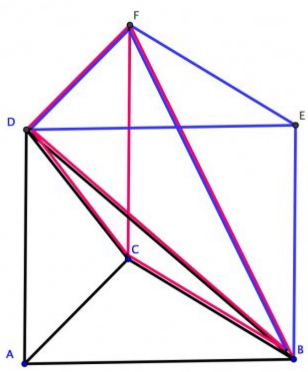
Découpage du cube en six pyramides isométriques



Découpage du cube en trois pyramides isométriques

En revanche, la démonstration de la formule dans le cas général n'est pas évidente, c'est même un des sommets de la mathématique d'Euclide. Bien entendu, en découpant la base en triangles, on se ramène aussitôt au cas d'une pyramide à base triangulaire. Le point difficile est alors de montrer le lemme suivant :

Lemme 1 *Deux pyramides qui ont des bases (triangulaires) de même aire et des hauteurs égales ont des volumes égaux.*

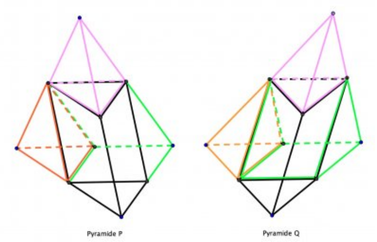


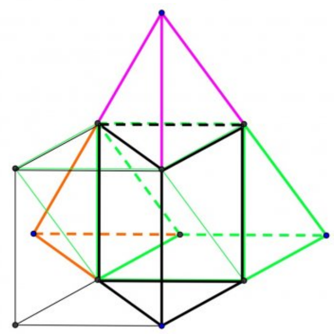
Si on a établi ce lemme, on montre facilement que le volume d'une pyramide est donné par la formule. La méthode consiste, pour calculer le volume de la pyramide de sommet D et de base ABC à considérer le prisme de bases parallèles ABC et DEF. On sait que son volume est le produit de l'aire de ABC par h (où h est la hauteur du prisme, comme de la pyramide). On découpe alors le prisme en trois pyramides : la pyramide initiale noire $P_1 = (D, ABC)$ (sommet D, base ABC) et les pyramides bleue $P_2 = (B, DEF)$ (sommet B, base DEF) et rose $P_3 = (B, CDF)$ (sommet B, base CDF). Il suffit de montrer que toutes trois ont le même volume qui sera alors le tiers du volume du prisme. Pour P_1 et P_2, c'est le lemme appliqué avec les bases ABC et DEF, qui sont bien de même aire. Pour P_1 et P_3 c'est encore le lemme avec les bases ACD et CDF (ce sont deux moitiés d'un parallélogramme, donc elles ont même aire).

1.5 Le lemme des pyramides de même base et même hauteur

Il reste à prouver le lemme. C'est ce que fait Euclide, au moyen du raisonnement ci-dessous, que je considère pour ma part comme un chef-d'œuvre. Ce raisonnement est le modèle de ce qu'on appelle la méthode d'exhaustion.

1.5.1 Premier découpage





On a deux pyramides P et Q, avec des bases de même aire et des hauteurs égales. On découpe P et Q, comme indiqué sur la figure, en utilisant les milieux des arêtes, en deux pyramides (rose et orange), l'une au-dessus, l'autre en bas à gauche et deux prismes (noir et vert), l'un debout, l'autre couché.
La première chose à noter c'est que les deux prismes noir et vert de P (ou de Q) ont même volume. En effet chacun d'eux peut être vu comme la moitié d'un parallélépipède (l'un vert, l'autre noir) qui a pour base un parallélogramme dont l'aire est la moitié de la base des pyramides et pour hauteur la moitié de la hauteur des pyramides.
Ensuite, on note que les prismes noirs de P et Q ont même volume. En effet, la base du prisme noir de P est le quart de la base de P et sa hauteur la moitié de la hauteur de P et c'est la même chose pour Q. Ils ont donc même volume puisque P et Q ont même base et même hauteur. Bien entendu, la même chose vaut pour les prismes verts, puisqu'ils ont même volume que les noirs.
Par ailleurs, chacune des petites pyramides peut être glissée dans le prisme noir par une translation, de sorte que le volume total des deux petites pyramides de P est plus petit que celui des deux prismes, donc est plus petit que la moitié du volume de P, et de même pour Q.

1.5.2 Itération du procédé

L'étape suivante consiste à retirer les prismes. Il reste deux pyramides de chaque côté, avec des bases de même aire (le quart de celle de la pyramide initiale) et même hauteur (la moitié de la hauteur initiale). On recommence alors la même opération avec ces pyramides : on les découpe chacune en deux prismes et deux pyramides, on enlève les prismes. Il reste quatre pyramides de chaque côté, mais leur volume total est plus petit que le quart du volume de P ou de Q. On recommence l'opération avec les pyramides restantes et ainsi de suite. Au n^{e} coup, après avoir retiré tous les prismes, il restera 2^n petites pyramides dont le volume sera plus petit que $1/2^n$ fois le volume de P ou de Q.
Dans tout ce processus, toute la partie formée par les prismes a même volume côté P et côté Q (car c'est vrai à chaque étape). La différence de volume entre P et Q, s'il y en a une, ne provient donc que des pyramides résiduelles. On va voir que c'est impossible. Supposons en effet que P et Q n'aient pas même volume, disons par exemple que P est plus grand que Q, et, pour fixer les idées, que la différence de volume est plus grande qu'un centimètre cube, alors que le volume de P est un décimètre cube. On a vu que, lors de la première opération, les pyramides restantes sont en tout de volume plus petit qu'un demi décimètre cube. À la deuxième opération, elles sont plus petites qu'un quart de décimètre cube. À la dixième opération, elles sont plus petites qu'un millième (car $2^{10} = 1024 > 1000$) de décimètre cube c'est-à-dire qu'un centimètre cube. Mais alors, la différence de volume entre P et Q, qui ne provient que de la différence entre les petites pyramides du cran 10, est plus petite qu'un centimètre cube, ce qui est absurde.
Le raisonnement qui vient d'être fait en supposant la différence de volume de l'ordre du millième peut s'étendre au cas général : on peut rendre le volume des pyramides résiduelles aussi petit qu'on veut [3] et plus petit que la différence de volume supposée entre P et Q, ce qui est absurde puisque cette différence ne provient que de ces petites pyramides.

3. On utilise ici une variante de l'axiome d'Archimède : on peut toujours, en découpant un volume, si grand soit-il, en un nombre fini de parties égales, le rendre plus petit que n'importe quel volume donné.

1.5.3 Remarque

On notera que, contrairement au calcul de l'aire du triangle qui se fait par un découpage fini, le processus utilisé ici nécessite un nombre d'étapes qui peut être arbitrairement grand. C'est en fait un «passage à la limite» : on voit le volume de la pyramide comme la limite du volume des morceaux prismatiques quand on augmente le nombre de morceaux (les pyramides résiduelles étant de plus en plus petites). Cela nous amène aussitôt à la question suivante.

2 Découpage des polyèdres : troisième problème de Hilbert et invariant de Dehn

2.1 Le problème

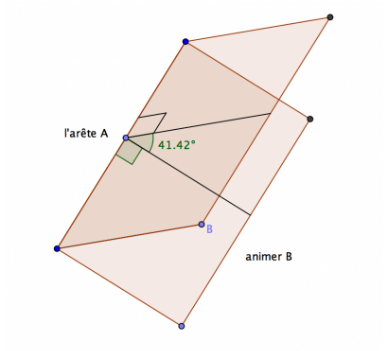
C'est l'analogue dans l'espace du problème résolu par Bolyai dans le plan. La question est de savoir si deux polyèdres de même volume sont équivalents par découpage et recollement (en un nombre fini de polyèdres). Si tel était le cas, cela signifierait que tout calcul de volume d'un polyèdre (par exemple celui de la pyramide d'Euclide) peut se faire par découpage et recollement fini, sans utiliser un passage à la limite ou la méthode d'exhaustion vue ci-dessus. De nombreux mathématiciens, et notamment Gauss, se sont posé la question de savoir si ce processus infini, avec le recours à l'axiome d'Archimède, était indispensable.
Ce problème, qui n'est pas facile, est résolu par la négative vers 1900. Il y a d'abord eu une solution, pas tout à fait rigoureuse mais qui contenait tout de même une idée essentielle, de Raoul Bricard, en 1896, que nous allons évoquer ci-dessous. Sans doute cette solution est-elle passée inaperçue, ou a-t-elle été considérée comme incorrecte, car le problème de montrer l'égalité du volume de deux tétraèdres [4] ayant des bases et des hauteurs égales est le troisième des 23 problèmes posés par David Hilbert à ses collègues lors du deuxième Congrès international des mathématiciens, à Paris en 1900. Si certains des problèmes de Hilbert sont encore ouverts aujourd'hui, celui-là a eu une existence brève (indépendamment de la tentative de Bricard) puisque la solution a été apportée par Dehn dès 1900. Comme on l'a dit, la réponse, contrairement au cas du plan, est négative. En particulier, il est impossible de découper un cube en un nombre fini de polyèdres et de reconstituer un tétraèdre régulier (de même volume) à partir des morceaux. La vie de Dehn, et le troisième problème de Hilbert, sont également évoqués dans un portrait écrit par Michèle Audin.

2.2 Découpages réguliers : la preuve de Bricard

Nous allons donner une idée de la preuve du résultat annoncé : il n'existe pas [5] de puzzle permettant de transformer un cube en un tétraèdre régulier.

2.2.1 Dièdres

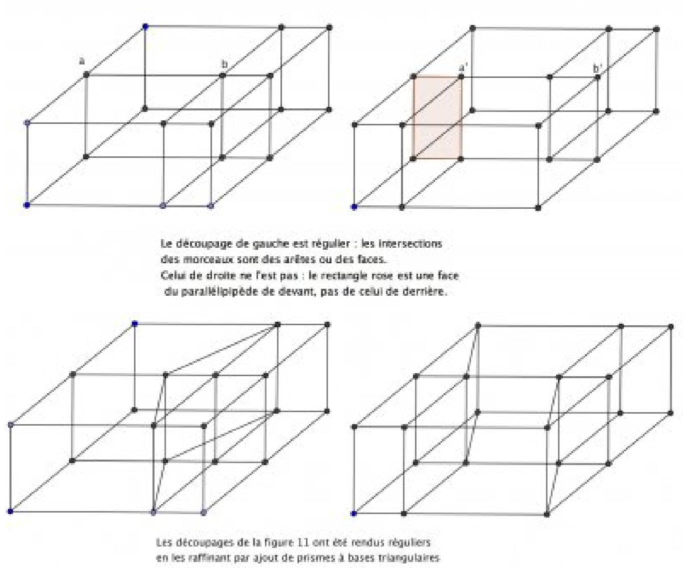
Rappelons d'abord ce qu'est un angle dièdre d'un polyèdre P. On considère une arête A de P, elle est commune à deux faces de P. On trace un plan perpendiculaire à l'arête, qui coupe les faces selon deux demi-droites. Par définition, l'angle dièdre de P en A est l'angle de ces demi-droites. On le mesurera en degrés.



4. Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire. Il est dit régulier si toutes ses arêtes sont de même longueur.
5. C'est dommage : cela ferait un joli casse-tête.

2.2.2 La situation

Considérons deux polyèdres P et Q équivalents par découpage et recollement. Cela veut dire qu'on a découpé P en des polyèdres $P_1, P_2, \ldots, P_n$, qu'on a déplacé les P_i, obtenant ainsi de nouveaux polyèdres $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, et qu'on a recollé ceux-ci en Q. Nous supposerons de plus que le découpage de P (de même que celui de Q) est régulier. Cela signifie que les morceaux P_i sont soit disjoints (ils n'ont rien en commun), soit ont en commun un sommet, ou une arête, ou une face. C'est une condition restrictive comme on le voit sur la figure où deux des polyèdres ont en commun une partie qui est une face de l'un mais pas de l'autre. Dans de nombreux cas on peut se ramener à ce cas particulier en raffinant la décomposition.

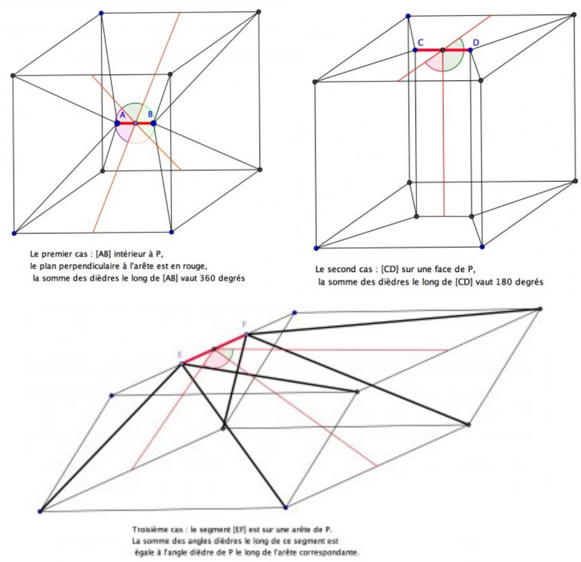


Par exemple on peut rendre les deux découpages réguliers en les raffinant par ajout de prismes à bases triangulaires (attention, la difficulté n'est pas tant de raffiner un découpage pour le rendre régulier que de raffiner simultanément les deux découpages en des découpages réguliers qui se correspondent). Avec cette hypothèse de régularité, et avec cette hypothèse seulement, la preuve de Bricard est correcte [6] (mais son résultat, lui, est toujours juste, voir [Benko]) et nous allons en donner un aperçu.

2.2.3 Le calcul de la somme des dièdres

L'idée est de comparer les dièdres de P et des morceaux P_i. Regardons une arête d'un P_i. Il y a plusieurs cas de figures.

1. Si cette arête est à l'intérieur de P, elle est commune à plusieurs morceaux P_i qui remplissent tout l'espace autour de l'arête, de sorte que si l'on ajoute tous les dièdres des P_i autour de $[AB]$, leur somme est de 360 degrés.
2. Si cette arête est à l'intérieur d'une face de P, là encore, elle est commune à plusieurs morceaux P_i, mais cette fois ils ne remplissent qu'un côté de l'espace (le côté où est situé P) et la somme des dièdres est de 180 degrés.
3. Si cette arête est sur une arête de P, les dièdres des P_i qui la contiennent forment un dièdre de P et la somme de leurs angles est l'angle du dièdre de P correspondant. S'il y a n arêtes des P_i le long d'une même arête de P on trouvera donc dans la somme n fois le dièdre de P.

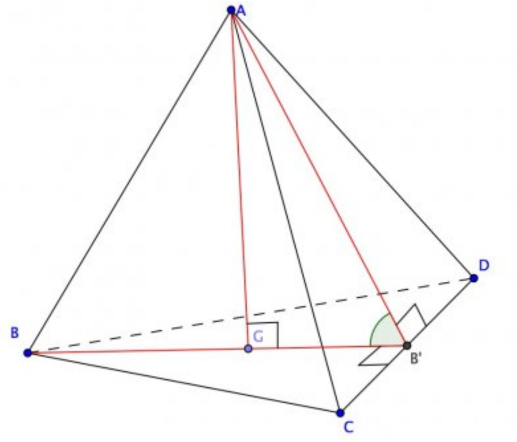


6. L'article de Bricard est rédigé de manière très sommaire et je ne suis pas sûr qu'il ait vu toutes les difficultés de la situation (la notion de découpage régulier est due à Hopf et elle est bien postérieure). Je ne sais pas si l'on peut toujours se ramener au cas régulier et réparer ainsi la preuve de Bricard. Boltianskii donne même des arguments – pas tout à fait convaincants – en sens inverse.

En définitive, si on ajoute tous les angles dièdres des P_i, on obtient une somme de tous les angles dièdres de P (provenant des arêtes du cas 3, chacun pouvant être compté plusieurs fois), plus un multiple entier de 180 degrés (provenant des arêtes des cas 1 et 2).
Mais, ce que nous avons fait avec P, nous pouvons aussi bien le faire avec Q : la somme des angles dièdres des Q_i est la somme des angles dièdres de Q (chacun éventuellement compté plusieurs fois), plus un multiple entier de 180 degrés.
Or, les P_i et les Q_i sont les mêmes polyèdres, simplement déplacés dans l'espace. Leurs angles dièdres sont donc les mêmes et leur somme aussi. On a donc montré qu'une somme des dièdres de P est égale à une somme des dièdres de Q (chacun éventuellement compté plusieurs fois), à un multiple entier de 180 degrés près.

2.2.4 Le cube et le tétraèdre régulier

Regardons alors le cube C et le tétraèdre régulier T. Pour le cube, les choses sont simples : tous ses dièdres valent 90 degrés et toute somme de ces dièdres, en nombre quelconque, donnera toujours un multiple entier de 90 degrés.
Si on peut découper le cube et obtenir un tétraèdre, c'est qu'on peut trouver une somme des dièdres de T (en comptant chacun plusieurs fois si nécessaire) qui soit un multiple entier de 90 degrés (on peut oublier les multiples de 180 car on a $180 = 2 \times 90$).



Le cosinus des angles dièdres du tétraèdre régulier vaut 1/3.

Or, les six dièdres de T sont tous égaux et, si leur valeur commune est notée a, on devrait avoir $n \times a = k \times 90$ avec n et k entiers. Mais cela n'est pas possible car le rapport $\dfrac{a}{90}$ serait égal à $\dfrac{k}{n}$, donc rationnel, et nous allons montrer que a est au contraire incommensurable à 90 (comme disaient les anciens), c'est-à-dire que $a/90$ est irrationnel.
Pour cela, il faut d'abord faire un peu de géométrie dans l'espace. Si l'on projette le sommet A du tétraèdre sur la base BCD, il tombe au centre de gravité G du triangle et on sait que ce centre est au tiers de la médiane $[BB']$. Comme les faces du tétraèdre sont des triangles équilatéraux tous de même taille, les médianes sont aussi les hauteurs et sont égales. L'angle dièdre le long de $[CD]$ est donc $a = \widehat{BB'A}$ et son cosinus vaut $\dfrac{B'G}{B'A} = \dfrac{B'G}{B'B} = \dfrac{1}{3}$.

Or, un angle a qui est tel[7] que $\cos a = 1/3$ ne peut pas être un multiple rationnel de 90 degrés, ou de 180 (c'est pareil). Cela résulte d'un petit calcul de trigonométrie. En effet, si on avait $a = \frac{p}{q} \times 180$, on aurait $qa = p \times 180$. Le cosinus de qa serait donc égal à $\cos(p \times 180) = \pm 1$. Mais, on montre facilement (si l'on se souvient des formules de trigonométrie[8]) que $\cos qa$ est de la forme $\dfrac{a_q}{3^q}$ où a_q est un entier non multiple de 3 et donc il ne peut être égal à ± 1. Faisons par exemple le cas $q = 2$ en détail pour comprendre le ressort de ce calcul. On a $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ (c'est une formule classique). Comme on a $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ (c'est une formule encore plus classique), on en déduit $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$ et donc ce cosinus là n'est pas égal à ± 1. Le cas général est analogue.

2.3 L'invariant de Dehn

La preuve de Dehn est un peu plus compliquée que celle de Bricard, mais elle présente le gros avantage d'être valable même si le découpage n'est pas régulier. L'idée est de prendre en compte, pour chaque arête, non

7. Une valeur approchée en degrés de a est $70,5287793655$, mais la valeur exacte a un développement décimal illimité et non périodique.
8. Le lecteur qui a tout oublié devra nous faire confiance !

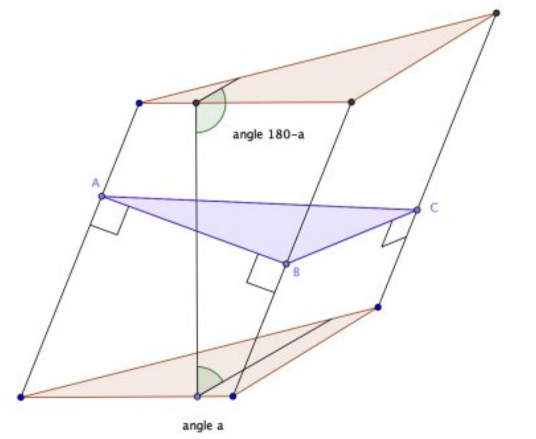
seulement l'angle dièdre, mais aussi la longueur de l'arête [9]. En langage moderne, on associe à un polyèdre P un invariant $\delta(P)$ (dit invariant de Dehn) qui se calcule avec les angles dièdres et les longueurs. Il habite dans un objet algébrique qu'on appelle un produit tensoriel, objet un peu compliqué dont je ne peux donner une idée en quelques mots. Le résultat de Dehn peut alors se formuler en disant : si P et Q sont équivalents par découpage et recollement, on a $\delta(P) = \delta(Q)$. On montre alors que pour le cube on a $\delta(C) = 0$, tandis que pour le tétraèdre régulier on a $\delta(T) \neq 0$.
La question de la réciproque (c'est-à-dire de préciser, finalement, à quelle condition deux polyèdres sont équivalents par découpage et recollement) est restée longtemps ouverte. Ce n'est qu'en 1965 que Sydler a montré : Deux polyèdres P et Q sont équivalents par découpage et recollement (avec des morceaux polyédraux) si et seulement si ils ont à la fois même volume et même invariant de Dehn. On peut considérer que ce résultat clôt le troisième problème de Hilbert.

2.4 Quelques conséquences

Les résultats précédents, et notamment la considération des angles dièdres, permettent d'éclairer certains découpages.

2.4.1 Prismes

En premier lieu, on a vu que tout prisme, même oblique, peut être découpé en un parallélépipède rectangle. On en a une explication en notant que la somme des dièdres d'un prisme (contrairement au cas du tétraèdre régulier) est un multiple entier de 180 degrés [10].



Pour le voir, on se ramène au cas d'un prisme à base triangulaire comme on l'a fait plus haut. On regroupe alors les dièdres de deux manières. Les dièdres des arêtes montantes sont les trois angles du triangle ABC, dont on sait bien que la somme est 180 degrés. Les dièdres de deux arêtes horizontales parallèles sont les angles successifs d'un parallélogramme et là encore, leur somme vaut 180 degrés. Autrement dit la somme des dièdres d'un prisme est, comme celle d'un cube ou d'un parallélépipède, un multiple entier de 180 degrés.

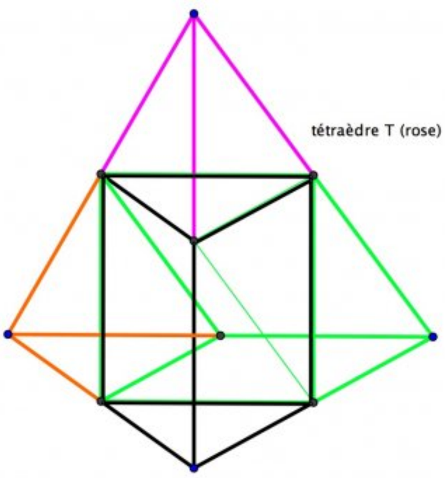
2.4.2 Pyramides découpables

Le même argument vaut dans le cas des pyramides «faciles»' du cube. Pour les six pyramides de sommet le centre du cube et de base une face du cube, on voit que les quatre angles dièdres à la base valent 45 degrés et les quatre au sommet 120 degrés. La somme des angles dièdres pour une pyramide est donc 660 degrés et pour les 6 pyramides, on a $6 \times 660 = 3960 = 22 \times 180$.
Il y a ensuite les pyramides dont le sommet est un sommet du cube et dont la base est une face du cube ne contenant pas ce sommet. Pour celles-là, on vérifie facilement qu'il y a cinq angles dièdres de 90 degrés, deux de 45 degrés et un de 120 degrés, soit en tout 660 degrés. Pour les trois pyramides, on a $3 \times 660 = 1980 = 11 \times 180$.

9. Le problème, dans la preuve de Bricard, c'est le cas où une arête est coupée en des nombres de morceaux différents entre P et Q comme l'arête $[ab]$ de la figure 11. Dans cet exemple, le dièdre correspondant au parallélépipède de devant est compté une seule fois dans P et deux dans Q.

10. Cette condition n'est pas suffisante en général pour assurer l'existence d'un découpage en un cube, mais, dans ce cas, elle est essentiellement équivalente à la nullité de l'invariant de Dehn.

2.4.3 Dehn et homogénéité



Le tétraèdre double T' est réunion de deux tétraèdres isométriques à T (rose et orange) et de deux prismes.

Un dernier point intéressant concerne la propriété d'homogénéité des volumes. Dans le plan, nous avons vu, cf. figure 6 (Partie I), que si l'on double les côtés d'un triangle, son aire est multipliée par 4 et que ce résultat peut être établi par découpage. Il n'en va pas de même dans l'espace en général. Bien sûr, on peut découper un cube double en 8 petits cubes (cf. figure 1), mais partons maintenant d'un tétraèdre régulier T, et considérons le tétraèdre T' obtenu en doublant toutes les arêtes de T. Alors, s'il est bien vrai que le volume de T' est égal à 8 fois celui de T, on ne peut pas montrer cette propriété uniquement par découpage et recollement car il n'existe pas de découpage permettant de passer de T' à 8 petits tétraèdres isométriques à T. En effet, le découpage d'Euclide, cf. figure 18, montre que T' se découpe en deux copies du tétraèdre T et deux prismes P, P'. Si l'on pouvait découper T' en 8 copies de T, on pourrait découper la réunion des prismes en 6 copies de T. Mais, on a vu qu'on pouvait découper un prisme pour en faire un parallélépipède rectangle et on pourrait donc découper les 6 tétraèdres pour en faire deux parallélépipèdes rectangles. Comme un tel parallélépipède a tous ses angles dièdres droits, le raisonnement de Bricard montre qu'une certaine somme des dièdres de T (chacun compté éventuellement plusieurs fois) devrait être un multiple de 180 degrés. Mais, tous les dièdres de T sont égaux à l'angle a rencontré plus haut [11] donc une telle somme est un multiple de a et l'on a vu que le rapport de a à 180 est irrationnel. Le découpage envisagé est donc impossible.

3 Quelques résultats plus difficiles : le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski, le théorème de Laczkovich

3.1 Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski

3.1.1 Le résultat

Il s'agit d'un extraordinaire théorème de découpage. Il va nous permettre de mesurer la puissance de l'un des plus mystérieux axiomes de la théorie des ensembles : l'axiome du choix.

Théorème 1 (Banach-Tarski, 1924) *Soient A et B deux parties bornées* [12] *de l'espace. Alors, on peut découper A en un nombre fini de morceaux, les déplacer, et reconstituer B avec ces morceaux.*

3.1.2 Commentaires

Le lecteur aura noté qu'on ne suppose pas que A et B ont même volume. Inutile de dire qu'on ne sait pas faire explicitement ces découpages et que les morceaux ne sont certainement pas simples. Pour s'en convaincre on pensera aux cas suivants : A est une pomme et B est la lune, A est une grenouille et B est un bœuf, A est un pain et B est un millier de pains [13] !
En revanche, ne croyez pas qu'il y ait besoin de beaucoup de morceaux. On peut montrer que pour passer d'une boule de rayon r à deux boules de rayon r il suffit de les découper en 5 morceaux !

11. Celui dont le cosinus vaut $1/3$ et qui est égal environ à $70,528$ degrés.
12. Il faut aussi supposer qu'elles ne sont pas «plates», c'est-à-dire qu'elles contiennent des boules.
13. Finalement, la multiplication des pains, ce n'est pas si difficile, il suffit de savoir rendre l'axiome du choix effectif !

3.2 Une idée de la preuve

Il n'est pas question ici d'expliquer vraiment la démonstration du paradoxe. L'idée essentielle, à mon avis, est due à Hausdorff (1914) et elle mène à un partage de la sphère [14] en quatre parties : trois morceaux X, Y, Z isométriques entre eux et tels que X soit aussi isométrique à la réunion des deux autres et un résidu T dénombrable [15]. Le travail de Banach et Tarski a été de donner à ce résultat la forme ci-dessus, bien plus frappante, mais l'idée essentielle est dans Hausdorff.

Sans entrer dans les détails de la preuve, je vais tout de même essayer d'en donner une idée. Au fond, il s'agit d'exhiber des décompositions paradoxales du type $1 = 2$, une boule égale deux boules, un ensemble X égal à la fois à Y et Z et à leur réunion. Mais on connaît parfaitement un exemple très simple d'une telle décomposition avec les nombres entiers. Je m'explique. Considérons l'ensemble des entiers : $0, 1, 2, \ldots$. Bien qu'ils soient plus nombreux que les entiers pairs, ils sont cependant en correspondance parfaite (on dit «bijective») avec eux. En effet, on associe à 0 lui-même, puis à 1 on associe 2, à 2 on associe 4, etc., à un entier on associe son double. On a une correspondance parfaite, c'est-à-dire que chaque nombre pair est obtenu une fois et une seule par ce procédé. De la même manière, les entiers sont aussi en correspondance avec les impairs. Cette fois on associe à 0 le nombre 1, puis à 1 l'impair suivant 3, à 2 on associe 5, etc. : on associe à un entier son double plus un. Voilà donc un ensemble, les entiers, qui est à la fois «isomorphe [16]» à deux de ses parties (les pairs, les impairs), mais aussi – évidemment – à leur réunion (puisque c'est lui-même).

La preuve de Hausdorff est de cette veine, mais il travaille avec des transformations de l'espace au lieu des entiers. Il considère deux rotations, l'une, notée a, est un demi-tour autour d'un axe (une rotation de 180 degrés). C'est une transformation où l'on revient à son point de départ quand on la fait deux fois. L'autre transformation, notée b, est une rotation de 120 degrés autour d'un axe, mais différent du premier. Cette fois, si on la fait deux fois on a une rotation b^2 d'angle 240 degrés, mais si on la fait trois fois l'angle est 360 degrés, on a donc fait tout un tour et on est revenu au départ. Avec ces rotations, on en fabrique beaucoup d'autres en faisant l'une, puis l'autre, puis l'autre, puis l'une, alternativement et aléatoirement. On écrit ainsi des sortes de mots [17] du genre $abab^2ababab^2$, etc. L'idée de Hausdorff est de découper l'ensemble de ces mots en trois parties : ceux qui commencent par a, ils forment un ensemble A, ceux qui commencent par b (ensemble B) et ceux qui commencent par b^2 (ensemble C). On voit alors que A est pareil que chacun des deux autres [18] : si on multiplie par b un mot commençant par a, on tombe dans B, si on le multiplie par b^2 on tombe dans C, mais on voit aussi que A est pareil que la réunion de B et C car si l'on multiplie par a un mot commençant par b ou b^2, on tombe dans A ! Autrement dit, A est à la fois pareil [19] que B et que C, mais aussi que la réunion $B \cup C$: $1 = 2$, vous dis-je !

On déduit de cette décomposition paradoxale sur les transformations une décomposition paradoxale de certaines parties de la sphère. Il suffit de prendre un point s de la sphère et ses transformés A', B', C' par les transformations de A, B, C : on voit facilement que A' est à la fois isomorphe à B', à C' et à la réunion des deux. Mais ce qu'on a fait avec s on peut le faire à partir de n'importe quel [20] point de la sphère. On a donc découpé la sphère S en des parties S_i (on montre facilement que les ensembles de transformés des différents points sont soit égaux, soit disjoints) et qui admettent toutes des décompositions paradoxales.

C'est ici qu'intervient le fameux axiome du choix. Que dit donc d'extraordinaire cet axiome aux conséquences diaboliques ? Quelque chose qui semble pourtant bien naturel dans le cas qui nous intéresse : si on a découpé une sphère S en un nombre (infini) de morceaux S_i, il existe un ensemble E obtenu en choisissant un point dans chaque S_i. Eh bien, avec cela, et seulement cela, on obtient le paradoxe. En effet, il suffit de prendre pour X, Y, Z les transformés de E par les transformations de A, B, C.

14. Il s'agit de la sphère au sens moderne : la surface de la boule.
15. Le lecteur se contentera de savoir que ce résidu est considéré comme négligeable. On s'en débarrasse ensuite par un tour de magie analogue à celui qui a permis d'éliminer le segment superflu dans le découpage du parallélogramme de la première partie.
16. C'est le mot mathématique pour dire «pareil».
17. Un tel mot se lit de droite à gauche et signifie qu'on effectue successivement b deux fois, puis a puis b, puis a, etc.
18. Je schématise ici, en vérité, il faut faire un peu plus attention et notamment aux éléments a, b !
19. Dans cette situation, A joue le rôle des entiers, B des impairs et C des pairs.
20. En fait, pas tout à fait tous et c'est là qu'apparaît l'ensemble résiduel T.

3.2.1 À propos de l'axiome du choix

On peut évidemment mettre en doute le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski en refusant l'axiome du choix, et les débats sur ce sujet entre les mathématiciens ont été vifs au début du XX$^{\text{e}}$ siècle. Le lecteur méditera cependant le résultat suivant de Dougherty et Foreman, qui ne nécessite pas l'axiome du choix : Soient A et B deux boules de l'espace, de rayons différents (par exemple l'une de rayon 1 et l'autre de rayon 2, voire 1000). Alors elles sont «presque équivalentes» au sens suivant : on peut trouver un nombre fini de morceaux de A, les transporter à l'intérieur de B de telle sorte que ce qui manque à A et B à côté de ces morceaux communs ne contienne aucune boule, même la plus petite. Pour reprendre la métaphore de la pomme et de la lune, on peut trouver un découpage qui passe de l'une à l'autre en ne laissant dans chacune qu'un trognon ne contenant aucune miette, si petite soit-elle !

3.3 Une conséquence

Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski, outre qu'il défie l'entendement, semble, de plus, poser un problème purement mathématique. On a dit en effet que les volumes étaient invariants par découpage et recollement. Mais ici, comme on a découpé une boule de rayon r en deux boules de rayon r, une boule et deux boules devraient donc avoir même volume, ce qui est évidemment absurde.
Il n'y a cependant pas de contradiction, mais simplement la preuve que dans une décomposition paradoxale de Hausdorff-Banach-Tarski il y a nécessairement des parties dont on ne peut mesurer le volume. Cela donne une réponse négative à une autre question célèbre :

Question (Problème de Banach) Peut-on mesurer toutes les parties bornées du plan ou de l'espace [21] ?

Comme on vient de le voir, le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski empêche l'existence d'une mesure universelle dans l'espace, semant ainsi le trouble dans notre esprit : finalement, quelles parties peut-on mesurer ?
Que le lecteur se rassure, on sait mesurer toutes les parties «raisonnables» (les polygones, les polyèdres, les disques, les boules, les cônes, etc.) et, une fois choisie l'unité, la mesure de ces objets est bien déterminée. La question concerne des parties compliquées que les mathématiciens affectionnent. Pour n'en donner qu'un exemple, on peut considérer, dans un carré du plan, la partie formée par les points dont les coordonnées par rapport à un repère sont des nombres rationnels (c'est-à-dire qui s'écrivent sous forme de fractions – on a déjà rappelé qu'il y en a bien d'autres). Voilà une partie bien difficile à imaginer et plus encore à mesurer. En effet, il y a de tels points partout dans le carré, mais il y a aussi partout dans le carré des points qui ne sont pas de ce type.
En vérité, cet ensemble là ne pose pas de problème au mathématicien (il lui attribue une aire nulle). Mais il y a mieux, dans le cas du plan, on est capable de mesurer toutes les parties bornées :

Théorème 2 (Banach, 1923) *On peut définir, pour toutes les parties bornées du plan, une aire admettant les trois propriétés fondamentales : elle est additive, invariante par déplacement et l'aire du carré unité vaut* 1.

La démonstration n'est pas facile et utilise encore l'axiome du choix. Une version très claire (due à Von Neumann) qui montre bien pourquoi la preuve ne fonctionne plus en dimension 3, se trouve dans le petit livre de Guinot.

3.4 Retour au plan : la quadrature du cercle

Le théorème de Banach interdit qu'un paradoxe comme celui de Hausdorff-Banach-Tarski puisse exister dans le plan : deux parties équivalentes par découpage et recollement ont nécessairement même aire. Il reste tout de même un résultat spectaculaire et extrêmement récent qui affirme que la quadrature du cercle est possible [22] :

Théorème 3 (Laczkovich, 1990) *On peut découper un disque en un nombre fini de morceaux, les déplacer dans le plan et les recoller (sans perte ni chevauchement) pour obtenir un carré.*

21. En respectant les propriétés d'additivité et d'invariance par isométrie, bien entendu. On parle alors de mesure universelle
22. Alors, on nous aurait menti ?

Que la confiance du lecteur en les mathématiques ne soit pas trop ébranlée, ce découpage ne peut être réalisé en construisant les morceaux à la règle et au compas, de sorte qu'il ne s'agit pas de la quadrature du cercle au sens usuel de ce terme, ouf ! Tout de même, ce résultat est étonnant et pas du tout évident (un cercle c'est rond et un carré c'est droit, alors comment faire ?).

Quelques bémols tout de même sur ce théorème. D'abord, comme Hausdorff-Banach-Tarski, il utilise l'axiome du choix, de sorte que les morceaux sont des choses compliquées, et, ensuite, il en faut beaucoup, 10^{40} environ selon l'estimation de Laczkovich.

En revanche, le même Laczkovich a montré en 2003 qu'il existe des parties A, B du plan, limitées par des courbes régulières sauf en un point, de même aire, mais telles qu'on ne puisse passer de l'une à l'autre par découpage et recollement. Tout n'est donc pas possible par cette méthode.

Attention, il s'agit là de résultats très récents et très difficiles, et je dois la vérité au lecteur : contrairement au cas de Hausdorff-Banach-Tarski, je serais bien en peine de donner ne serait-ce que le quart de la moitié du commencement d'une idée de la démonstration !

4 Références

On ne peut que conseiller au lecteur de lire le livre XII d'Euclide qui traite du volume de la pyramide.

[Banach] Banach S., Sur le problème de la mesure, Fond. Math. 4, 1923, p. 7-33, ou Banach, œuvres complètes.
[Banach-Tarski] Banach S., Tarski A., Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, Fond. Math. 6, 1924, p. 244-277, ou Banach, œuvres complètes.
[Benko] Benko D., A new approach to Hilbert's third problem, Amer. Math. Monthly, vol. 114, 8, p. 665-676 (2007).
[Boltianskii1] Boltianskii V., Equivalent and equidecomposable figures, D.C. Heath and company, 1963.
[Boltianskii2] Boltianskii V., Hilbert's third problem, Winston & sons, 1978.
[Bricard] Bricard R., Sur une question de géométrie relative aux polyèdres, Nouvelles Annales de Mathématiques 15, p. 331-334 (1896).
[Cartier] Cartier P., Décomposition des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert, Séminaire Bourbaki, 1984-85, numéro 646.
[DG] Dougherty R. et Foreman M., The Banach-Tarski paradox using pieces with the property of Baire, Proc. Nat. Acad. Sci. 89 (1992), p. 10726-28.
[Euclide] Euclide, Les éléments, Traduction et présentation de Georges Kayas, Éd. du CNRS, 1978.
[Guinot] Guinot M., Le paradoxe de Banach-Tarski, Aleas, Lyon (1991).
[GS] Grandemange P. et Schwartz P., Aspects classiques du troisième problème de Hilbert, Gazette des mathématiciens, 52, avril 1992.
[Hausdorff] Hausdorff F., Bemerkung über den Inhalt den Punktmengen, Math. Ann., 75, 1914, p. 23-28.
[Hopf] Hopf H., Differential Geometry in the Large, Lecture Notes in maths., 1000, Springer Verlag.
[Jessen] Jessen B., The algebra of polyhedra and the Dehn-Sydler theorem, Math. Scand., 22, 1968, 241-256.
[Laczkovich1] Laczkovich M., Equidecomposability and discrepancy ; a solution of Tarski's circle-squaring problem, J. reine angew. Math. 404, 1990, p. 77-117.
[Laczkovich2] Laczkovich M., Paradoxical Decompositions : A Survey of Recent Results, European Congress of Mathematics, Vol. II, Progress in Math. 120, Birkhaüser, Basel, 1994.
[Laczkovich3] Laczkovich M., Equidecomposability of Jordan domains under groups of isometries, Fund. Math. 177, numéro 2, 2003, p. 149-171.
[Sydler] Sydler J.-P., Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions, Comment. Math. Helv., 40, 1965, p. 43-80.
[Wagon] Wagon S., The Banach-Tarski paradox, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 24, Cambridge, 1985.

Une « vie brève » de Max Dehn

Le 8 septembre 2010, par **Michèle Audin**

Professeur à l'Université de Strasbourg (**page web**)

Une « vie brève », c'est une courte biographie. On peut envisager différentes vies brèves d'une même personne. En voici une de Max Dehn, un remarquable mathématicien, qui fut le premier à résoudre un des problèmes de Hilbert, qui sema beaucoup d'idées nouvelles en topologie et en théorie des groupes, et qui dut fuir l'Allemagne nazie.

EN 1948, le mathématicien allemand Max Dehn, alors âgé de 70 ans, refusa de redevenir membre de la DMV (Société mathématique allemande), en ces termes [1]

> Je n'ai aucune raison de penser que cette association agira à l'avenir autrement qu'elle l'a fait en 1935. Je crains qu'elle ne résiste pas, une fois encore, à des pressions extérieures. [...] Qu'elle ne se soit pas dissoute, qu'un nombre important de ses membres ne l'ait pas quittée, voilà ce qui me conduit à cette attitude négative. Je n'ai pas peur que la DMV exclue à nouveau ses membres juifs, mais la prochaine fois ce sera peut-être des prétendus communistes, anarchistes, ou personnes de couleur.

En 1900, le mathématicien allemand Max Dehn, alors âgé de 22 ans, résolut le « troisième problème de Hilbert » (voir ci-dessous).

Et entre temps ?

Reprenons brièvement le fil chronologique de la vie de Max Dehn, né en 1878.

1. Dans les années 1910—1912, Max Dehn a étudié des problèmes qui, depuis, sont très importants en théorie des groupes [2].

2. En 1915, Max Dehn s'est engagé et a combattu jusqu'en 1918. Il a été blessé et a été décoré de l'*Ehrenkreuz* [3].

3. Après la guerre, il a repris sa vie mathématique et ses centres d'intérêt en théorie des groupes et en topologie.

4. Son séminaire à l'Université de Francfort, sur les mathématiques et leur histoire, dans les années 1920, a profondément marqué une génération de mathématiciens [4].

5. En 1935, il a été démis de ses fonctions par l'Allemagne nazie, en application de sa législation antisémite [5].

6. En 1939, il a fini par fuir son pays, espérant obtenir un poste en Norvège, puis, ce pays occupé par l'Allemagne, il a gagné les États-Unis *via* la Finlande, la Russie, le transsibérien et le Japon.

7. Aux États-Unis, il eut beaucoup de mal à obtenir un poste, mais finit par en trouver un en 1944, dans le petit *College* de Black Mountain, en Caroline du Nord, où il fut le premier professeur de mathématiques et enseigna aussi la philosophie. Si le poste n'était certes pas à la hauteur de ses qualités de mathématicien, il semble que Max Dehn ait été heureux à Black Mountain.

8. C'est peu après avoir pris sa retraite, à Black Mountain, que Max Dehn est mort en 1952.

Des objets

Plusieurs objets mathématiques portent aujourd'hui son nom, par ordre alphabétique

- algorithme de Dehn
- chirurgie de Dehn
- inégalités de Dehn-Sommerville
- invariant de Dehn (voir ci-dessous)
- lemme de Dehn
- twist de Dehn

et évoquent des notions fondamentales de topologie, en particulier en dimension 3 [6], de théorie des nœuds et de théorie des groupes. Notons en particulier le cas des twists de Dehn, qui sont des transformations des surfaces abondamment utilisées de nos jours, bien plus qu'au temps où il les a inventés.

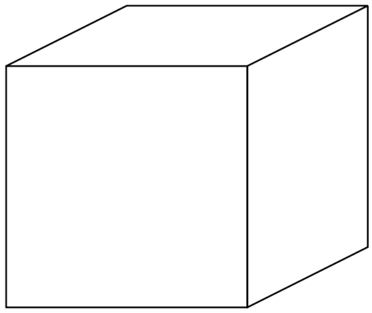
Des résultats remarquables qu'il a obtenus et des problèmes sur lesquels il a travaillé, retenons, pour cet article et pour les lecteurs d'*Images des mathématiques*, la résolution du troisième problème de Hilbert.

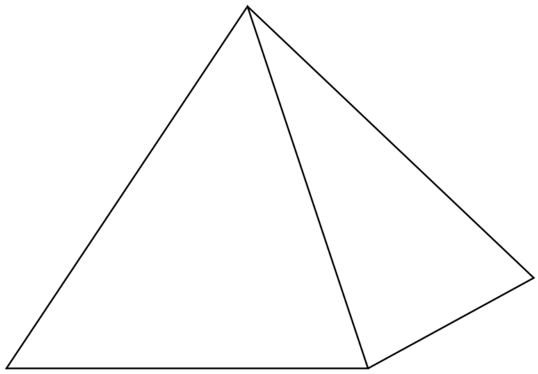
Le troisième problème de Hilbert

David Hilbert avait, lors du Congrès international de mathématiques de Paris, en 1900, décliné une liste de vingt-trois problèmes [7]. Celui dont il est question ici est le troisième de cette liste. Il fut aussi le premier à être résolu, dès 1900. La formulation en est simple.

Il s'agit de découper un polyèdre (comme avec un couteau, le long de plans) et de ré-assembler les morceaux pour former un autre polyèdre. Le nouveau polyèdre a, bien sûr, le même volume que celui dont on est parti. La question est, étant donnés deux polyèdres de même volume, de savoir si on peut passer de l'un à l'autre par cette opération « découper-assembler ».

Par exemple, peut-on découper un cube et assembler les morceaux de façon à former un tétraèdre régulier de même volume ?



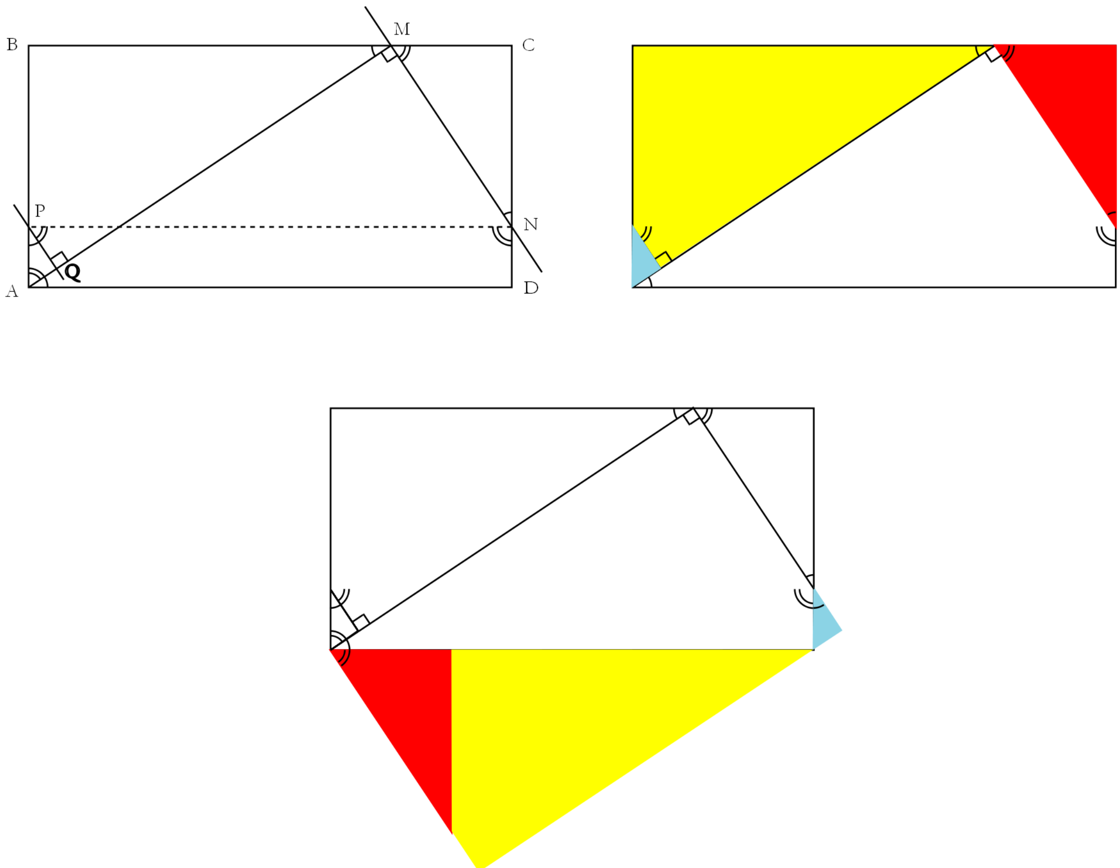


La réponse donnée par Max Dehn est « non, on ne peut pas ».

En mathématiques, une telle affirmation (négation, dans ce cas) ne signifie pas « je ne peux pas », mais bien « aussi malin serez-vous, autant de temps y passerez-vous, vous n'y arriverez pas parce que ce n'est pas possible ». On dit souvent que ce problème était le plus facile de toute la liste de Hilbert, mais ce n'était pas si évident que ça. D'autant plus que, si on remplace les polyèdres par des polygones, la réponse est « oui, on peut » et plus précisément « si deux polygones ont la même surface, on peut découper l'un et assembler les morceaux de façon à obtenir l'autre » [8]. Ici, c'est avec des ciseaux qu'on découpe.

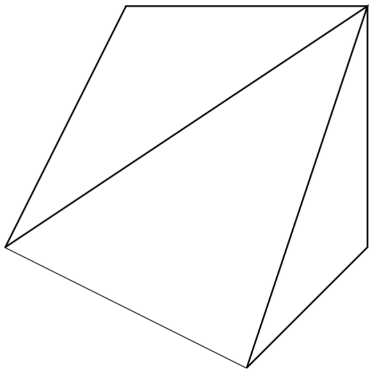
Le cas des polygones.

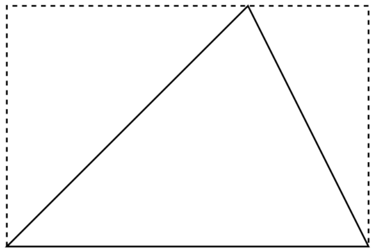
Démontrons, par exemple, qu'un rectangle peut être découpé-assemblé en n'importe quel autre rectangle de la même surface. Les phrases qui suivent expliquent ce que l'on voit sur la figure.



On dessine le rectangle $ABCD$. Sur le « grand côté » BC, on place un point M, puis on trace AM et la perpendiculaire à AM passant par M. Si M a été choisi convenablement, cette droite coupe le segment CD en un point N. La parallèle à BC passant par N coupe AB en P. On projette P orthogonalement sur AM en Q. Sur la figure, on a dessiné les angles égaux (noter que les angles marqués d'un arc de cercle et ceux marqués de deux arcs de cercle ont une somme égale à un angle droit). Ainsi on a découpé le rectangle en deux triangles et deux quadrilatères, que montre la deuxième figure. La troisième figure montre comment les ré-assembler pour faire un autre rectangle --- c'est bien un rectangle puisque il y a quatre angles droits --- de même surface bien sûr, et dont l'un des côtés est AM. En choisissant convenablement le point M, on peut reconstituer ainsi tout [9] rectangle de même surface que le premier.

Pour démontrer de même que la réponse est « oui » pour deux polygones plus généraux, de même surface, on commence par découper les polygones en triangles, puis on remarque qu'un triangle est la moitié d'un rectangle, ce qui permet d'utiliser l'argument sur les rectangles.





L'invariant de Dehn en dimension 3.

Max Dehn a démontré que l'analogue en dimension 3 n'était pas vrai en inventant un *invariant*, un objet mathématique qui ne change pas lorsqu'on découpe et ré-assemble un polyèdre... et qui n'est pas le même pour le cube et pour le tétraèdre. Cet invariant est un objet un peu plus compliqué qu'un nombre [10] et qui tient compte des longueurs des arêtes et des angles entre les plans qui se rencontrent en ces arêtes. Pour un cube, cet invariant est nul, pour un tétraèdre il ne l'est pas.

P.S. :

La photographie de Max Dehn qui sert de logo à cet article vient de ***cette page*** *(sur un site de la ville de Francfort).*

Je remercie Pierre de la Harpe pour ses commentaires qui m'ont permis d'améliorer une première version de cet article.

Cet article a été relu, pour Images des Mathématiques, par Ilies Zidane, Barbara Schapira, « Walter » et Gérard Besson, que je remercie pour leur lecture attentive, les commentaires qu'ils m'ont faits, les coquilles qu'ils m'ont signalées. C'est grâce à eux que cet article est lisible.

Notes

[1] Cette lettre est reproduite dans ***Mathematicians fleeing from Nazi Germany : individual fates and global impact***, de Reinhard Siegmund-Schultze, un livre consacré à l'émigration des mathématiciens qui fuirent l'Allemagne nazie. L'extrait publié ici est une double traduction, j'assume la responsabilité des éventuelles maladresses.

[2] Le centenaire de ces travaux a été célébré par Pierre de la Harpe dans un superbe **article paru dans la Gazette des mathématiciens**, auquel je renvoie volontiers : cet article, assez long et très détaillé, pourra intéresser certains de nos lecteurs les plus savants. Beaucoup d'autres références se trouvent dans **ce billet**, toujours de Pierre de la Harpe.

[3] Une décoration militaire, la « croix d'honneur ». Pour écrire ce portrait, j'ai aussi utilisé un **article** (en allemand) de Burde, Schwarz et Wolfart.

[4] À ce séminaire, participaient notamment **Ernst Hellinger**, et **Carl-Ludwig Siegel**. Siegel et **André Weil**, qui assista aussi à certaines séances de ce séminaire, lui ont rendu hommage dans leurs souvenirs.

[5] Seulement en 1935, parce qu'il avait été décoré, voir le point **2**.

[6] Max Dehn fut aussi un des premiers d'une longue lignée de mathématiciens à essayer de démontrer la conjecture de Poincaré, et sans doute le premier à en proposer une démonstration à un journal (il la retira lorsqu'il s'aperçut qu'elle était incomplète).

[7] Au sujet des problèmes de Hilbert, on peut lire **cet article**.

[8] On appelle souvent ce résultat le théorème de Bolyai-Gerwein-Wallace... et certains disent qu'il était connu d'Euclide.

[9] Pour les puristes : c'est vrai, le point M ne peut pas être exactement n'importe où sur le côté BC puisque la perpendiculaire doit couper le segment CD, mais l'essentiel est que l'on puisse réaliser le carré.

[10] Pour les lecteurs très avancés, cet invariant vit dans $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. On l'obtient en sommant (sur toutes les arêtes) les $\ell \otimes \theta$, où ℓ est la longueur d'une arête et θ l'angle dièdre des deux faces se rencontrant le long de cette arête. Cet invariant est « additif ».

Crédits images