Jacques Roubaud

La Princesse Hoppy

ou

Le conte du Labrador

I, 1 En ce temps-là la princesse avait un chien et quatre oncles qui étaient rois. Le premier roi avait nom Aligoté. Il était roi du Zambèze et des environs. Le deuxième roi avait nom Babylas. Il était roi d'Ypermétrope et des environs. Le troisième roi avait nom Eleonor (sans e) et le quatrième Imogène.
Eleonor (sans e) et Imogène n'étaient pas rois de rien du tout. Ils avaient chacun un royaume très grand et très beau mais le conte ne dit pas où présentement pour des raisons de sécurité.

I, 2 Le conte dit ce qu'il faut quand il faut et le conte dit maintenant qu'Aligoté rendait parfois visite à Babylas en son royaume ou bien à Eleonor en le sien ou encore à Imogène et le conte dit que semblablement il arrivait que Babylas rendit visite à Eleonor en son royaume ou bien à Imogène en le sien ou encore à Aligoté et le conte dit encore qu'Eleonor quelquefois visitait Imogène en son royaume Aligoté en le sien ou encore Babylas qu'Imogène parfois s'en allait visiter Aligoté en son royaume Babylas en le sien et Eleonor encore. Du moins c'est ce que dit le conte.

1,3 Et quand le roi Aligoté se trouvait chez Babylas avec la princesse et son chien et que la princesse était descendue jouer à la balle avec son chien sur la pelouse au bas du perron, le roi Babylas disait à Aligoté « Mon cher cousin, si nous passions dans mon bureau ». Mais ici le conte cesse de parler d'Aligoté et de Babylas et retourne à Eleonor qui est allé visiter Imogène en son royaume.

I, 4 Et le conte dit que quand le roi Eleonor se trouvait chez Imogène avec la princesse et son chien et que la princesse était descendue jouer à la balle avec son chien sur la pelouse en bas du perron le roi Imogène disait à Eleonor « mon cher cousin, si nous passions dans mon bureau ». Et quand Eleonor et Imogène étaient tous deux dans le bureau et qu'ils avaient tourné la clé, il complotaient.

I, 5 Il faut vous dire qu'en ce temps-là la princesse avait bien du souci. Car chaque fois qu'un des quatre rois ses oncles (Aligoté par exemple) rendait visite à un autre de ses quatre oncles, un roi (Imogène par exemple), en son royaume et qu'ils entraient dans le bureau après l'avoir envoyée jouer à la balle avec son chien sur la pelouse au bas du perron et qu'ils tournaient la clé, ils complotaient. Ils complotaient contre un des quatre rois qui étaient ses quatre oncles ! Et qui plus est il n'était pas rare qu'un des rois (Eleonor par exemple) se rende visite à lui-même en son royaume, accompagné de la princesse et du chien et, après avoir envoyé la princesse jouer à la balle s'enferme à clé dans son bureau avec lui-même pour comploter. Cela faisait beaucoup de complots et le chien en avait marre de jouer à la balle.

I, 6 Le conte rappelle ici que quand le roi Utherpandragon se trouva atteint du mal de la mort il fit venir auprès de lui la princesse et son chien et aussi ses quatre neveux Imogène, Aligoté, Babylas, Eleonor (sans e) et il leur dit : « Mes enfants, mon enfant, mon chien, je sais que je vais mourir. J'ai le mal de la mort et ça ne pardonne pas. Quand je serai mort, ajouta-t-il, en se tournant vers les quatre rois, ses neveux, je sais bien ce qui va se passer. Imogène, par exemple, va rendre visite à Babylas en son royaume, avec la princesse et son chien, et qu'est ce qu'ils vont faire, je vais vous le dire. Ils vont envoyer la princesse jouer à la balle avec son chien sur la pelouse au bas du perron, ils vont entrer dans le bureau, tourner la clé et comploter. Contre qui ? je ne sais pas, je m'en fous et ça m'est égal. O.K. je ne peux pas vous en empêcher. J'ai le mal de la mort, je vais crever, Merlin me l'a dit y'a rien à faire. Mais il est une règle sacrée qu'en des temps immémoriaux institua saint Benoit et que vous allez me jurer de respecter pour comploter. O.K. ? et Utherpandragon continua d'une voix forte

I, 7 Règle de Saint Benoit : soient trois rois parmi vous quatre : le premier roi, le deuxième roi, le troisième roi. Le premier roi est n'importe quel roi, le deuxième roi est n'importe quel roi (« le deuxième roi peut-il être le même que le premier » interrompit Eleonor « of course » dit Uther) le troisième roi est n'importe quel roi. Alors : le roi contre lequel complote le premier roi quand il rend visite au roi contre lequel complote le deuxième roi quand il rend visite au troisième doit être le même roi précisément contre lequel complote le roi contre lequel complote le premier roi quand il rend visite au deuxième, quand il rend visite au troisième. O.K. dit Uther, ce n'est pas tout. Quand un roi rendra visite à un autre roi ils comploteront toujours contre le même roi. Et si deux rois distincts rendent visite à un même troisième le premier ne complotera jamais contre le même roi que le deuxième. Contre tout roi enfin il sera comploté au moins une fois l'an dans le bureau de chacun des rois. J'ai dit (dit Uther) O.K. ? O. K. dit Uther et il mourut.

I, 8 Le conte dit maintenant que la princesse et son chien auraient bien voulu savoir contre qui complotait l'oncle Imogène quand il rendait visite à l'oncle

Babylas et qu'ils s'enfermaient à clé dans le bureau. Et, d'une manière plus générale, la princesse aurait bien voulu savoir, par exemple, si, étant donnés deux quelconques de ses oncles celui de ses oncles contre lequel complotait le premier quand il rendait visite au deuxième était, ou non, le même que celui contre lequel complotait le deuxième quand il rendait visite au premier. « oui » dit le chien. Il avait ramassé la balle sur la pelouse au bas du perron et la tenait, baveuse, au travers de sa gueule. « ne parle pas la bouche pleine » dit la princesse et elle ajouta « et pourquoi ça, s'il te plaît » « parce que » dit le chien « un oue a uatre éléents est orcéent coutati » Il excellait généralement dans la traduction chien-français quand il avait une balle au travers de ses canines. « ah », dit la princesse. Il était temps d'aller goûter. Et ils remontèrent dans la cuisine où les attendait la reine Ingrid.

I, 9 Or, dit le conte, les rois Aligoté, Imogène, Babylas et Eleonor étaient germains et ils avaient quatre cousines germaines pour femmes. C'étaient les reines Adirondac, Botswanna, Eleonore (avec un e) et Ingrid. La reine Adirondac était née de Zibeline y Zanivcovette. La reine Botswanna était née d'Yolande y Ygrométria. Les reines Eleonore (avec un e) et Ingrid étaient nées également mais le conte ne dit pas où pour des raisons de sécurité. Le conte va droit au but et dit que quand Aligoté par exemple rendait visite à Imogène à seule fin de comploter avec lui selon la règle de Saint Benoit, la reine Adirondac rendait visite à la reine Ingrid en sa cuisine. Et pendant que les rois complotaient les reines faisaient de la compote. Tant et si bien qu'en s'en allant le roi Aligoté pouvait déposer à la poste un colis contenant le reste de compote qui n'avait pas été mangée au goûter destiné à la reine qui était l'épouse du roi contre lequel il avait l'après-midi même dans le bureau d'Imogène comploté. Et c'est ainsi que ça se passait.

I, 10 Tout se passait pour le mieux dans les royaumes. Les rois complotaient, les reines compotaient, la princesse jouait à la balle avec son chien sur la pelouse toute verte au bas du perron, le chien traduisait de français en chien et de chien en français, quand un matin

(à suivre)

Mariages à l'australienne

Quel est le rapport entre les règles de mariages dans une tribu et la théorie des groupes abéliens ? De façon inattendue, comme l'ont mis en évidence Lévi-Strauss et Weil, il faut la seconde pour expliquer les premières.

En étudiant, dans les années 1950, le concept de famille dans diverses civilisations, l'ethnologue Claude Lévi-Strauss a dégagé, avec l'aide du mathématicien André Weil, la notion de « structure élémentaire de la parenté », essentiellement fondée sur la notion mathématique de *groupe*.

D'autres types de famille

Il se trouve que la notion de famille n'a pas le même sens dans toutes les civilisations. Dans la nôtre, en-dehors de quelques règles d'exclusion, chaque homme peut épouser la femme de son choix. D'autres systèmes en revanche sont constitués d'une véritable nomenclature, distinguant entre conjoints « possibles » et conjoints « prohibés ».
La mathématisation des travaux de Lévi-Strauss par Weil fut élaborée en 1943 à New York. Weil écrit :
« Le plus souvent le sociologue s'en tire par l'énumération de tous les cas possibles dans l'intérieur d'un système donné. Mais la tribu des Murngin, à la pointe Nord de l'Australie, s'était donné un système d'une telle ingéniosité que Lévi-Strauss n'arrivait plus à en dérouler les conséquences. [...] Non sans mal, je finis par voir que tout se ramenait à étudier deux permutations et le groupe qu'elles engendrent. [...] Les lois de mariage de la tribu Murngin, et de beaucoup d'autres, comportent le principe suivant : « Tout homme peut épouser la fille du frère de sa mère » [...]. Miraculeusement, ce principe revient à dire que les deux permutations dont il s'agit sont échangeables, donc que le groupe qu'elles engendrent est abélien. Un système qui à première vue menaçait d'être d'une complication inextricable devient ainsi assez facile à décrire dès qu'on introduit une notation convenable. »

L'avènement du structuralisme

Les travaux de Lévi-Strauss débouchèrent sur une thèse de doctorat publiée en 1947, sous le titre Les structures élémentaires de la parenté. Les apports de Weil constituent un appendice de la première partie de l'ouvrage. En étudiant les sociétés primitives élémentaires, Lévi-Strauss a dégagé (à l'aide de Weil pour les parties techniques) une véritable axiomatique ethnologique. Même si, bien sûr, toutes les sociétés primitives observées par Lévi-Strauss ne se modélisent pas par des structures mathématiques aussi rigides que celles des groupes, il n'en reste pas moins que la méthodologie structuraliste, malgré ses excès, a apporté aux sciences humaines une rigueur qu'elles n'avaient pas. En tout cas, les « mariages de Lévi-Strauss » ont une stabilité structurelle que n'ont pas les mariages « sentimentaux » !

N. V.

N.B. : on trouvera un complément à cet article dans le supplément « Éducation ».

Éveline et André Weil en 1948. Photo Lucien Gillet.

Claude Lévi-Strauss

Certains systèmes de règles de mariages sont constitués d'une véritable nomenclature.

BIBLIOGRAPHIE

Marcia Ascher, *Mathématiques d'ailleurs*, Ed. Seuil, 1998.

André Weil, *Souvenirs d'apprentissage*, Ed. Birkäuser, 1991.

par Norbert Verdier

Les maths en famille

Claude Lévi-Strauss

L'ethnologue Claude Lévi-Strauss a dégagé une structure mathématique en étudiant une société traditionnelle australienne, la société Kariera. Au sein de cette société sont distingués quatre clans, les Banaka, les Karimera, les Burung et les Palyeri. Un homme d'un clan X – Lévi-Strauss emploie le mot ego pour désigner une variable – ne peut épouser qu'une femme d'un clan bien défini.

Glossaire

Injectif (ve) *: Une application f est injective si f(x) = f(y) entraîne x = y.*

Surjectif(ve) *: Une application f de E dans F est surjective si tout élément y de F a un antécédent c'est-à-dire que pour tout y de F, il existe x dans E tel que f(x) = y.*

Bijectif(ve) *: f est bijective si elle est injective et surjective c'est-à-dire que tout élément y de F possède un unique antécédent dans E.*

Point fixe *: x est un point fixe (ou invariant) de f si f(x) = x c'est-à-dire si x reste fixe (ou invariant) par f*

Notons S la société étudiée et, par souci de concision, A, B, C et D, les Banaka, les Karimera, les Burung et les Palyeri. Désignons par f(X) le clan au sein duquel un homme du clan X est autorisé à choisir une épouse. La « fonction conjugale » f est définie par :

X	A	B	C	D
f(X)	C	D	A	B

Cela signifie qu'un homme du clan A ne peut épouser qu'une femme du clan C, etc...

La **fonction conjugale** obéit à certaines règles :

• deux hommes appartenant à des classes distinctes ne peuvent épouser que des épouses dans des classes distinctes ce que le mathématicien résume en disant que f est **injective**

• toute femme peut être épousée, autrement dit pour toute femme de n'importe quel clan, il existe un clan pour lequel les hommes de ce clan puissent a priori épouser cette femme. En mathématiques, on dit que f est **surjective**.

• on doit choisir son conjoint dans un autre clan que le sien. L'ethnologue parle d'"exogamie", le mathématicien traduit :

Quel que soit $X \in S$, $f(X) \neq X$

et dit que f ne possède aucun **point invariant** ou aucun **point fixe**.

Bilan : f est **une permutation de S** (car bijective). Elle n'a pas de point fixe et de plus f(f(X))=X (Il suffit de vérifier pour chacun des quatre cas.) On peut encore écrire que f o f = Id (application Identique) et dire, avec les mathématiciens, que f est une involution. Qu'est-ce que cela signifie ? Si j'appartiens à X, le clan de ma femme est f(X), donc un homme du clan f(X) doit épouser une femme du clan f(f(X)) autrement dit de X (car f(f(X))=X). En gros, le frère de ma femme peut épouser ma sœur !

Une organisation sociale complexe

L'organisation sociale de la structure est déterminée par les applications **f**, **p** et **m**. Les relations entre ces trois applications vérifient certaines contraintes :

• si j'appartiens au clan X, le clan de mon fils est par définition p(X) mais comme ma femme appartient au clan f(X), il est aussi donné par m(f(X)). On a donc :

$p(X) = m(f(X))$ soit $p = m \circ f$

• les applications p et m sont nécessairement bijectives. Sinon, certains clans ne seraient pas "atteints" d'où des "extinctions de clan".

• il y a une symétrie des propriétés c'est-à-dire si une propriété est vraie pour un membre du clan A, elle doit être vraie pour les autres clans.

C'est ce qu'on appelle le principe de symétrie.
De la même manière que pour f, on montre que :

- les fonctions m et p des Kariera sont involutives ce qui indique que j'appartiens au clan de ma grand mère maternelle qui est aussi celui de mon grand-père paternel.
- les fonctions f et m permutent c'est-à-dire que f o m = m o f ce qui signifie que ma fille peut épouser le fils de ma sœur.

Si on résume dans un tableau les différentes compositions entre f, p et m, on a :

o	Id	f	m	p
Id	Id	f	m	p
f	f	Id	p	m
f(X)	m	p	Id	f
f(X)	p	m	f	Id

Ce tableau synthétise la structure familiale des Kariera. Et le mathématicien de remarquer aussitôt : l'ensemble {Id, f, m, p} a une structure de **groupe de Klein**.

La notion de groupe et le groupe de Klein

Un **groupe** (fini) est un ensemble non vide tel que si on compose entre eux deux éléments de l'ensemble, on « reste dans l'ensemble ».

Un **groupe de Klein** est un groupe à quatre éléments dont la structure est celle du tableau ci-contre.

o	e	A	B	C
e	e	A	B	C
A	A	e	C	B
B	B	C	e	A
C	C	B	A	e

Dans ce tableau, e est appelé **élément neutre** : en le composant avec n'importe quel élément, on retombe sur e. De plus, dans ce groupe, en combinant avec lui-même tout élément on retombe aussi sur e (on dit que tout élément est son propre **symétrique**). Cela se constate en remarquant que sur la diagonale du tableau précédent, on retrouve toujours l'élément neutre du groupe. Voici un autre groupe à quatre éléments qui n'est pas de Klein :

o	e	A	B	C
e	e	A	B	C
A	A	B	C	e
B	B	C	e	A
C	C	e	A	B

N'est pas de Klein qui veut !

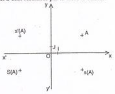
Un modèle géométrique et un modèle purement algébrique permettront de mieux saisir l'essence de cette structure si particulière.

Un modèle géométrique

Considérons dans le plan les symétries suivantes :
s la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.
s' la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.
S la symétrie par rapport au point O.

On désigne par **Id l'application identité** (celle qui à tout point associe le point lui-même autrement dit Id est l'application par laquelle rien ne bouge !). Les diverses combinaisons entre **Id, s, s'** et S sont résumées par la table ci-contre.

o	Id	s	s'	S
Id	Id	s	s'	S
s	s	Id	S	s'
s'	s'	S	Id	s
S	S	s'	s	Id



Un modèle algébrique

Dans ce qui suit, on convient d'ajouter des couples d'éléments (constitués uniquement de 0 et de 1) avec la règle d'addition : (x,y) + (x',y') = (x+x',y+y') et les règles de simplifications : 0 + 0 = 0 , 0 + 1 = 1 + 0 = 1 et 1 + 1 = 0, règles à rapprocher de pair + pair = pair, impair + pair = pair + impair = impair et impair + impair = pair. Les diverses combinaisons entre les couples sont résumées dans la table ci-contre.

o	(0;0)	(1;0)	(0;1)	(1;1)
(0;0)	(0;0)	(1;0)	(0;1)	(1;1)
(1;0)	1;0)	(0;0)	(1;1)	(0;1)
(0;1)	(0;1)	(1;1)	(0;0)	(1;0)
(1;1)	(1;1)	(0;1)	(1;0)	(0;0)

Signalons pour terminer que les groupes de Klein ne servent pas qu'à étudier des familles, des transformations géométriques ou à ajouter des couples de nombres, ils peuvent aussi servir à " écrire des romans ". En effet, l'écrivain et mathématicien Jacques Roubaud (voir **Tangente n° 87**, pp. 36-39) a construit son conte *La princesse Hoppy* sur le fonctionnement d'un groupe de Klein.

N.V.

Bibliographie : Marcia Ascher,Mathématiques d'ailleurs, Ed Seuil, 1998.

Ce dernier modèle offre une représentation intéressante. Chaque élément X de S peut s'exprimer comme un couple de deux caractéristiques (les 0 et les 1). On peut voir S comme composé de deux familles (les Dupont et les Durand) habitant deux villes (Lyon ou Paris). Ainsi A = Dupont de Paris; B = Dupont de Lyon; C = Durand de Paris et D = Durand de Lyon. L'application "fonction conjugale" obéit à la règle selon laquelle un Dupont (respectivement Durand) ne peut épouser qu'une Durand (respectivement une Dupont) et qu'un parisien (respectivement un lyonnais) ne peut épouser qu'une lyonnaise (respectivement une parisienne). Les fonctions de filiation sont définies en posant que les enfants portent le nom de la mère et adoptent la résidence du père. Ce serait une façon d'adapter le modèle Kariera à la société française.

KLEIN Christian **Felix**

Düsseldorf 1849 – Göttingen 1925

Très précoce, le mathématicien allemand Felix KLEIN entre à seize ans à l'université de Bonn où il est l'élève de PLÜCKER. Il obtient en 1868 un doctorat de philosophie. Il vient en 1870 à Paris parfaire sa formation. Il y rencontre JORDAN et DARBOUX, et se lie d'amitié avec Sophus LIE, son voisin de palier. En 1872, il obtient un poste de professeur à l'université d'Erlangen et son discours inaugural, connu sous le nom de *programme d'Erlangen*, influencera les recherches mathématiques jusqu'à la fin du siècle. En 1875, Felix KLEIN s'installe à Munich et enseigne à l'école polytechnique. On le retrouve en 1880 à l'université de Leipzig, puis, en 1886, à l'université de Göttingen où il reste jusqu'à sa retraite en 1913. A partir de 1876 et pendant quarante ans, il est rédacteur en chef de la célèbre revue *Mathematische Annalen*. Il est le principal artisan de la conception de l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Il s'intéresse à la pédagogie des mathématiques, domaine dans lequel son influence est importante. Son œuvre fait le lien entre la théorie des groupes et la géométrie. Il développe l'étude des géométries non euclidiennes, mais on lui doit aussi des travaux sur la théorie des équations algébriques, les fonctions elliptiques et les fonctions automorphes.

Héritier des concepts géométriques de PLÜCKER et enthousiasmé par l'étude de la géométrie à travers la théorie des groupes dont il avait compris l'importance à Paris, KLEIN expose – il n'a que vingt-trois ans ! – sa conception de la géométrie dans le *programme d'Erlangen*. KLEIN y décrit les idées qui fondent, pour lui, une géométrie, idées qui sont toujours actuelles aujourd'hui, un siècle plus tard. La nouveauté fondamentale est que, pour KLEIN, ce qui caractérise une géométrie n'est plus un espace possédant certaines propriétés, mais la donnée d'un ensemble E (qu'il nomme *multiplicité*) et d'un groupe G de bijections de E. L'objet de la géométrie qui s'en déduit est « d'étudier les êtres [de l'ensemble] au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe. » Il donne de nombreux exemples, notamment dans le cadre de la géométrie projective, à l'aide de ce que nous nommons aujourd'hui les groupes classiques dont il fut l'un des principaux découvreurs. Les successeurs de KLEIN élargissent cette conception à l'aide de la notion de groupe opérant sur un ensemble.

KLEIN s'intéresse aussi au développement des géométries non euclidiennes. C'est lui qui donne le nom de géométrie hyperbolique à la géométrie de l'angle aigu et d'elliptique à celle de l'angle obtus. Il distingue même la géométrie simplement elliptique, où deux points définissent une et une seule droite, et la géométrie doublement elliptique dans laquelle deux points peuvent définir plusieurs droites. Il donne un modèle de la première en considérant une demi-sphère, avec sa frontière, deux points diamétralement opposés de la frontière étant identifiés. Un exemple de la seconde est la géométrie sphérique.

Groupe de Klein

Le *groupe de Klein* est le groupe produit, à quatre éléments, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou tout groupe qui lui est isomorphe, par exemple le sous-groupe du groupe des isométries d'un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormal, composé de l'identité, de la symétrie par rapport à l'origine et des symétries orthogonales par rapport aux axes.

Bouteille de Klein

La *bouteille de Klein* est l'espace topologique quotient obtenu en identifiant les extrémités d'un cylindre circulaire dans la direction opposée à celle permettant l'obtention d'un tore. Cette surface n'est pas constructible dans l'espace euclidien de dimension trois. Comme le ruban de Möbius, elle n'a qu'un seul côté ; de plus elle est fermée mais n'a pas d'intérieur.