

ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE - Partie D

TITRE :

FORMULE D'EULER-MACLAURIN

Temps de préparation :2 h 15 minutes
Temps de présentation devant les examinateurs :10 minutes
Entretien avec les examinateurs :10 minutes

GUIDE POUR LES CANDIDAT(E)S :

Le dossier ci-joint comporte au total : 17 pages (dont celle-ci).

Le premier document (« La formule d'Euler-Maclaurin ») comporte dix pages.

Lui sont jointes deux annexes de une et cinq pages respectivement (« Formules citées » et « Méthodes numériques »).

Ces documents sont tirés du livre « L'analyse au fil de l'histoire » de E. Hairer et G. Wanner, page 14, pages 129 à 133 et pages 160 à 169.

TRAVAIL SUGGÉRÉ :

Dégager les idées principales en s'écartant du point de vue historique pour le remplacer par un point de vue plus linéaire d'un point de vue mathématique.

On s'attachera notamment à compléter les démonstrations pour les rendre rigoureuses du point de vue du XXI^{ème} siècle.

On pourra notamment faire une synthèse autour des nombres de Bernoulli.

CONSEILS GÉNÉRAUX POUR LA PRÉPARATION DE L'ÉPREUVE :

- * Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.
- * Réservez du temps pour préparer l'exposé.
- * Préparez une introduction et une conclusion.
- * Ne passez pas trop de temps sur une démonstration durant l'exposé.
- * Ne surchargez pas vos transparents de mathématiques : restez lisible.
- * Aérez et soignez vos transparents.

- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, etc.) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêts à débiter votre exposé.

Le jour de l'oral, les consignes suivantes seront également présentes :

- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper ... mais tout sera à remettre aux examinateurs en fin d'oral.

- A la fin de l'oral, vous devez remettre aux examinateurs le présent dossier, les transparents et les brouillons utilisés pour cette partie de l'oral, ainsi que TOUS les transparents et autres documents présentés pendant votre prestation.

II.10 La formule d'Euler-Maclaurin

Der König nennt mich 'meinen Professor', und ich bin der glücklichste Mensch auf der Welt! (Euler est fier de servir Frederick II à Berlin)

J'ai ici un gros cyclope de géomètre ... il ne reste plus qu'un oeil à notre homme, et une courbe nouvelle, qu'il calcule à présent, pourrait le rendre aveugle tout à fait. (Frederick II ; voir Spiess 1929, p. 165-166.)

Cette formule a été mise au point indépendamment par Euler (1736) et Maclaurin (1742) comme outil puissant pour le calcul de sommes. Par exemple, la somme harmonique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, la somme des logarithmes $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln n = \ln n!$, la somme des puissances $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$, ou la somme des inverses des puissances $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k}$ peuvent être approchées à l'aide du calcul différentiel.

Problème. Soit $f(x)$ une fonction donnée, cherchons une formule pour

$$(10.1) \quad S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$$

("investigatio summae serierum ex termino generali").

Découverte de la formule par Euler

La première idée (voir Euler 1755, pars posterior, § 105, Maclaurin 1742, Book II, Chap. IV, p. 663f) est de considérer aussi la somme avec des indices décalés

$$(10.2) \quad s = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n-1).$$

On calcule la différence $S - s$ en utilisant la série de Taylor (formule (2.8) avec $x - x_0 = -1$)

$$f(i-1) - f(i) = -\frac{f'(i)}{1!} + \frac{f''(i)}{2!} - \frac{f'''(i)}{3!} + \dots$$

pour trouver

$$f(n) - f(0) = \sum_{i=1}^n f'(i) - \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n f''(i) + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n f'''(i) - \frac{1}{4!} \sum_{i=1}^n f^{(4)}(i) + \dots$$

Afin de transformer cette formule pour $\sum f'(i)$ en une formule pour $\sum f(i)$, nous remplaçons f par sa primitive (désignée aussi par la même lettre f) :

$$(10.3) \quad \sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n f'(i) - \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n f''(i) + \frac{1}{4!} \sum_{i=1}^n f'''(i) - \dots$$

La deuxième idée est de faire disparaître les sommes $\sum f'$, $\sum f''$, $\sum f'''$, ..., à droite à l'aide de la formule elle-même, en remplaçant f successivement par f' , f'' , f''' etc. On obtient alors une formule du type

$$(10.4) \quad \sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx - \alpha(f(n) - f(0)) + \beta(f'(n) - f'(0)) - \gamma(f''(n) - f''(0)) + \delta(f'''(n) - f'''(0)) - \dots$$

Il nous reste à calculer les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Remplaçons successivement dans (10.4) f par f', f'', \dots

$$\begin{aligned} \sum f(i) &= \int_0^n f(x) dx - \alpha(f(n) - f(0)) + \beta(f'(n) - f'(0)) - \dots \\ -\frac{1}{2!} \sum f'(i) &= -\frac{1}{2!}(f(n) - f(0)) + \frac{\alpha}{2!}(f'(n) - f'(0)) - \dots \\ \frac{1}{3!} \sum f''(i) &= +\frac{1}{3!}(f'(n) - f'(0)) - \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

La somme de toutes ces formules, par (10.3), doit être $\int_0^n f(x) dx$. Ainsi

$$(10.5) \quad \alpha + \frac{1}{2!} = 0, \quad \beta + \frac{\alpha}{2!} + \frac{1}{3!} = 0, \quad \gamma + \frac{\beta}{2!} + \frac{\alpha}{3!} + \frac{1}{4!} = 0, \dots,$$

ce qui permet de calculer $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{12}, \gamma = 0, \delta = -\frac{1}{720}, \dots$ et nous avons

$$(10.6) \quad \sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \frac{1}{12}(f'(n) - f'(0)) - \frac{1}{720}(f'''(n) - f'''(0)) + \frac{1}{30240}(f^{(5)}(n) - f^{(5)}(0)) + \dots$$

(10.1) Exemple. Cette formule, appliquée à la somme d'à peu près un million de termes,

$$\begin{aligned} \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{1000000} &= \ln(10^6) - \ln(10) + \frac{1}{2} 10^{-6} - \frac{1}{20} \\ &+ \frac{1}{1200} - \frac{1}{120} 10^{-4} + \frac{1}{252} 10^{-6} + \dots \approx 11.463758469 \end{aligned}$$

donne une approximation excellente du résultat exact en additionnant sept nombres. Néanmoins, la formule (10.6) n'est pas utile pour le calcul des premiers termes $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10}$.

Nombres de Bernoulli. On remplace habituellement les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ par $B_i/i!$ ($B_0 = 1, \alpha = B_1/1!, \beta = B_2/2!, \dots$), ainsi (10.5) devient

$$(10.5') \quad 2B_1 + B_0 = 0, \quad 3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0.$$

Euler a calculé les nombres de Bernoulli suivants :

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1, & B_1 &= -\frac{1}{2}, & B_2 &= \frac{1}{6}, & B_4 &= -\frac{1}{30}, & B_6 &= \frac{1}{42}, & B_8 &= -\frac{1}{30}, \\
B_{10} &= \frac{5}{66}, & B_{12} &= -\frac{691}{2730}, & B_{14} &= \frac{7}{6}, & B_{16} &= -\frac{3617}{510}, & B_{18} &= \frac{43867}{798}, \\
B_{20} &= -\frac{174611}{330}, & B_{22} &= \frac{854513}{138}, & B_{24} &= -\frac{236364091}{2730}, \\
B_{26} &= \frac{8553103}{6}, & B_{28} &= -\frac{23749461029}{870}, & B_{30} &= \frac{8615841276005}{14322},
\end{aligned}$$

et $B_3 = B_5 = \dots = 0$. Avec cette notation, la formule (10.6) devient

$$(10.6') \quad \sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)).$$

Exemple. Pour $f(x) = x^q$, la série de la formule (10.6') est finie et devient la formule bien connue de Jac. Bernoulli (I.1.26), (I.1.27).

Fonction génératrice. Pour mieux comprendre les nombres de Bernoulli, appliquons une idée remarquable d'Euler : considérons la fonction $V(u)$ dont les coefficients de la série de Taylor sont les nombres à étudier, i.e. définissons :

$$(10.7) \quad \begin{aligned}
V(u) &= 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \dots \\
&= 1 + \frac{B_1}{1!} u + \frac{B_2}{2!} u^2 + \frac{B_3}{3!} u^3 + \frac{B_4}{4!} u^4 + \dots
\end{aligned}$$

Alors les formules (10.5) et (10.5') deviennent simplement

$$V(u) \cdot \left(1 + \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{3!} + \frac{u^3}{4!} + \dots \right) = 1,$$

et donc

$$(10.8) \quad V(u) = \frac{u}{e^u - 1}.$$

De cette manière, une infinité d'équations *algébriques* se résument en *une formule analytique*. Le fait que

$$(10.9) \quad V(u) + \frac{u}{2} = \frac{u}{e^u - 1} + \frac{u}{2} = \frac{u}{2} \cdot \frac{e^{u/2} + e^{-u/2}}{e^{u/2} - e^{-u/2}}$$

soit une fonction *paire* explique pourquoi $B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$.

De Usu Legitimo Formulae Summatoriae Maclaurinianae

Insérons la fonction $f(x) = \cos(2\pi x)$, pour laquelle $f(i) = 1$ pour tout i , dans la formule (10.6'). On obtient $1 + 1 + \dots + 1$ à gauche, et $0 + 0 + 0 + \dots$ à droite, parce que $\cos(2\pi x)$ et toutes ses dérivées sont périodiques de période 1. Nous voyons ainsi que la formule, telle qu'elle est écrite, *est fausse* ! Autre problème : pour la plupart des fonctions f , la série infinie dans (10.6') ne converge pas.

On doit alors tronquer la formule après un nombre fini de termes et trouver une expression pour le reste. Ceci fut fait, en beau latin (voir ci-dessus), par Jacobi (1834) en réarrangeant la démonstration d'Euler et en utilisant la formule du reste (4.32) de Bernoulli-Cauchy. Plus tard, on découvrit (Wirtinger 1902) qu'il est possible de démontrer ce résultat en faisant plusieurs intégrations par parties, comme pour la démonstration de la formule (4.32). Ingrédient principal de cette démonstration : les polynômes de Bernoulli.

Polynômes de Bernoulli. Les polynômes

$$\begin{aligned} B_1(x) &= B_0x + B_1 && = x - \frac{1}{2} \\ B_2(x) &= B_0x^2 + 2B_1x + B_2 && = x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B_3(x) &= B_0x^3 + 3B_1x^2 + 3B_2x + B_3 && = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\ B_4(x) &= B_0x^4 + 4B_1x^3 + 6B_2x^2 + 4B_3x + B_4 && = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \end{aligned}$$

ou, en général,

$$(10.10) \quad B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i x^{k-i},$$

satisfont

$$(10.11) \quad B'_k(x) = kB_{k-1}(x), \quad B_k(0) = B_k(1) = B_k \quad (k \geq 2).$$

En effet, la première formule de (10.11) suit d'une propriété des coefficients binomiaux (voir théorème I.2.1), la deuxième est une conséquence de la définition et de (10.5').

(10.2) Théorème. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(i) &= \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(n) - f(0)) \\ &\quad + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j}{j!} (f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)) + \tilde{R}_k, \end{aligned}$$

où

$$(10.12) \quad \tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx.$$

Ici, $\tilde{B}_k(x)$ s'obtient en prenant $B_k(x)$ pour $0 \leq x \leq 1$, puis en le prolongeant de manière périodique avec période 1 (voir la fig. 10.1).

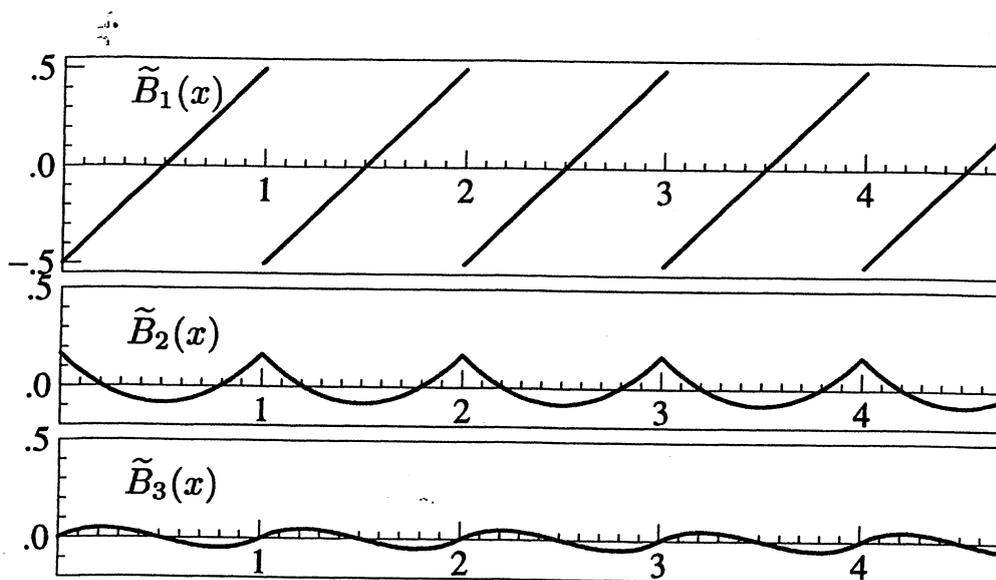


FIGURE 10.1. Polynômes de Bernoulli

Démonstration. Nous prouvons tout d'abord l'affirmation pour $n = 1$. Puisque $B_1'(x) = 1$, une intégration par parties donne

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 B_1'(x) f(x) dx = B_1(x) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 B_1(x) f'(x) dx.$$

Le premier terme est $\frac{1}{2}(f(1) + f(0))$. Nous insérons $B_1(x) = \frac{1}{2}B_2'(x)$ de (10.11) dans le deuxième terme et intégrons de nouveau. Nous obtenons ainsi

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \frac{B_2}{2!}(f'(1) - f'(0)) + \frac{1}{2!} \int_0^1 B_2(x) f''(x) dx.$$

En répétant ce procédé, nous obtenons

(10.13)

$$\frac{1}{2}(f(1) + f(0)) = \int_0^1 f(x) dx + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j}{j!} (f^{(j-1)}(1) - f^{(j-1)}(0)) + R_k,$$

avec

$$(10.14) \quad R_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^1 B_k(x) f^{(k)}(x) dx.$$

En appliquant la formule (10.14) aux fonctions $f(x + i - 1)$ d'argument décalé, nous observons que

$$\int_0^1 B_k(x) f^{(k)}(x + i - 1) dx = \int_{i-1}^i \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx,$$

et obtenons la conclusion du théorème 10.2 en additionnant les formules de $i = 1$ à $i = n$. \square

Estimation du reste. Les majorations (pour $0 \leq x \leq 1$)

$$|B_1(x)| \leq \frac{1}{2}; \quad |B_2(x)| \leq \frac{1}{6}, \quad |B_3(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{36}, \quad |B_4(x)| \leq \frac{1}{30},$$

faciles à vérifier, et le fait que $|\int_0^n g(x) dx| \leq \int_0^n |g(x)| dx$, livrent

$$(10.15) \quad |\tilde{R}_1| \leq \frac{1}{2} \int_0^n |f'(x)| dx, \quad |\tilde{R}_2| \leq \frac{1}{12} \int_0^n |f''(x)| dx, \quad \dots$$

Ce sont les estimations rigoureuses du reste dans la formule d'Euler-Maclaurin que nous cherchions. Les valeurs maximales et minimales pour d'autres polynômes de Bernoulli ont été calculées par Lehmer (1940 ; voir exercice 10.3).

(10.3) Remarque. Si nous appliquons la formule du théorème 10.2 à la fonction $f(t) = hg(a + th)$ avec $h = (b - a)/n$ et si nous transférons le terme $(f(n) - f(0))/2$ dans l'autre membre, nous obtenons (avec $x_i = a + ih$)

$$(10.16) \quad \begin{aligned} \frac{h}{2} g(x_0) + h \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) + \frac{h}{2} g(x_n) &= \int_a^b g(x) dx \\ &+ \sum_{j=2}^k \frac{h^j}{j!} B_j \left(g^{(j-1)}(b) - g^{(j-1)}(a) \right) \\ &+ (-1)^{k-1} \frac{h^{k+1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(t) g^{(k)}(a + th) dt, \end{aligned}$$

où on reconnaît la règle du trapèze dans le membre de gauche. L'équation (10.16) met en évidence le terme dominant de l'erreur, $(h^2/12)(g'(b) - g'(a))$. Cependant, si g est périodique de période $b - a$, tous les termes de la série d'Euler-Maclaurin disparaissent et l'erreur est égale à \tilde{R}_k pour un k arbitraire. Cela explique les résultats bons et surprenants du tableau 6.2 (paragraphe II.6).

Formule de Stirling

Posons $f(x) = \ln x$ dans la formule d'Euler-Maclaurin. Comme

$$\sum_{i=2}^n f(i) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \dots + \ln n = \ln(n!),$$

nous obtenons une expression approchée pour les factorielles $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

(10.4) Théorème (Stirling 1730). On a

$$(10.17) \quad n! = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \tilde{R}_9\right)$$

où $|\tilde{R}_9| \leq 0.0006605/n^8$.

On en déduit, pour $n \rightarrow \infty$, l'approximation

$$(10.18) \quad n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n}.$$

Remarque. Cette formule célèbre est utile particulièrement en analyse combinatoire, statistique et probabilités. L'équation (10.17) est tronquée après le 4^e terme simplement parce qu'un terme supplémentaire n'entrerait plus sur la même ligne.

Quelques valeurs numériques de (10.18) et (10.17) (avec un, deux et trois termes) pour $n = 10$ et $n = 100$ sont comparées à $n!$ dans le tableau 10.1.

TABLEAU 10.1. Fonction factorielle et ses approximations par la formule de Stirling

$n = 10 :$	Stirling 0	$= 0.359869561874103592162317593283 \cdot 10^7$
	Stirling 1	$= 0.362881005142693352994116531675 \cdot 10^7$
	Stirling 2	$= 0.362879997141301292538591223941 \cdot 10^7$
	Stirling 3	$= 0.362880000021301281279077612862 \cdot 10^7$
	$n!$	$= 0.362880000000000000000000000000 \cdot 10^7$
$n = 100 :$	Stirling 0	$= 0.932484762526934324776475612718 \cdot 10^{158}$
	Stirling 1	$= 0.933262157031762340989619195146 \cdot 10^{158}$
	Stirling 2	$= 0.933262154439367463946383356624 \cdot 10^{158}$
	Stirling 3	$= 0.933262154439441532371338864918 \cdot 10^{158}$
	$n!$	$= 0.933262154439441526816992388563 \cdot 10^{158}$

Démonstration. Nous avons vu (exemple 10.1) que la formule d'Euler-Maclaurin est inefficace si les dérivées supérieures de $f(x)$ deviennent grandes sur l'intervalle considéré. Nous appliquons donc la formule avec $f(x) = \ln x$ à la somme de $i = n + 1$ à $i = m$. Comme

$$\int \ln x dx = x \ln x - x, \quad \frac{d^j}{dx^j} (\ln x) = (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!}{x^j},$$

il suit du théorème 10.2 que

$$(10.19) \quad \sum_{i=n+1}^m f(i) = \ln m! - \ln n! = m \ln m - m - (n \ln n - n) + \frac{1}{2} (\ln m - \ln n) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{360} \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{n^3} \right) + \tilde{R}_5,$$

où $|\tilde{R}_5| \leq 0.00123/n^4$ pour tout $m > n$. Cette estimation est une conséquence de (10.12) et (10.15) et du fait que $|B_5(x)| \leq 0.02446$ pour $0 \leq x \leq 1$. Dans

(10.19), les termes $\ln n!$, $n \ln n$, n et $(1/2) \ln n$ divergent tous pour $n \rightarrow \infty$. Nous les rassemblons et posons

$$(10.20) \quad \gamma_n = \ln n! + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n,$$

pour que (10.19) s'écrive

$$(10.21) \quad \gamma_n = \gamma_m + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{360} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^3}\right) - \tilde{R}_5.$$

Pour n et m suffisamment grands, γ_n et γ_m sont arbitrairement proches. La suite des valeurs γ_m converge donc pour $m \rightarrow \infty$ vers une valeur désignée par γ (démonstration précise dans le théorème III.1.8 de Cauchy). Nous prenons alors la limite $m \rightarrow \infty$ dans la formule (10.21) et obtenons

$$\ln n! + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n = \gamma + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \hat{R}_5,$$

où $|\hat{R}_5| \leq 0.00123/n^4$. L'exponentielle de cette expression donne

$$(10.22) \quad n! = D_n \frac{\sqrt{n} n^n}{e^n} \quad \text{avec} \quad D_n = e^\gamma \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \hat{R}_5\right).$$

Cela démontre (10.18) et (10.17), si nous pouvons prouver que la limite de D_n (i.e. $D = e^\gamma$) est égale à $\sqrt{2\pi}$. Pour cela, calculons avec (10.22)

$$\frac{D_n \cdot D_n}{D_{2n}} = \frac{n! \cdot n! \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{2n} \sqrt{2n}}{n^{2n} \cdot e^{2n} \cdot n \cdot (2n)!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},$$

qui converge aussi vers D . Cette expression rappelle le produit de Wallis de la formule (I.5.27). En effet, son carré

$$\left(\frac{D_n \cdot D_n}{D_{2n}}\right)^2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)(2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{2(2n+1)}{n},$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\rightarrow \pi/2} \qquad \underbrace{\hspace{5em}}_{\rightarrow 4}$

converge vers 2π , ce qui démontre que $D = \sqrt{2\pi}$. La borne supérieure pour \tilde{R}_9 est une conséquence de (10.12) et de $|B_9(x)| \leq 0.04756$. □

La série harmonique et la constante d'Euler

Cherchons à calculer

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

en posant $f(x) = 1/x$ dans le théorème 10.2. Comme $f^{(j)}(x) = (-1)^j j! x^{-j-1}$, nous obtenons au lieu de (10.19)

(1962) a calculé cette constante avec une grande précision. On ignore encore si elle est rationnelle ou irrationnelle.

Exercices

10.1 La spirale de Théodore est composée de triangles rectangles de côtés 1, \sqrt{n} et $\sqrt{n+1}$. Elle exécute une rotation complète après 17 triangles (raison possible pour laquelle Théodore ne considère pas de racines au-delà de $\sqrt{17}$). Dénués de tels scrupules, nous voulons savoir combien de rotations font un milliard de tels triangles. Ceci nécessite le calcul de (voir fig. 10.3)

$$1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=18}^{1000000000} \arctan \frac{1}{\sqrt{i}}$$

avec une erreur plus petite que 1. Cet exercice nous offre non seulement une occasion supplémentaire d'admirer la puissance de la formule d'Euler-Maclaurin, mais nous propose aussi une intégrale intéressante à calculer.

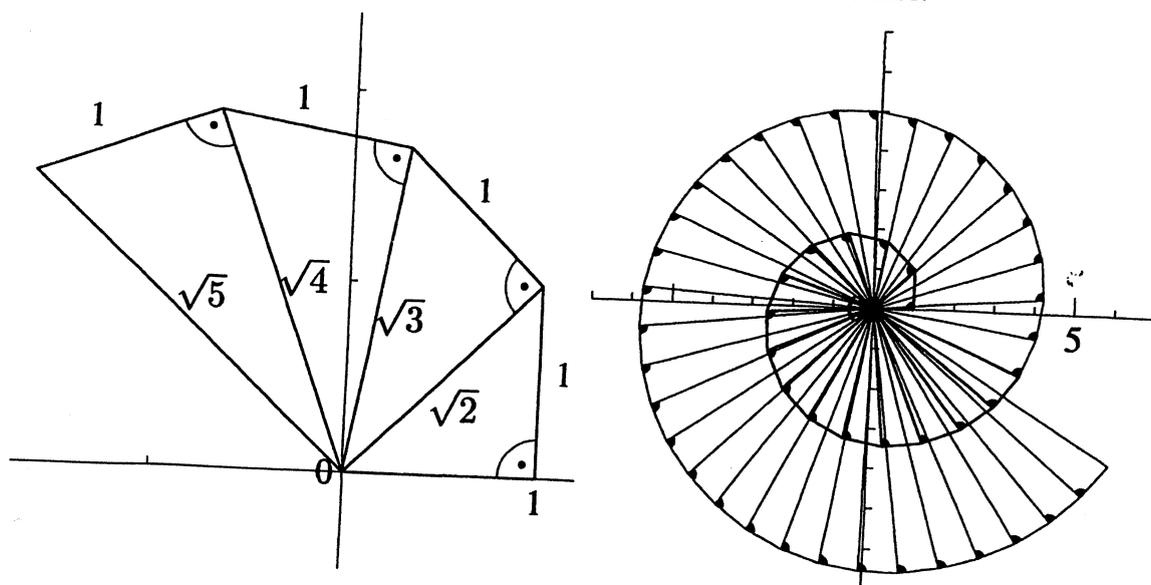


FIGURE 10.3. La spirale de Théodore de Cyrène, 470–390 avant J.C.

10.2 (Série de Taylor pour $\tan x$). Si nous posons $\cot x = 1/\tan x$ et $\coth x = 1/\tanh x$, la formule (10.9) peut être interprétée comme la série de Taylor de $(x/2) \coth(x/2)$. Cela permet d'obtenir une série pour $x \cdot \coth x$ et, avec la substitution $x \mapsto ix$, une série pour $x \cdot \cot x$. Finalement, utiliser l'identité

$$2 \cdot \cot 2x = \cot x - \tan x$$

pour obtenir les coefficients de la série pour $\tan x$. La comparer avec la formule (I.4.18).

10.3 Vérifier numériquement les bornes (Lehmer 1940)

$$\begin{aligned} |B_3(x)| &\leq 0.04812, & |B_5(x)| &\leq 0.02446, & |B_7(x)| &\leq 0.02607, \\ |B_9(x)| &\leq 0.04756, & |B_{11}(x)| &\leq 0.13250, & |B_{13}(x)| &\leq 0.52357 \end{aligned}$$

pour $0 \leq x \leq 1$.

De même, on obtient

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\
 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\
 (1.26) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} + 0 \\
 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} + 0 - \frac{n}{30} \\
 1^5 + 2^5 + \dots + n^5 &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} + 0 - \frac{n^2}{12}.
 \end{aligned}$$

Jacob Bernoulli (1705) découvrit alors la *formule générale*

$$\begin{aligned}
 1^q + 2^q + \dots + n^q &= \frac{n^{q+1}}{q+1} + \frac{n^q}{2} + \frac{q}{2}An^{q-1} + \frac{q(q-1)(q-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{q-3} + \\
 &+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{q-5} + \dots,
 \end{aligned}$$

où

$$(1.27) \quad A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{30}, \quad C = \frac{1}{42}, \quad D = -\frac{1}{30}, \quad E = \frac{5}{66}, \quad F = -\frac{691}{2730}, \dots$$

sont appelés *nombres de Bernoulli*. Pour une démonstration élégante (Euler-Maclaurin) voir le paragraphe II.10.

Méthodes numériques

Nous voulons calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, où l'intervalle d'intégration est donné. Procédons ainsi : on fixe un entier N , on divise l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles de longueur $h = (b - a)/N$ et d'extrémités

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad \dots \quad x_i = a + ih, \quad \dots \quad x_N = b,$$

et on remplace localement la fonction $f(x)$ par des polynômes, faciles à intégrer.

Règle du trapèze. Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, le graphe de la fonction $f(x)$ est remplacé par une droite passant par $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. L'intégrale de x_i à x_{i+1} est alors approchée par l'aire du trapèze, $h \cdot (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2$, et l'on obtient

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

$$(6.6) \quad = h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right).$$

Exemple. La fig. 6.4 illustre les fonctions $\cos x^2$ et $\sin x^2$ et les approximations par des trapèzes (longueur de pas $h = 0.5$, $N = 10$). Les points des figures inférieures représentent les approximations des intégrales obtenues en prenant $h = 1/2$ et $h = 1/8$; les valeurs correspondantes sont reliées par des droites.

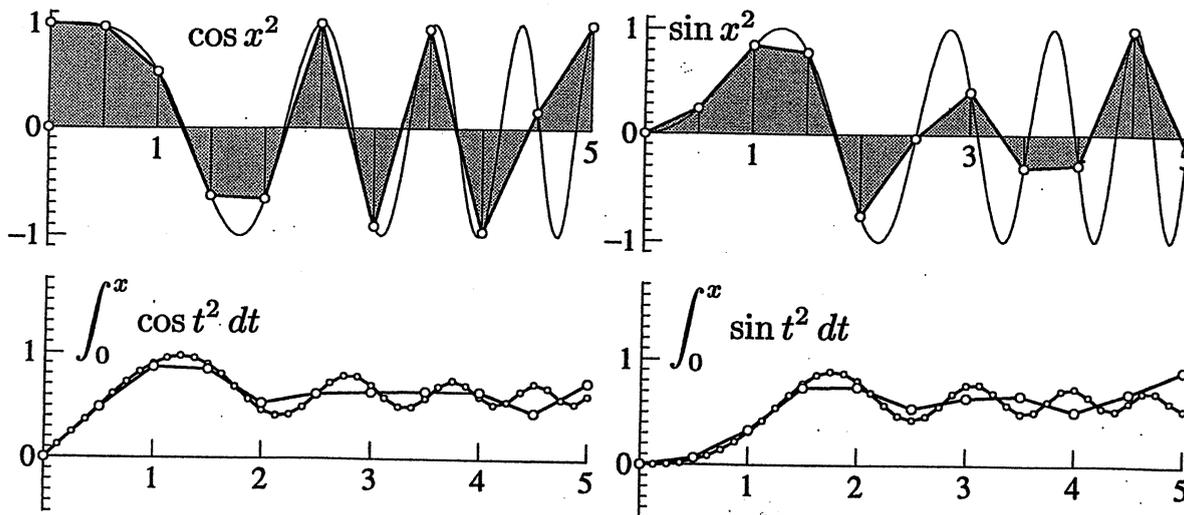


FIGURE 6.4. Intégrales de Fresnel par la règle du trapèze

Méthode de Simpson (Simpson 1743). On prend trois valeurs successives de $f(x_i)$ ($y_i = f(x_i)$) et on fait passer la parabole d'interpolation par ces points (voir le théorème I.1.2 et la formule (2.6)) :

$$p(x) = y_0 + (x - x_0) \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} \frac{\Delta^2 y_0}{h^2}.$$

Avec la substitution $x = x_0 + th$, l'aire entre l'axe x et cette parabole s'écrit

$$(6.7) \quad \int_{x_0}^{x_2} p(x) dx = 2h \cdot y_0 + h \int_0^2 t dt \cdot \Delta y_0 + h \int_0^2 \frac{t(t-1)}{2} dt \cdot \Delta^2 y_0 \\ = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Nous obtenons la règle de Simpson (N pair)

$$(6.8) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + f(x_N)).$$

Méthodes de Newton-Cotes. En prenant des polynômes d'interpolation de degré de plus en plus élevé par des points équidistants, on trouve

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)), \\ \int_{x_0}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{2h}{45} (7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)),$$

et ainsi de suite. La première formule, due à Newton (1671), est nommée "règle 3/8". En 1711, Cotes calcule ces formules pour chaque degré jusqu'à 10 (voir Goldstine 1977, p. 77).

Exemples numériques. Examinons le calcul de $\int_1^{10} \frac{dx}{x} = \ln(10)$ à l'aide des méthodes ci-dessus pour $N = 12, 24, 48, \dots$ (les résultats sont présentés dans le tableau 6.1). On n'observe une véritable amélioration que lorsqu'on passe de la 1^{ère} à la 2^e colonne, puis de la 3^e à 4^e, et ainsi de suite (explication dans l'exercice 6.5).

TABLEAU 6.1. Calcul de $\int_1^{10} \frac{dx}{x}$ avec diverses formules de quadrature

N	trapèze	Simpson	Newton	Cotes
12	2.34	2.307	2.31	2.305
24	2.31	2.303	2.303	2.3027
48	2.305	2.3026	2.3026	2.30259
96	2.303	2.302587	2.30259	2.3025852
192	2.3027	2.3025852	2.3025854	2.302585095
384	2.3026	2.3025851	2.3025851	2.3025850930
768	2.3025	2.302585093	2.302585094	2.3025850929947
1536	2.302587	2.3025850930	2.3025850930	2.30258509299405
3072	2.3025858	2.302585092996	2.302585092999	2.3025850929940458
6144	2.3025852	2.3025850929941	2.3025850929943	2.302585092994045686

TABLEAU 6.2. Calcul d'une intégrale elliptique par la règle du trapèze

N	trapèze
12	4.1
24	4.201
48	4.2020080
96	4.20200890792
192	4.20200890793780018891
384	4.2020089079378001889398329176947477824

Un phénomène intéressant se produit si l'on applique la règle du trapèze à l'intégrale elliptique $P = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \alpha \cos^2 t} dt$ (ici avec $b = 0.2$, $\alpha = 0.96$, cf. tableau 6.2). Elle converge au-delà de toute attente, car la fonction $f(t)$ est *périodique*. Cette "super-convergence" s'explique grâce à la formule d'Euler-Maclaurin (paragraphe II.10).

Développements asymptotiques

Cette méthode fut utilisée par Laplace (1812) pour $\int_0^x e^{-t^2} dt$ (voir *Œuvres*, tome VII, p. 104 et exercice 6.7) et par Cauchy en 1842 pour les intégrales de Fresnel (voir Kline 1972, p. 1100). Alors que les développements en série et les méthodes numériques sont utiles pour des valeurs petites et moyennes de x , la méthode des développements asymptotiques est particulièrement bien adaptée pour des grandes valeurs de x .

Illustrons cette technique sur l'exemple des intégrales de Fresnel. Pour le cas limite $x \rightarrow \infty$, les valeurs exactes des intégrales sont connues (exercice IV.5.14) :

$$(6.9) \quad \int_0^\infty \cos t^2 dt = \int_0^\infty \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ayons l'idée de séparer l'intégrale : $\int_0^x = \int_0^\infty - \int_x^\infty$, c'est-à-dire

$$(6.10) \quad \int_0^x \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_x^\infty \cos t^2 dt.$$

Nous introduisons artificiellement les facteurs $2t$ et $1/(2t)$ dans l'intégrale de droite et intégrons par parties en prenant $u(t) = 1/t$, $v(t) = \sin t^2$. Nous avons alors

$$- \int_x^\infty \cos t^2 dt = -\frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t} \cdot 2t \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \frac{1}{x} \sin x^2 - \frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \sin t^2 dt.$$

On obtient une intégrale qui ne semble pas plus simple que la précédente. Cependant, au cas où x serait grand, l'intégrale de droite, contenant le facteur supplémentaire $1/t^2$, serait beaucoup plus petite que l'intégrale originelle. Donc, $(2x)^{-1} \sin x^2$ est une bonne approximation de $-\int_x^\infty \cos t^2 dt$. Si cette précision ne suffit pas, nous répétons le même procédé (ici avec $u(t) = 1/t^3$ et $v(t) = -\cos t^2$),

$$(6.11) \quad -\frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \sin t^2 dt = -\frac{1}{2 \cdot 2} \frac{1}{x^3} \cos x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \int_x^\infty \frac{1}{t^4} \cos t^2 dt.$$

En continuant ainsi on obtient de (6.10)

$$(6.12) \quad \int_0^x \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{x} \sin x^2 - \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{1}{x^3} \cos x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{x^5} \sin x^2 \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{x^7} \cos x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{x^9} \sin x^2 - \dots$$

Voici une formule analogue :

$$(6.13) \quad \int_0^x \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{x} \cos x^2 - \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{1}{x^3} \sin x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{x^5} \cos x^2 \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{x^7} \sin x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{x^9} \cos x^2 - \dots$$

La précision exceptionnelle de ces approximations pour x grand est illustrée dans la fig. 6.5. Les nombres 1, 3, 5 indiquent la dernière puissance de $1/x$ prise en compte.

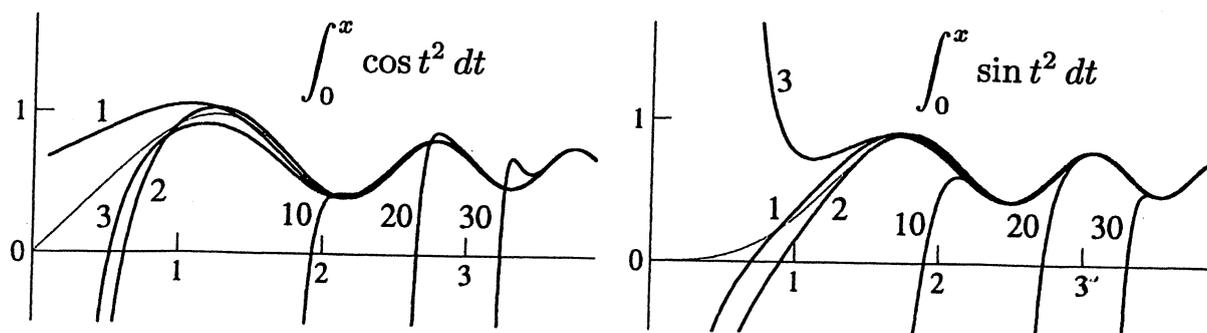


FIGURE 6.5. Développements asymptotiques (6.12) et (6.13) avec 1, 2, 3, 10, 20, et 30 termes

(6.1) *Remarque.* On peut facilement estimer l'erreur commise en tronquant la série (6.12). Par exemple, si nous tronquons après le terme $(2x)^{-1} \sin x^2$ la méthode ci-dessus démontre que l'erreur est la valeur de l'intégrale dans (6.11) (prise sur $x \leq t < \infty$). En utilisant $|\cos t^2| \leq 1$ nous avons la majoration $(2x^3)^{-1}$, plus petite que 0.0625 si $x > 2$.

(6.2) *Remarque.* Les séries infinies (6.12) et (6.13) ne convergent pas pour un x fixé, car le terme général contient le facteur $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \dots$ au numérateur, qui dominera tous les autres facteurs. Poincaré les nomme *développements asymptotiques*.

Exercices

6.1 (Joh. Bernoulli 1697, voir aussi *Opera* III, p. 377). Obtenir la "series mirabili"

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \&c.$$

Indication. Écrire $x^x = e^{x \ln x}$, utiliser la série pour la fonction exponentielle, et calculer $\int x^n (\ln x)^n dx$ en intégrant par parties.

6.2 Jac. Bernoulli rencontre l'intégrale $\int x^2 dx / \sqrt{1-x^4}$ dans ses calculs de la ligne élastique, et Leibniz dans l'étude de l'*Isochrone Paracentrica*. Vérifier la formule (Leibniz 1694b)

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7 \cdot 2 \cdot 1}x^7 + \frac{1 \cdot 3}{11 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2}x^{11} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{15 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}x^{15} \&c.$$

6.3 Comme dans (6.7), obtenir les formules de Newton-Cotes en intégrant respectivement les polynômes d'interpolation de degrés 3 et 4 sur les intervalles $[x_0, x_3]$ et $[x_0, x_4]$.

6.4 Démontrer que pour la courbe définie par (6.5) (voir fig. 6.2),
 a) la longueur de l'arc entre l'origine et $(x(t), y(t))$ est égale à t ,
 b) le rayon de courbure au point $(x(t), y(t))$ est égal à $1/(2t)$.

6.5 Démontrer que la méthode de Simpson est exacte pour tous les polynômes de degré 3.

6.6 Calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

à l'aide de la méthode de Simpson. Étudier la décroissance de l'erreur lorsque N croît.

Résultat. La valeur correcte est $(\pi/8) \ln 2 = 0.2721982613$.

6.7 En utilisant $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$ (voir (IV.5.41) ci-dessous), obtenir un développement asymptotique pour la fonction d'erreur $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ valable pour de grandes valeurs de x (Laplace 1812, *Livre premier*, No. 44).

Résultat. $\Phi(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2 \cdot x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot x^7} + \dots \right)$.

6.8 Calculer numériquement l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x^2 dx = \frac{\pi\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4 \cdot \Gamma(3/4)} \approx 1.674813394.$$

Choisir deux nombres $A \approx 1/10$ et $B \approx 10$ et calculer l'intégrale

- sur l'intervalle $(0, A]$ par une série,
- sur l'intervalle $[A, B]$ par la méthode de Simpson,
- sur l'intervalle $[B, \infty)$ par un développement asymptotique.