

Application du calcul des probabilités aux sciences morales.

On vient de voir les avantages qu'offre l'analyse des probabilités, dans la recherche des lois des phénomènes naturels dont les causes sont inconnues, ou trop compliquées pour que leurs effets puissent être soumis au calcul. C'est le cas de presque tous les objets des sciences morales. Tant de causes imprévues, ou cachées, ou inappréciables, influent sur les institutions humaines, qu'il est impossible d'en juger *à priori* les résultats. La série des événements que le temps amène, développe ces résultats et indique les moyens de remédier à ceux qui sont nuisibles. On a souvent fait, à cet égard, des lois sages; mais, parce que l'on avait négligé d'en conserver les motifs, plusieurs ont été abrogées comme inutiles, et il a fallu, pour les rétablir, que de fâcheuses expériences en aient fait de nouveau sentir le besoin. Il est donc bien important de tenir, dans chaque branche de l'administration publique, un registre exact des effets qu'ont produits les divers moyens dont on a fait usage, et qui sont autant d'expériences faites en grand, par les gouvernements. Appliquons aux sciences politiques et morales la méthode fondée sur l'observation et sur le calcul, méthode qui nous a si bien servi dans les sciences naturelles. N'opposons point une résistance inutile et souvent dangereuse aux effets inévitables du progrès des lumières, mais ne changeons qu'avec une circonspection extrême nos institutions et les usages auxquels nous sommes depuis longtemps pliés. Nous connaissons bien, par l'expérience du passé, les inconvénients qu'ils présentent, mais nous ignorons quelle est l'étendue des maux que leur changement peut produire. Dans cette ignorance, la théorie des probabilités prescrit d'éviter tout changement: surtout il faut éviter les changements brusques qui, dans l'ordre moral comme dans l'ordre physique, ne s'opèrent jamais sans une grande perte de force vive.

Déjà le calcul des probabilités a été appliqué avec succès à plusieurs objets des sciences morales. Je vais en présenter ici les principaux résultats.

De la probabilité des témoignages.

La plupart de nos jugements étant fondés sur la probabilité des témoignages, il est bien important de la soumettre au calcul. La chose, il est vrai, devient souvent impossible par la difficulté d'apprécier la véracité des témoins, et par le grand nombre de circonstances dont les faits qu'ils attestent sont accompagnés. Mais on peut, dans plusieurs cas, résoudre des problèmes qui ont beaucoup d'analogie avec les questions qu'on se propose, et dont les solutions peuvent être regardées comme des approximations propres à nous guider, et à nous garantir des erreurs et des dangers auxquels de mauvais raisonnements nous exposent. Une approximation de ce genre, lorsqu'elle est bien conduite, est toujours préférable aux raisonnements les plus spécieux. Essayons donc de donner quelques règles générales pour y parvenir.

On a extrait un seul numéro d'une urne qui en renferme mille. Un témoin de ce tirage annonce que le n° 79 est sorti; on demande la probabilité de cette sortie. Supposons que l'expérience ait fait connaître que ce témoin trompe une fois sur dix, en sorte que la probabilité de son témoignage soit $\frac{9}{10}$. Ici, l'événement observé est le témoin attestant que le n° 79 est sorti. Cet événement peut résulter des deux hypothèses suivantes, savoir, que le témoin énonce la vérité, ou qu'il trompe. Suivant le principe que nous avons exposé sur la probabilité des causes, tirée des événements observés, il faut d'abord déterminer *à priori* la probabilité de l'événement dans chaque hypothèse. Dans la première, la probabilité que le témoin annoncera le n° 79 est la probabilité même de la sortie de ce numéro, c'est-à-dire $\frac{1}{1000}$. Il faut la multiplier par la probabilité $\frac{9}{10}$ de la véracité du témoin;

on aura donc $\frac{0}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette hypothèse. Si le témoin trompe, le n° 79 n'est pas sorti; et la probabilité de ce cas est $\frac{999}{10000}$. Mais, pour annoncer la sortie de ce numéro, le témoin doit le choisir parmi les 999 numéros non sortis; et, comme il est supposé n'avoir aucun motif de préférence pour les uns plutôt que pour les autres, la probabilité qu'il choisira le n° 79 est $\frac{1}{999}$; en multipliant donc cette probabilité par la précédente, on aura $\frac{1}{10000}$ pour la probabilité que le témoin annoncera le n° 79 dans la seconde hypothèse. Il faut encore multiplier cette probabilité par la probabilité $\frac{1}{10}$ de l'hypothèse elle-même; ce qui donne $\frac{1}{100000}$ pour la probabilité de l'événement relative à cette hypothèse. Présentement, si l'on forme une fraction dont le numérateur soit la probabilité relative à la première hypothèse, et dont le dénominateur soit la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses, on aura, par le sixième principe, la probabilité de la première hypothèse, et cette probabilité sera $\frac{9}{10}$, c'est-à-dire la vérité même du témoin. C'est aussi la probabilité de la sortie du n° 79. La probabilité du mensonge du témoin et de la non sortie de ce numéro est $\frac{1}{10}$.

Si le témoin, voulant tromper, avait quelque intérêt à choisir le n° 79 parmi les numéros non sortis; s'il jugeait, par exemple, qu'ayant placé sur ce numéro une mise considérable, l'annonce de sa sortie augmentera son crédit, la probabilité qu'il choisira ce numéro ne sera plus, comme auparavant, $\frac{1}{999}$; elle pourra être alors $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc. suivant l'intérêt qu'il aura d'annoncer sa sortie. En la supposant $\frac{1}{3}$, il faudra multiplier par cette fraction la probabilité $\frac{999}{10000}$, pour avoir, dans l'hypothèse du mensonge, la probabilité de l'événement observé, qu'il faut encore multiplier par $\frac{1}{10}$; ce qui donne $\frac{111}{100000}$ pour la probabilité de l'événement dans la seconde hypothèse. Alors la probabilité de la première hypothèse, ou de la sortie du n° 79, se réduit, par la règle précédente, à $\frac{9}{120}$. Elle est donc très-affaiblie par la considération de l'intérêt que le

témoin peut avoir à annoncer la sortie du n° 79. A la vérité, ce même intérêt augmente la probabilité $\frac{9}{10}$ que le témoin dira la vérité, si le n° 79 sort. Mais cette probabilité ne peut excéder l'unité ou $\frac{10}{10}$; ainsi la probabilité de la sortie du n° 79 ne surpassera pas $\frac{10}{121}$. Le bon sens nous dicte que cet intérêt doit inspirer de la défiance; mais le calcul en apprécie l'influence.

La probabilité *à priori* du numéro énoncé par le témoin est l'unité divisée par le nombre des numéros de l'urne; elle se transforme, en vertu du témoignage, dans la vérité même du témoin; elle peut donc être affaiblie par ce témoignage. Si, par exemple, l'urne ne renferme que deux numéros, ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la probabilité *à priori* de la sortie du n° 1; et si la vérité d'un témoin qui l'annonce est $\frac{9}{10}$, cette sortie en devient moins probable. En effet, il est visible que le témoin ayant alors plus de pente vers le mensonge que vers la vérité, son témoignage doit diminuer la probabilité du fait attesté, toutes les fois que cette probabilité égale ou dépasse $\frac{1}{2}$. Mais s'il y a trois numéros dans l'urne, la probabilité *à priori* de la sortie du n° 1 est accrue par l'affirmation d'un témoin dont la vérité dépasse $\frac{1}{3}$.

Supposons maintenant que l'urne renferme 999 boules noires et une boule blanche, et qu'une boule en ayant été extraite, un témoin du tirage annonce que cette boule est blanche; la probabilité de l'événement observé, déterminée *à priori* dans la première hypothèse, sera ici, comme dans la question précédente, égale à $\frac{0}{10000}$. Mais dans l'hypothèse où le témoin trompe, la boule blanche n'est pas sortie, et la probabilité de ce cas est $\frac{999}{10000}$. Il faut la multiplier par la probabilité $\frac{1}{10}$ du mensonge, ce qui donne $\frac{999}{100000}$ pour la probabilité de l'événement observé, relative à la seconde hypothèse. Cette probabilité n'était que $\frac{1}{100000}$ dans la question précédente: cette grande différence tient à ce qu'une boule noire étant sortie, le témoin qui veut tromper n'a point de choix à faire parmi les 999 boules non sorties, pour annoncer la sortie d'une boule

blanche. Maintenant, si l'on forme deux fractions dont les numérateurs soient les probabilités relatives à chaque hypothèse, et dont le dénominateur commun soit la somme de ces probabilités, on aura $\frac{9}{1008}$ pour la probabilité de la première hypothèse et de la sortie d'une boule blanche, et $\frac{999}{1008}$ pour la probabilité de la seconde hypothèse et de la sortie d'une boule noire. Cette dernière probabilité est fort approchante de la certitude; elle en approcherait beaucoup plus encore, et deviendrait $\frac{999999}{1000000}$, si l'urne renfermait un million de boules dont une seule serait blanche, la sortie d'une boule blanche devenant alors beaucoup plus extraordinaire. On voit ainsi comment la probabilité du mensonge croît à mesure que le fait devient plus extraordinaire.

Nous avons supposé jusqu'ici que le témoin ne se trompait point; mais si l'on admet encore la chance de son erreur, le fait extraordinaire devient plus invraisemblable. Alors au lieu de deux hypothèses, on aura les quatre suivantes, savoir, celle du témoin ne trompant point et ne se trompant point; celle du témoin ne trompant point et se trompant; l'hypothèse du témoin trompant et ne se trompant point; enfin celle du témoin trompant et se trompant. En déterminant *a priori* dans chacune de ces hypothèses la probabilité de l'événement observé, on trouve par le sixième principe, la probabilité que le fait attesté est faux, égale à une fraction dont le numérateur est le nombre des boules noires de l'urne, multiplié par la somme des probabilités que le témoin ne trompe point et se trompe, ou qu'il trompe et ne se trompe point, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté de la somme des probabilités que le témoin ne trompe point et ne se trompe point, ou qu'il trompe et se trompe à la fois. On voit par là que si le nombre des boules noires de l'urne est très-grand, ce qui rend extraordinaire la sortie de la boule blanche, la probabilité que le fait attesté n'est pas approche extrêmement de la certitude.

En étendant cette conséquence à tous les faits extraordinaires, il en résulte que la probabilité de l'erreur ou du mensonge du témoin devient d'autant plus grande que le fait attesté est plus extraordinaire. Quelques auteurs ont avancé le contraire, en se fondant sur ce que la vue d'un fait extraordinaire étant parfaitement semblable à celle d'un fait ordinaire, les mêmes motifs doivent nous porter à croire également le témoin, quand il affirme l'un ou l'autre de ces faits. Le simple bon sens repousse une aussi étrange assertion; mais le calcul des probabilités, en confirmant l'indication du sens commun, apprécie de plus l'invraisemblance des témoignages sur les faits extraordinaires.

On insiste et l'on suppose deux témoins, également dignes de foi, dont le premier atteste qu'il a vu mort, il y a quinze jours, un individu que le second témoin affirme avoir vu hier plein de vie. L'un ou l'autre de ces faits n'offre rien d'invraisemblable. La résurrection de l'individu est une conséquence de leur ensemble; mais les témoignages ne portant point directement sur elle, ce qu'elle a d'extraordinaire ne doit point affaiblir la croyance qui leur est due. (*Encyclopédie*, art. *Certitude*.)

Cependant, si la conséquence qui résulte de l'ensemble des témoignages était impossible, l'un d'eux serait nécessairement faux; or, une conséquence impossible est la limite des conséquences extraordinaires, comme l'erreur est la limite des invraisemblances; la valeur des témoignages, qui devient nulle dans le cas d'une conséquence impossible, doit donc être très-affaiblie dans celui d'une conséquence extraordinaire. C'est, en effet, ce que le calcul des probabilités confirme.

Pour le faire voir, considérons deux urnes A et B dont la première contient un million de boules blanches, et la seconde, un million de boules noires. On tire de l'une de ces urnes une boule que l'on remet dans l'autre urne, dont on extrait ensuite une boule. Deux témoins, l'un du premier tirage, et l'autre du second,

attestent que la boule qu'ils ont vu extraire est blanche. Chaque témoignage, pris isolément, n'a rien d'in vraisemblable, et il est facile de voir que la probabilité du fait attesté est la vérité même du témoin. Mais il suit de l'ensemble des témoignages, qu'une boule blanche a été extraite de l'urne A au premier tirage, et qu'ensuite, mise dans l'urne B, elle a reparu au second tirage, ce qui est fort extraordinaire; car cette seconde urne renfermant alors une boule blanche sur un million de boules noires, la probabilité d'en extraire la boule blanche est $\frac{1}{1000001}$. Pour déterminer l'affaiblissement qui en résulte dans la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins, nous remarquerons que l'événement observé est ici l'affirmation par chacun d'eux, que la boule qu'il a vu extraire est blanche. Représentons par $\frac{9}{10}$ la probabilité qu'il énonce la vérité, ce qui peut avoir lieu dans le cas présent, lorsque le témoin ne trompe point et ne se trompe point, et lorsqu'il trompe et se trompe à la fois. On peut former les quatre hypothèses suivantes.

1° Le premier et le second témoin disent la vérité. Alors une boule blanche a d'abord été extraite de l'urne A, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2}$, puisque la boule extraite au premier tirage a pu sortir également de l'une ou de l'autre urne. Ensuite la boule extraite mise dans l'urne B a reparu au second tirage : la probabilité de cet événement est $\frac{1}{1000001}$; la probabilité du fait énoncé est donc $\frac{1}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{9}{10}$ et $\frac{9}{10}$ que les témoins disent la vérité, on aura $\frac{81}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette première hypothèse.

2° Le premier témoin dit la vérité, et le second ne la dit point, soit qu'il trompe et ne se trompe point, soit qu'il ne trompe point et se trompe. Alors une boule blanche est sortie de l'urne A au premier tirage, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2}$. Ensuite, cette boule ayant été mise dans l'urne B, une boule noire en a été extraite : la probabilité de cette extraction est $\frac{1000000}{1000001}$; on a donc $\frac{1000000}{2000002}$

pour la probabilité de l'événement composé. En la multipliant par le produit des deux probabilités $\frac{9}{10}$ et $\frac{1}{10}$ que le premier témoin dit la vérité, et que le second ne la dit point, on aura $\frac{9000000}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hypothèse.

3° Le premier témoin ne dit pas la vérité, et le second l'énonce. Alors une boule noire est sortie de l'urne B au premier tirage, et, après avoir été mise dans l'urne A, une boule blanche a été extraite de cette urne. La probabilité du premier de ces événements est $\frac{1}{2}$, et celle du second est $\frac{1000000}{1000001}$: la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{1000000}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{9}{10}$ que le premier témoin ne dit pas la vérité, et que le second l'énonce, on aura $\frac{9000000}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, relative à cette hypothèse.

4° Enfin, aucun des témoins ne dit la vérité. Alors une boule noire a été extraite de l'urne B au premier tirage, ensuite, ayant été mise dans l'urne A, elle a reparu au second tirage. La probabilité de cet événement composé est $\frac{1}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{10}$ que chaque témoin ne dit pas la vérité, on aura $\frac{1}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Maintenant, pour avoir la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins, savoir, qu'une boule blanche a été extraite à chacun des tirages, il faut diviser la probabilité correspondante à la première hypothèse par la somme des probabilités relatives aux quatre hypothèses, et alors on a pour cette probabilité $\frac{81}{18000002}$, fraction extrêmement petite.

Si les deux témoins affirmaient, le premier, qu'une boule blanche a été extraite de l'une des deux urnes A et B; le second, qu'une boule blanche a été pareillement extraite de l'une des deux urnes A' et B', en tout semblables aux premières; la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins serait le produit des probabilités de leurs témoignages, ou $\frac{81}{100}$: elle serait donc

cent quatre-vingt mille fois au moins plus grande que la précédente. On voit par là combien, dans le premier cas, la réapparition au second tirage de la boule blanche extraite au premier, conséquence extraordinaire des deux témoignages, en affaiblit la valeur.

Nous n'ajouterions point foi au témoignage d'un homme qui nous attesterait qu'en projetant cent dés en l'air, ils sont tous retombés sur la même face : si nous avions été nous-mêmes spectateurs de cet événement, nous n'en croirions nos propres yeux qu'après en avoir scrupuleusement examiné toutes les circonstances, et après en avoir rendu d'autres yeux témoins, pour être bien sûrs qu'il n'y a eu ni hallucination ni prestige ; mais, après cet examen, nous ne balancerions point à l'admettre, malgré son extrême invraisemblance, et personne ne serait tenté, pour l'expliquer, de recourir à un renversement des lois de la vision. Nous devons en conclure que la probabilité de la constance des lois de la nature est pour nous supérieure à celle que l'événement dont il s'agit ne doit point avoir lieu, probabilité supérieure elle-même à celle de la plupart des faits historiques que nous regardons comme incontestables. On peut juger par là du poids immense de témoignages nécessaire pour admettre une suspension des lois naturelles, et combien il serait abusif d'appliquer à ce cas les règles ordinaires de la critique. Tous ceux qui, sans offrir cette immensité de témoignages, étayaient ce qu'ils avançaient d'événements contraires à ces lois, affaiblissent plutôt qu'ils n'augmentent la croyance qu'ils cherchent à inspirer, car alors ces récits rendent très-probable l'erreur ou le mensonge de leurs auteurs. Mais ce qui diminue la croyance des hommes éclairés accroît souvent celle du vulgaire, toujours avide du merveilleux.

Il y a des choses tellement extraordinaires que rien ne peut en balancer l'invraisemblance ; mais celle-ci, par l'effet d'une opinion dominante, peut être affaiblie au point de paraître inférieure à la probabilité des témoignages, et, quand cette opinion vient à

changer, un récit absurde, admis unanimement dans le siècle qui lui a donné naissance, n'offre aux siècles suivants qu'une nouvelle preuve de l'extrême influence de l'opinion générale sur les meilleurs esprits. Deux grands hommes du siècle de Louis XIV, Racine et Pascal, en sont des exemples frappants. Il est affligeant de voir avec quelle complaisance Racine, ce peintre admirable du cœur humain et le poète le plus parfait qui fut jamais, rapporte comme miraculeuse la guérison de la jeune Perrier, nièce de Pascal et pensionnaire à l'abbaye de Port-Royal ; il est pénible de lire les raisonnements par lesquels Pascal cherche à prouver que ce miracle devenait nécessaire à la religion, pour justifier la doctrine des religieuses de cette abbaye, alors persécutées par les jésuites. La jeune Perrier était, depuis trois ans et demi, affligée d'une fistule lacrymale ; elle toucha, de son œil malade, une relique que l'on prétendait être une des épines de la couronne du Sauveur, et elle se crut à l'instant guérie. Quelques jours après, les médecins et les chirurgiens constatèrent la guérison, et ils jugèrent que la nature et les remèdes n'y avaient eu aucune part. Cet événement, arrivé en 1656, ayant fait un grand bruit, « tout Paris se porta, dit Racine, à Port-Royal. La foule « croissait de jour en jour, et Dieu même semblait prendre plaisir « à autoriser la dévotion des peuples, par la quantité de miracles « qui se firent en cette église. » A cette époque, les miracles et les sortilèges ne paraissaient pas encore invraisemblables ; et l'on n'hésitait point à leur attribuer les singularités de la nature que l'on ne pouvait autrement expliquer.

Cette manière d'envisager les effets extraordinaires se retrouve dans les ouvrages les plus remarquables du siècle de Louis XIV, dans l'Essai même sur l'entendement humain, du sage Locke, qui dit, en parlant des degrés d'assentiment : « Quoique la commune expérience et le cours ordinaire des choses aient avec « raison une grande influence sur l'esprit des hommes, pour les

« porter à donner ou à refuser leur consentement à une chose qui
 « leur est proposée à croire, il y a pourtant un cas où ce qu'il y a
 « d'étrange dans un fait n'affaiblit point l'assentiment que nous
 « devons donner au témoignage sincère sur lequel il est fondé.
 « Lorsque des événements surnaturels sont conformes aux fins
 « que se propose celui qui a le pouvoir de changer le cours de la
 « nature, dans un tel temps et dans de telles circonstances, ils
 « peuvent être d'autant plus propres à trouver créance dans nos
 « esprits, qu'ils sont plus au-dessus des observations ordinaires,
 « ou même qu'ils y sont plus opposés. » Les vrais principes de la
 probabilité des témoignages ayant été ainsi méconnus des philo-
 sophes auxquels la raison est principalement redevable de ses
 progrès, j'ai cru devoir exposer avec étendue les résultats du
 calcul sur cet important objet.

Ici se présente naturellement la discussion d'un argument fa-
 meux de Pascal, que Craig, mathématicien anglais, a reproduit
 sous une forme géométrique. Des témoins attestent qu'ils tiennent
 de la Divinité même, qu'en se conformant à telle chose on jouira,
 non pas d'une ou de deux, mais d'une infinité de vies heureuses.
 Quelque faible que soit la probabilité des témoignages, pourvu
 qu'elle ne soit pas infiniment petite, il est clair que l'avantage
 de ceux qui se conforment à la chose prescrite est infini, puis-
 qu'il est le produit de cette probabilité par un bien infini : on ne
 doit donc point balancer à se procurer cet avantage.

Cet argument est fondé sur le nombre infini des vies heu-
 reuses promises au nom de la Divinité par les témoins. Il faudrait
 donc faire ce qu'ils prescrivent, précisément parce qu'ils exa-
 gèrent leurs promesses au delà de toutes limites, conséquence
 qui répugne au bon sens. Aussi le calcul nous fait-il voir que
 cette exagération même affaiblit la probabilité de leur témoignage
 au point de la rendre infiniment petite ou nulle. En effet, ce cas
 revient à celui d'un témoin qui annoncerait la sortie du numéro

le plus élevé d'une urne remplie d'un grand nombre de numéros,
 dont un seul a été extrait, et qui aurait un grand intérêt à an-
 noncer la sortie de ce numéro. On a vu précédemment combien
 cet intérêt affaiblit son témoignage. En n'évaluant qu'à $\frac{1}{2}$ la pro-
 babilité que si le témoin trompe, il choisira le plus grand numéro,
 le calcul donne la probabilité de son annonce plus petite qu'une
 fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur
 est l'unité plus la moitié du produit du nombre des numéros,
 par la probabilité du mensonge, considérée *à priori*, ou indépen-
 damment de l'annonce. Pour assimiler ce cas à celui de l'argument
 de Pascal, il suffit de représenter par les numéros de l'urne tous
 les nombres possibles de vies heureuses, ce qui rend le nombre
 de ces numéros infini, et d'observer que si les témoins trompent
 ils ont le plus grand intérêt, pour accréditer leur mensonge, à
 promettre une éternité de bonheur. L'expression de la probabi-
 lité de leur témoignage devient alors infiniment petite. En la
 multipliant par le nombre infini de vies heureuses promises,
 l'infini disparaît du produit qui exprime l'avantage résultant de
 cette promesse, ce qui détruit l'argument de Pascal.

Considérons présentement la probabilité de l'ensemble de plu-
 sieurs témoignages sur un fait déterminé. Pour fixer les idées,
 supposons que ce fait soit la sortie d'un numéro d'une urne qui
 en renferme cent, et dont on a extrait un seul numéro. Deux té-
 moins de ce tirage annoncent que le n° 1 est sorti, et l'on demande
 la probabilité résultante de l'ensemble de ces témoignages. On
 peut former ces deux hypothèses : les témoins disent la vérité,
 les témoins trompent. Dans la première hypothèse, le n° 1 est
 sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{100}$. Il faut la multi-
 plier par le produit des véracités des témoins, véracités que nous
 supposerons être $\frac{9}{10}$ et $\frac{7}{10}$: on aura donc $\frac{63}{10000}$ pour la probabilité de
 l'événement observé, dans cette hypothèse. Dans la seconde, le
 n° 1 n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{99}{100}$.

Mais l'accord des témoins exige alors qu'en cherchant à tromper ils choisissent tous deux le n° 1 sur les 99 numéros non sortis : la probabilité de ce choix est le produit de la fraction $\frac{1}{99}$ par elle-même ; il faut ensuite multiplier ces deux probabilités ensemble, et par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ que les témoins trompent, on aura ainsi $\frac{1}{330000}$ pour la probabilité de l'événement observé dans la seconde hypothèse. Maintenant on aura la probabilité du fait attesté, ou de la sortie du n° 1, en divisant la probabilité relative à la première hypothèse par la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses. Cette probabilité sera donc $\frac{2079}{2080}$, et la probabilité de la non sortie de ce numéro et du mensonge des témoins sera $\frac{1}{2080}$.

Si l'urne ne renfermait que les numéros 1 et 2, on trouverait de la même manière, $\frac{21}{22}$ pour la probabilité de la sortie du n° 2, et par conséquent $\frac{1}{22}$ pour la probabilité du mensonge des témoins, probabilité quatre-vingt-quatorze fois au moins plus grande que la précédente. On voit par là combien la probabilité du mensonge des témoins diminue, quand le fait qu'ils attestent est moins probable en lui-même. En effet, on conçoit qu'alors l'accord des témoins, lorsqu'ils trompent, devient plus difficile, à moins qu'ils ne s'entendent, ce que nous ne supposons pas ici.

Dans le cas précédent, où, l'urne ne renfermant que deux numéros, la probabilité *à priori* du fait attesté est $\frac{1}{2}$, la probabilité résultante des témoignages est le produit des véracités des témoins, divisé par ce produit ajouté à celui des probabilités respectives de leur mensonge.

Il nous reste à considérer l'influence du temps sur la probabilité des faits transmis par une chaîne traditionnelle de témoins. Il est clair que cette probabilité doit diminuer à mesure que la chaîne se prolonge. Si le fait n'a aucune probabilité par lui-même, celle qu'il acquiert par les témoignages décroît suivant le produit continu de la véracité des témoins. Si le fait a par lui-même

une probabilité ; si, par exemple, ce fait est la sortie du n° 2 d'une urne qui en renferme un nombre fini, et dont il est certain qu'on a extrait un seul numéro ; ce que la chaîne traditionnelle ajoute à cette probabilité décroît suivant un produit continu, dont le premier facteur est le rapport du nombre des numéros de l'urne moins un, à ce même nombre ; et dont chaque autre facteur est la véracité de chaque témoin, diminuée du rapport de la probabilité de son mensonge, au nombre de numéros de l'urne moins un ; en sorte que la limite de la probabilité du fait est celle de ce fait considéré *à priori* ou indépendamment des témoignages, probabilité égale à l'unité divisée par le nombre des numéros de l'urne.

L'action du temps affaiblit donc sans cesse la probabilité des faits historiques, comme elle altère les monuments les plus durables. On peut, à la vérité, la ralentir en multipliant et conservant les témoignages et les monuments qui les étayent. L'imprimerie offre pour cet objet un grand moyen, malheureusement inconnu des anciens. Malgré les avantages infinis qu'elle procure, les révolutions physiques et morales dont la surface de ce globe sera toujours agitée finiront, en se joignant à l'effet inévitable du temps, par rendre douteux, après des milliers d'années, les faits historiques aujourd'hui les plus certains.

Craig a essayé de soumettre au calcul l'affaiblissement graduel des preuves de la religion chrétienne : en supposant que le monde doit finir à l'époque où elle cessera d'être probable, il trouve que cela doit arriver 1454 ans après le moment où il écrit. Mais son analyse est aussi fautive que son hypothèse sur la durée du monde est bizarre.

Des choix et des décisions des assemblées.

La probabilité des décisions d'une assemblée dépend de la pluralité des voix, des lumières et de l'impartialité des membres qui

la composent : tant de passions et d'intérêts particuliers y mêlent si souvent leur influence, qu'il est impossible de soumettre au calcul cette probabilité. Il y a cependant quelques résultats généraux dictés par le simple bon sens, et que le calcul confirme. Si, par exemple, l'assemblée est très-peu éclairée sur l'objet soumis à sa décision ; si cet objet exige des considérations délicates, ou si la vérité sur ce point est contraire à des préjugés reçus, en sorte qu'il y ait plus d'un contre un à parier que chaque votant s'en écartera ; alors la décision de la majorité sera probablement mauvaise, et la crainte à cet égard sera d'autant plus juste que l'assemblée sera plus nombreuse. Il importe donc à la chose publique que les assemblées n'aient à prononcer que sur des objets à la portée du plus grand nombre ; il importe que l'instruction soit généralement répandue, et que de bons ouvrages, fondés sur la raison et sur l'expérience, éclairent ceux qui sont appelés à décider du sort de leurs semblables ou à les gouverner, et les prémunissent d'avance contre les faux aperçus et les préventions de l'ignorance. Les savants ont de fréquentes occasions de remarquer que les premiers aperçus trompent souvent, et que le vrai n'est pas toujours vraisemblable.

Il est difficile de connaître et même de définir le vœu d'une assemblée, au milieu de la variété des opinions de ses membres. Essayons de donner sur cela quelques règles, en considérant les deux cas les plus ordinaires, l'élection entre plusieurs candidats, et celle entre plusieurs propositions relatives au même objet.

Lorsqu'une assemblée doit choisir entre plusieurs candidats qui se présentent pour une ou plusieurs places du même genre, ce qui paraît le plus simple est de faire écrire à chaque votant sur un billet les noms de tous les candidats, suivant l'ordre du mérite qu'il leur attribue. En supposant qu'il les classe de bonne foi, l'inspection de ces billets fera connaître les résultats des élections, de quelque

manière que les candidats soient comparés entre eux ; en sorte que de nouvelles élections ne peuvent apprendre rien de plus à cet égard. Il s'agit présentement d'en conclure l'ordre de préférence que les billets établissent entre les candidats. Imaginons que l'on donne à chaque électeur une urne qui contienne une infinité de boules au moyen desquelles il puisse nuancer tous les degrés de mérite des candidats ; concevons encore qu'il tire de son urne un nombre de boules proportionnel au mérite de chaque candidat, et supposons ce nombre écrit sur un billet, à côté du nom du candidat. Il est clair qu'en faisant une somme de tous les nombres relatifs à chaque candidat sur chaque billet, celui de tous les candidats qui aura la plus grande somme sera le candidat que l'assemblée préfère, et qu'en général l'ordre de préférence des candidats sera celui des sommes relatives à chacun d'eux. Mais les billets ne marquent point le nombre des boules que chaque électeur donne aux candidats : ils indiquent seulement que le premier en a plus que le second, le second plus que le troisième, et ainsi de suite. En supposant donc au premier, sur un billet donné, un nombre quelconque de boules, toutes les combinaisons des nombres inférieurs, qui remplissent les conditions précédentes, sont également admissibles ; et l'on aura le nombre de boules relatif à chaque candidat, en faisant une somme de tous les nombres que chaque combinaison lui donne, et en la divisant par le nombre entier des combinaisons. Une analyse fort simple fait voir que les nombres qu'il faut écrire sur chaque billet à côté du dernier nom, de l'avant-dernier, etc. sont proportionnels aux termes de la progression arithmétique 1, 2, 3, etc. En écrivant donc ainsi sur chaque billet les termes de cette progression, et ajoutant les termes relatifs à chaque candidat sur ces billets, les diverses sommes indiqueront par leur grandeur l'ordre de préférence qui doit être établi entre les candidats. Tel est le mode d'élection qu'indique la théorie des probabilités. Sans doute

il serait le meilleur si chaque électeur inscrivait sur son billet les noms des candidats, dans l'ordre du mérite qu'il leur attribue; mais les intérêts particuliers et beaucoup de considérations étrangères au mérite doivent troubler cet ordre, et faire placer quelquefois au dernier rang le candidat le plus redoutable à celui que l'on préfère, ce qui donne trop d'avantage aux candidats d'un médiocre mérite. Aussi l'expérience a-t-elle fait abandonner ce mode d'élection, dans les établissements qui l'avaient adopté.

L'élection à la majorité absolue des suffrages réunit à la certitude de n'admettre aucun des candidats que cette majorité rejette, l'avantage d'exprimer le plus souvent le vœu de l'assemblée. Elle coïncide toujours avec le mode précédent, lorsqu'il n'y a que deux candidats. A la vérité, elle expose à l'inconvénient de rendre les élections interminables, mais l'expérience a fait voir que cet inconvénient est nul, et que le désir général de mettre fin aux élections réunit bientôt la majorité des suffrages sur un des candidats.

Le choix entre plusieurs propositions relatives au même objet semble devoir être assujéti aux mêmes règles que l'élection entre plusieurs candidats. Mais il existe entre ces deux cas cette différence, savoir, que le mérite d'un candidat n'exclut point celui de ses concurrents; au lieu que si les propositions entre lesquelles il faut choisir sont contraires, la vérité de l'une exclut la vérité des autres. Voici comme on doit alors envisager la question.

Donnons à chaque votant une urne qui renferme un nombre infini de boules, et supposons qu'il les distribue sur les diverses propositions, en raison des probabilités respectives qu'il leur attribue. Il est clair que le nombre total des boules exprimant la certitude, et le votant étant, par l'hypothèse, assuré que l'une des propositions doit être vraie, il répartira ce nombre en entier sur les propositions. Le problème se réduit donc à déterminer

les combinaisons dans lesquelles les boules seront réparties de manière qu'il y en ait plus sur la première proposition du billet que sur la seconde, plus sur la seconde que sur la troisième, etc.; à faire les sommes de tous les nombres de boules relatifs à chaque proposition; dans ces diverses combinaisons, et à diviser cette somme par le nombre des combinaisons: les quotients seront les nombres de boules que l'on doit attribuer aux propositions sur un billet quelconque. On trouve par l'analyse qu'en partant de la dernière proposition, pour remonter à la première, ces quotients sont entre eux comme les quantités suivantes: 1° l'unité divisée par le nombre des propositions; 2° la quantité précédente augmentée de l'unité divisée par le nombre des propositions moins une; 3° cette seconde quantité augmentée de l'unité divisée par le nombre des propositions moins deux, et ainsi du reste. On écrira donc sur chaque billet ces quantités à côté des propositions correspondantes, et, en ajoutant les quantités relatives à chaque proposition sur les divers billets, les sommes indiqueront, par leur grandeur, l'ordre et la préférence que l'assemblée donne à ces propositions.

Disons un mot de la manière de renouveler les assemblées qui doivent changer en totalité, dans un nombre d'années déterminé: le renouvellement doit-il se faire à la fois, ou convient-il de le partager entre ces années? D'après ce dernier mode, l'assemblée serait formée sous l'influence des diverses opinions dominantes pendant la durée de son renouvellement; l'opinion qui y régnerait alors serait donc très-probablement la moyenne de toutes ces opinions. L'assemblée recevrait ainsi du temps le même avantage que lui donne l'extension des élections de ses membres à toutes les parties du territoire qu'elle représente. Maintenant, si l'on considère ce que l'expérience n'a que trop fait connaître, savoir, que les élections sont toujours dirigées dans le sens le plus exagéré des opinions dominantes, on sentira combien il est

utile de tempérer ces opinions les unes par les autres au moyen d'un renouvellement partiel.

De la probabilité des jugements des tribunaux.

L'analyse confirme ce que le simple bon sens nous dicte, savoir, que la bonté des jugements est d'autant plus probable que les juges sont plus nombreux et plus éclairés. Il importe donc que les tribunaux d'appel remplissent ces deux conditions. Les tribunaux de première instance, plus rapprochés des justiciables, leur offrent l'avantage d'un premier jugement déjà probable, et dont ils se contentent souvent, soit en transigeant, soit en se désistant de leurs prétentions. Mais si l'incertitude de l'objet en litige et son importance déterminent un plaideur à recourir au tribunal d'appel, il doit trouver, dans une plus grande probabilité d'obtenir un jugement équitable, plus de sûreté pour sa fortune, et la compensation des embarras et des frais qu'une nouvelle procédure entraîne. C'est ce qui n'avait point lieu dans l'institution de l'appel réciproque des tribunaux de département, institution par là très-préjudiciable aux intérêts des citoyens. Il serait peut-être convenable, et conforme au calcul des probabilités, d'exiger une majorité de deux voix au moins dans un tribunal d'appel, pour infirmer la sentence du tribunal inférieur. On obtiendrait ce résultat si, le tribunal d'appel étant composé d'un nombre pair de juges, la sentence subsistait dans le cas de l'égalité des voix.

Je vais considérer particulièrement les jugements en matière criminelle.

Il faut sans doute aux juges, pour condamner un accusé, les plus fortes preuves de son délit; mais une preuve morale n'est jamais qu'une probabilité, et l'expérience n'a que trop fait connaître les erreurs dont les jugements criminels, ceux même qui paraissent être les plus justes, sont encore susceptibles. La possi-

bilité de réparer ces erreurs est le plus solide argument des philosophes qui ont voulu proscrire la peine de mort. Nous devrions donc nous abstenir de juger, s'il nous fallait attendre l'évidence mathématique. Mais le jugement est commandé par le danger qui résulterait de l'impunité du crime. Ce jugement se réduit, si je ne me trompe, à la solution de la question suivante : la preuve du délit de l'accusé a-t-elle le haut degré de probabilité nécessaire pour que les citoyens aient moins à redouter les erreurs des tribunaux, s'il est innocent et condamné, que ses nouveaux attentats, et ceux des malheureux qu'enhardirait l'exemple de son impunité, s'il était coupable et absous? La solution de cette question dépend de plusieurs éléments très-difficiles à connaître : telle est l'imminence du danger qui menacerait la société si l'accusé criminel restait impuni. Quelquefois ce danger est si grand, que le magistrat se voit contraint de renoncer aux formes sagement établies pour la sûreté de l'innocence. Mais ce qui rend presque toujours la question dont il s'agit insoluble est l'impossibilité d'apprécier exactement la probabilité du délit, et de fixer celle qui est nécessaire pour la condamnation de l'accusé. Chaque juge, à cet égard, est forcé de s'en rapporter à son propre tact : il forme son opinion en comparant les divers témoignages et les circonstances dont le délit est accompagné, aux résultats de ses réflexions et de son expérience, et, sous ce rapport, une longue habitude d'interroger et de juger les accusés donne beaucoup d'avantages pour saisir la vérité au milieu d'indices souvent contradictoires.

La question précédente dépend encore de la grandeur de la peine appliquée au délit, car on exige naturellement, pour prononcer la mort, des preuves beaucoup plus fortes que pour infliger une détention de quelques mois. C'est une raison de proportionner la peine au délit, une peine grave, appliquée à un léger délit, devant inévitablement faire absoudre beaucoup de coupables. Le produit de la probabilité du délit par sa gravité étant la mesure

du danger que l'absolution de l'accusé peut faire éprouver à la société, on pourrait penser que la peine doit dépendre de cette probabilité. C'est ce que l'on fait indirectement dans les tribunaux, où l'on retient pendant quelque temps l'accusé contre lequel s'élèvent des preuves très-fortes, mais insuffisantes pour le condamner. Dans la vue d'acquérir de nouvelles lumières, on ne le remet point sur-le-champ au milieu de ses concitoyens, qui ne le reverraient pas sans de vives alarmes. Mais l'arbitraire de cette mesure, et l'abus qu'on peut en faire, l'ont fait rejeter dans les pays où l'on attache le plus grand prix à la liberté individuelle.

Maintenant, quelle est la probabilité que la décision d'un tribunal qui ne peut condamner qu'à une majorité donnée sera juste, c'est-à-dire conforme à la vraie solution de la question posée ci-dessus ? Ce problème important, bien résolu, donnera le moyen de comparer entre eux les tribunaux divers. La majorité d'une seule voix dans un nombreux tribunal indique que l'affaire dont il s'agit est à fort peu près douteuse. La condamnation de l'accusé serait donc alors contraire aux principes d'humanité, protecteurs de l'innocence. L'unanimité des juges donnerait une très-grande probabilité d'une décision juste ; mais, en s'y astreignant, trop de coupables seraient absous. Il faut donc, ou limiter le nombre des juges, si l'on veut qu'ils soient unanimes, ou accroître la majorité nécessaire pour condamner, lorsque le tribunal devient plus nombreux. Je vais essayer d'appliquer le calcul à cet objet, persuadé qu'il est toujours le meilleur guide, lorsqu'on l'appuie sur les données que le bon sens nous suggère.

La probabilité que l'opinion de chaque juge est juste entre comme élément principal dans ce calcul. Cette probabilité est évidemment relative à chaque affaire. Si dans un tribunal de mille et un juges, cinq cent un sont d'une opinion, et cinq cents sont de l'opinion contraire, il est visible que la probabilité de l'opinion de chaque juge surpasse bien peu $\frac{1}{2}$; car, en la suppo-

sant sensiblement plus grande, une seule voix de différence serait un événement invraisemblable. Mais si les juges sont unanimes, cela indique dans les preuves ce degré de force qui entraîne la conviction : la probabilité de l'opinion de chaque juge est donc très-près de l'unité ou de la certitude, à moins que des passions ou des préjugés communs n'égarent à la fois tous les juges. Hors de ces cas, le rapport des voix pour ou contre l'accusé doit seul déterminer cette probabilité. Je suppose ainsi qu'elle peut varier depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à l'unité, mais qu'elle ne peut être au-dessous de $\frac{1}{2}$. Si cela n'était pas, la décision du tribunal serait insignifiante comme le sort ; elle n'a de valeur qu'autant que l'opinion du juge a plus de tendance à la vérité qu'à l'erreur. C'est ensuite par le rapport des nombres de voix favorables et contraires à l'accusé que je détermine la probabilité de cette opinion.

Ces données suffisent pour avoir l'expression générale de la probabilité que la décision d'un tribunal jugeant à une majorité connue est juste. Dans les tribunaux où, sur huit juges, cinq voix seraient nécessaires pour la condamnation d'un accusé, la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision, surpasserait $\frac{1}{4}$. Si le tribunal était réduit à six membres, qui ne pourraient condamner qu'à la pluralité de quatre voix, la probabilité de l'erreur à craindre serait au-dessous de $\frac{1}{4}$: il y aurait donc, pour l'accusé, un avantage à cette réduction du tribunal. Dans l'un et l'autre cas, la majorité exigée est la même et égale à deux. Ainsi cette majorité demeurant constante, la probabilité de l'erreur augmente avec le nombre des juges : cela est général, quelle que soit la majorité requise, pourvu qu'elle reste la même. En prenant donc pour règle le rapport arithmétique, l'accusé se trouve dans une position de moins en moins avantageuse, à mesure que le tribunal devient plus nombreux. On pourrait croire que, dans un tribunal où l'on exigerait une majorité de douze voix, quel que fût le nombre des juges, les voix de la minorité,

neutralisant un pareil nombre de voix de la majorité, les douze voix restantes représenteraient l'unanimité d'un jury de douze membres, requise en Angleterre pour la condamnation d'un accusé; mais on serait dans une grande erreur: le bon sens fait voir qu'il y a différence entre la décision d'un tribunal de deux cent douze juges, dont cent douze condamnent l'accusé, tandis que cent l'absolvent, et celle d'un tribunal de douze juges unanimes pour la condamnation. Dans le premier cas, les cent voix favorables à l'accusé autorisent à penser que les preuves sont loin d'atteindre le degré de force qui entraîne la conviction; dans le second cas, l'unanimité des juges porte à croire qu'elles ont atteint ce degré. Mais le simple bon sens ne suffit point pour apprécier l'extrême différence de la probabilité de l'erreur dans ces deux cas; il faut alors recourir au calcul, et l'on trouve un cinquième à peu près pour la probabilité de l'erreur dans le premier cas, et seulement $\frac{1}{5192}$ pour cette probabilité dans le second cas, probabilité qui n'est pas un millième de la première. C'est une confirmation du principe que le rapport arithmétique est défavorable à l'accusé, quand le nombre des juges augmente. Au contraire, si l'on prend pour règle le rapport géométrique, la probabilité de l'erreur de la décision diminue quand le nombre des juges s'accroît. Par exemple, dans les tribunaux qui ne peuvent condamner qu'à la pluralité des deux tiers des voix, la probabilité de l'erreur à craindre est à peu près un quart, si le nombre des juges est six; elle est au-dessous de $\frac{1}{4}$ si ce nombre s'élève à douze. Ainsi l'on ne doit se régler ni sur le rapport arithmétique, ni sur le rapport géométrique, si l'on veut que la probabilité de l'erreur ne soit jamais au-dessus ni au-dessous d'une fraction déterminée.

Mais à quelle fraction doit-on se fixer? C'est ici que l'arbitraire commence, et les tribunaux offrent à cet égard de grandes variétés. Dans les tribunaux spéciaux, où cinq voix sur huit suffisent

pour la condamnation de l'accusé, la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté du jugement est $\frac{66}{256}$ ou au-dessus de $\frac{1}{4}$. La grandeur de cette fraction est effrayante; mais ce qui doit rassurer un peu est la considération que, le plus souvent, le juge qui absout un accusé ne le regarde pas comme innocent: il prononce seulement qu'il n'est pas atteint par des preuves suffisantes pour qu'il soit condamné. On est surtout rassuré par la pitié que la nature a mise dans le cœur de l'homme, et qui dispose l'esprit à voir difficilement un coupable dans l'accusé soumis à son jugement. Ce sentiment, plus vif dans ceux qui n'ont point l'habitude des jugements criminels, compense les inconvénients attachés à l'inexpérience des jurés. Dans un jury de douze membres, si la pluralité exigée pour la condamnation est de huit voix sur douze, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1093}{8192}$, ou un peu plus grande qu'un huitième; elle est à peu près $\frac{1}{32}$ si cette pluralité est de neuf voix. Dans le cas de l'unanimité, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1}{8192}$, c'est-à-dire plus de mille fois moindre que dans nos jurys. Cela suppose que l'unanimité résulte uniquement des preuves favorables ou contraires à l'accusé; mais des motifs entièrement étrangers doivent souvent concourir à la produire, lorsqu'elle est imposée au jury comme une condition nécessaire de son jugement. Alors ses décisions dépendant du tempérament, du caractère et des habitudes des jurés, elles sont quelquefois contraires aux décisions que la majorité du jury aurait prises s'il n'eût écouté que les preuves; ce qui me paraît être un grand défaut de cette manière de juger.

La probabilité des décisions est trop faible dans nos jurys, et je pense que, pour donner une garantie suffisante à l'innocence, on doit exiger au moins la pluralité de neuf voix sur douze.

attacher les deux individus l'un à l'autre, et qui leur font désirer le bien-être de celui qui doit survivre. Les établissements dans lesquels on peut ainsi placer ses capitaux, et, par un léger sacrifice de son revenu, assurer l'existence de sa famille pour un temps où l'on doit craindre de ne plus suffire à ses besoins, sont donc très-avantageux aux mœurs, en favorisant les plus doux penchants de la nature. Ils n'offrent point l'inconvénient que nous avons remarqué dans les jeux même les plus équitables, celui de rendre la perte plus sensible que le gain; puisqu'au contraire ils offrent les moyens d'échanger le superflu contre des ressources assurées dans l'avenir. Le Gouvernement doit donc encourager ces établissements, et les respecter dans ses vicissitudes; car les espérances qu'ils présentent, portant sur un avenir éloigné, ils ne peuvent prospérer qu'à l'abri de toute inquiétude sur leur durée.

CHAPITRE XI.

DE LA PROBABILITÉ DES TÉMOIGNAGES.

44. Je vais d'abord considérer un seul témoin. La probabilité de son témoignage se compose de sa véracité, de la possibilité de son erreur, et de la possibilité du fait en lui-même. Pour fixer les idées, concevons que l'on ait extrait un numéro d'une urne qui en renferme le nombre n , et qu'un témoin du tirage annonce que le n° i est sorti. L'événement observé est ici le témoin annonçant la sortie du n° i . Soit p la véracité du témoin, ou la probabilité qu'il ne cherche point à tromper; soit encore r la probabilité qu'il ne se trompe point.

Cela posé, on peut former les quatre hypothèses suivantes: ou le témoin ne trompe point et ne se trompe point; ou il ne trompe point et se trompe; ou il trompe et ne se trompe point; enfin, ou il trompe et se trompe à la fois. Voyons quelle est, *à priori*, dans chacune de ces hypothèses, la probabilité que le témoin annoncera la sortie du n° i .

Si le témoin ne trompe point et ne se trompe point, le n° i sera sorti; mais la probabilité de cette sortie est *à priori*, $\frac{1}{n}$; en la multipliant par la probabilité pr de l'hypothèse, on aura $\frac{pr}{n}$ pour la probabilité entière de l'événement observé, dans cette première hypothèse.

Si le témoin ne trompe point et se trompe, le n° i ne doit point être sorti, pour qu'il annonce sa sortie; la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$. Mais l'erreur du témoin doit porter sur l'un des numéros

non sortis. Supposons qu'elle puisse également porter sur tous : la probabilité qu'elle portera sur le n° i sera $\frac{1}{n-1}$; la probabilité que le témoin, ne trompant point et se trompant, annoncera le n° i , est donc $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$ ou $\frac{1}{n}$. En la multipliant par la probabilité $p \cdot (1-r)$ de l'hypothèse elle-même, on aura $\frac{p \cdot (1-r)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette seconde hypothèse.

Si le témoin trompe et ne se trompe point, le n° i ne sera point sorti, et la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$; mais le témoin doit choisir parmi les $n-1$ numéros non sortis, le n° i . Si l'on suppose que son choix puisse également porter sur chacun d'eux, $\frac{1}{n-1}$ sera la probabilité que son choix se fixera sur le n° i ; $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$ ou $\frac{1}{n}$ est donc la probabilité que le témoin annoncera le n° i . En la multipliant par la probabilité $(1-p) \cdot r$, de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p) \cdot r}{n}$ pour la probabilité entière de l'événement observé, dans cette troisième hypothèse.

Enfin, si le témoin trompe et se trompe, la probabilité qu'il ne croira pas le n° i sorti sera $\frac{n-1}{n}$, et la probabilité qu'il le choisira parmi les $n-1$ numéros qu'il ne croira pas sortis sera $\frac{1}{n-1}$; $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$ ou $\frac{1}{n}$ sera donc la probabilité qu'il annoncera la sortie du n° i . En la multipliant par la probabilité $(1-p) \cdot (1-r)$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p) \cdot (1-r)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette quatrième hypothèse.

Cette hypothèse renferme un cas dans lequel le n° i est sorti; savoir, le cas dans lequel le n° i étant sorti, le témoin ne le croit pas sorti, et le choisit parmi les $n-1$ numéros qu'il ne croit pas

sortis. La probabilité de cela est le produit de $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{n-1}$. En multipliant ce produit, par la probabilité $(1-p) \cdot (1-r)$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p) \cdot (1-r)}{n \cdot (n-1)}$ pour la probabilité du cas dont il s'agit.

On peut arriver aux mêmes résultats de cette manière. Soient a, b, c, d, i , etc. les n numéros. Puisque le témoin se trompe, il ne doit point croire sorti, le numéro sorti; et puisqu'il trompe, il ne doit point annoncer comme sorti, le numéro qu'il croit sorti. Mettons donc à la première place le numéro sorti; à la seconde, le numéro que le témoin croit sorti; et à la troisième, le numéro qu'il annonce. Parmi toutes les combinaisons possibles des numéros trois à trois, sans exclure celles où ils sont répétés, il n'y a de compatibles avec l'hypothèse présente que celles où le numéro qui occupe la seconde place n'occupe ni la première, ni la troisième; telles sont les combinaisons aba, abc , etc. Or il est facile de voir que le nombre des combinaisons qui satisfont aux deux conditions précédentes est $n \cdot \overline{n-1}$; car la combinaison ab peut se combiner avec les $n-1$ numéros autres que b , et le nombre des combinaisons ab, ba, ac , est $n \cdot \overline{n-1}$. Maintenant les combinaisons dans lesquelles le numéro i est annoncé sans être sorti sont de la forme abi, bai, aci , etc. et le nombre de ces combinaisons est $\overline{n-1} \cdot \overline{n-2}$; ainsi la probabilité qu'une de ces combinaisons aura lieu est $\frac{n-2}{n \cdot \overline{n-1}}$. Les combinaisons dans lesquelles

le numéro i étant sorti, il est annoncé, sont de la forme iai, ibi , etc. et le nombre de ces combinaisons est visiblement $n-1$; la probabilité qu'une de ces combinaisons aura lieu est donc $\frac{1}{n \cdot \overline{n-1}}$. Il faut multiplier toutes ces combinaisons par la probabilité $(1-p) \cdot (1-r)$ de l'hypothèse; et alors on aura les résultats précédents.

Maintenant, pour avoir la probabilité de la sortie du numéro i , on doit faire une somme de toutes les probabilités précédentes, relatives à cette sortie, et la diviser par la somme de toutes ces probabilités; ce qui donne pour cette probabilité,

$$\frac{\frac{pr}{n} + \frac{(1-p).(1-r)}{n.(n-1)}}{\frac{pr}{n} + \frac{p.(1-r)}{n} + \frac{(1-p).r}{n} + \frac{(1-p).(1-r)}{n}},$$

$$\text{ou } pr + \frac{(1-p).(1-r)}{n-1}.$$

Si r est égal à l'unité, ou si le témoin ne se trompe point, la probabilité de la sortie du numéro i sera p , c'est-à-dire la probabilité de la véracité du témoin.

Si n est un très-grand nombre, cette probabilité sera à très-peu près pr , ou la probabilité de la véracité du témoin, multipliée par la probabilité qu'il ne se trompe point.

Nous avons supposé que l'erreur du témoin, lorsqu'il se trompe, peut également tomber sur tous les numéros non sortis; mais cette supposition cesse d'avoir lieu si quelques-uns d'eux ont plus de ressemblance que les autres avec le numéro sorti, parce que la méprise à leur égard est plus facile. Nous avons encore supposé que le témoin, lorsqu'il trompe, n'a pas de motif pour choisir un numéro plutôt qu'un autre; ce qui peut ne pas avoir lieu. Mais il serait très-difficile de faire entrer dans une formule toutes ces considérations particulières.

45. Supposons maintenant que l'urne contienne $n-1$ boules noires et une boule blanche, et qu'en ayant extrait une boule, un témoin du tirage annonce la sortie d'une boule blanche. Déterminons la probabilité de cette sortie. Nous formerons les mêmes hypothèses que nous venons de faire. Dans la première, la probabilité de la sortie de la boule blanche est, comme ci-dessus, $\frac{pr}{n}$.

Dans la seconde hypothèse, le témoin se trompant sans tromper, une boule noire doit être sortie, et la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$, et comme le témoin supposé véridique doit énoncer la sortie d'une boule blanche, par cela seul qu'il se méprend, la probabilité de cette annonce sera donc $\frac{n-1}{n}$, probabilité qu'il faut multiplier par la probabilité $p.(1-r)$ de l'hypothèse, ce qui donne $\frac{p.(1-r).n-1}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse. Dans la troisième hypothèse, le témoin étant supposé tromper et ne point se tromper, une boule noire doit être sortie, et la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$. En la multipliant par la probabilité $(1-p).r$ de cette hypothèse, on aura $\frac{(1-p).r.n-1}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette hypothèse. Enfin, dans la quatrième hypothèse, le témoin trompant et se trompant, ne peut annoncer la sortie de la boule blanche qu'autant qu'elle sera sortie. La probabilité de cette sortie est $\frac{1}{n}$. En la multipliant par la probabilité $(1-p).(1-r)$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p).(1-r)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette hypothèse.

Présentement, si l'on réunit parmi les probabilités précédentes celles dans lesquelles la boule blanche est sortie, on aura la probabilité de cette sortie, en divisant leur somme par la somme de toutes les probabilités, ce qui donne

$$\frac{pr + (1-p).(1-r)}{pr + (1-p).(1-r) + [p.(1-r) + (1-p).r].(n-1)}$$

pour la probabilité de la sortie de la boule blanche; par conséquent

$$\frac{[p.(1-r) + (1-p).r].(n-1)}{pr + (1-p).(1-r) + [p.(1-r) + (1-p).r].(n-1)}$$

est la probabilité que le fait attesté par le témoin du tirage n'a pas eu lieu.

On peut observer ici, que si l'on nomme q la probabilité que le témoin énonce la vérité, on aura

$$q = pr + (1-p).(1-r);$$

car il est visible qu'il dit vrai dans le cas dont il s'agit, soit qu'il ne trompe point et ne se trompe point, soit qu'il trompe et se trompe. Cette expression de q donne

$$1-q = p(1-r) + (1-p).r.$$

En effet, la probabilité $1-q$ qu'il n'énonce pas la vérité est la probabilité qu'il ne trompe point et se trompe, plus la probabilité qu'il trompe et ne se trompe point. L'expression précédente de la probabilité que le fait attesté est faux devient ainsi

$$\frac{(1-q).(n-1)}{q+(1-q).(n-1)}.$$

Si le nombre $n-1$ des boules noires est très-grand, cette probabilité devient, à très-peu près, égale à l'unité ou à la certitude, pour peu que l'erreur ou le mensonge du témoin soient probables. Alors le fait qu'il atteste devient extraordinaire. Ainsi l'on voit comment les faits extraordinaires affaiblissent la croyance due aux témoins; le mensonge ou l'erreur devenant d'autant plus vraisemblables que le fait attesté est plus extraordinaire en lui-même.

46. Considérons présentement deux urnes A et B , dont la première contienne un grand nombre n de boules blanches; et la seconde, le même nombre de boules noires. On tire de l'une de ces urnes une boule que l'on remet dans l'autre urne; ensuite on tire une boule de cette dernière urne. Un témoin du premier tirage atteste qu'une boule blanche est sortie; un témoin du second tirage atteste pareillement qu'il a vu extraire une boule blanche. Chacun de ces témoignages, considéré isolément, n'offre rien

d'invraisemblable; mais la conséquence qui résulte de leur ensemble est que la même boule sortie au premier tirage a reparu au second, ce qui est un phénomène d'autant plus extraordinaire, que n est un plus grand nombre. Voyons comment la valeur de ces témoignages en est affaiblie.

Nommons q la probabilité que le premier témoin énonce la vérité. On voit, par le numéro précédent, que dans le cas présent cette probabilité se compose de la probabilité que le témoin ne trompe point et ne se trompe point, ajoutée à la probabilité qu'il trompe et se trompe à la fois; car le témoin, dans ces deux cas, énonce la vérité. Soit q' la même probabilité relative au second témoin. On peut former ces quatre hypothèses: ou le premier et le second témoin disent la vérité; ou le premier dit la vérité, le second ne la disant point; ou le second témoin dit la vérité, le premier ne la disant point; ou enfin aucun des deux ne dit la vérité. Déterminons *a priori*, dans chacune de ces hypothèses, la probabilité de l'événement observé.

Cet événement est l'annonce de la sortie d'une boule blanche à chaque tirage. La probabilité qu'une boule blanche est sortie au premier tirage est $\frac{1}{2}$, puisque la boule extraite peut être également sortie de l'urne A ou de l'urne B . Dans le cas où elle a été extraite de l'urne A , et mise dans l'urne B , $n+1$ boules sont contenues dans cette dernière urne; et la probabilité d'en extraire la boule blanche est $\frac{1}{n+1}$; le produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{n+1}$ est donc la probabilité *a priori*, de l'extraction d'une boule blanche, dans les deux tirages consécutifs. En la multipliant par la probabilité qq' que les deux témoins disent la vérité, on aura

$$\frac{qq'}{2.(n+1)}$$

pour la probabilité de l'événement observé, dans la première hypothèse.

Dans la seconde hypothèse, la boule a été extraite de l'urne A , et mise dans l'urne B : la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{2}$. De plus, puisque le second témoin ne dit pas la vérité, une boule noire a été extraite de l'urne B , et la probabilité de cette extraction est $\frac{n}{n+1}$. En multipliant donc $\frac{1}{2}$ par $\frac{n}{n+1}$, et le produit par la probabilité $q \cdot (1-q')$, que le premier témoin dit la vérité, tandis que le second ne la dit pas, on aura

$$\frac{q \cdot (1-q') \cdot n}{2 \cdot (n+1)}$$

pour la probabilité de l'événement observé dans la seconde hypothèse.

Dans la troisième hypothèse, une boule noire a été extraite de l'urne B , et mise dans l'urne A : la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{2}$. De plus, une boule blanche a été ensuite extraite de l'urne A , et la probabilité de cette extraction est $\frac{n}{n+1}$; en multipliant donc $\frac{1}{2}$ par $\frac{n}{n+1}$, et le produit par la probabilité $(1-q) \cdot q'$, que le second témoin dit la vérité, tandis que le premier ne la dit pas, on aura

$$\frac{(1-q) \cdot q' \cdot n}{2 \cdot (n+1)}$$

pour la probabilité relative à la troisième hypothèse.

Enfin, dans la quatrième hypothèse, une boule noire a d'abord été extraite de l'urne B , et la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{2}$. Ensuite cette boule noire mise dans l'urne A , en a été extraite au second tirage, et la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{n+1}$; en multipliant donc le produit de ces deux probabilités, par la probabilité $(1-q) \cdot (1-q')$ qu'aucun des témoins ne dit la vérité, on aura

$$\frac{(1-q) \cdot (1-q')}{2 \cdot (n+1)}$$

pour la probabilité relative à la quatrième hypothèse.

Maintenant la probabilité du fait qui résulte de l'ensemble des deux témoignages, savoir, qu'une boule blanche extraite au premier tirage a reparu au second tirage, est visiblement égale à la probabilité relative à la première hypothèse, divisée par la somme des probabilités relatives aux quatre hypothèses; cette probabilité est donc

$$\frac{q q'}{q q' + (1-q) \cdot (1-q') + [q \cdot (1-q') + q' \cdot (1-q)] \cdot n}.$$

Le phénomène de la réapparition d'une boule blanche au second tirage devient d'autant plus extraordinaire, que le nombre n des boules de chaque urne est plus considérable; et alors la probabilité précédente devient très-petite. On voit donc que la probabilité du fait résultant de l'ensemble des témoignages est extrêmement affaiblie, lorsqu'il est extraordinaire.

47. Considérons les témoignages simultanés : supposons deux témoins d'accord sur un fait, et déterminons sa probabilité. Pour fixer les idées, supposons que le fait soit l'extraction du n° i , d'une urne qui en renferme le nombre n ; en sorte que l'événement observé soit l'accord de deux témoins du tirage, à énoncer la sortie du n° i . Nommons p et p' leurs véracités respectives, et supposons, pour simplifier, qu'ils ne se trompent point. Cela posé, on ne peut former que ces deux hypothèses : les témoins disent la vérité; les témoins trompent.

Dans la première hypothèse, le numéro i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. En la multipliant par le produit des véracités p et p' des témoins, on aura $\frac{pp'}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Dans la seconde, le numéro i n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{n-1}{n}$; mais les deux témoins s'accordent à choisir le numéro i parmi les $n-1$ numéros non sortis. Or le

nombre des combinaisons différentes qui peuvent résulter de leur choix est $(n-1)^2$, et dans ce nombre, ils doivent choisir celle où le numéro i est combiné avec lui-même; la probabilité de ce choix est donc $\frac{1}{(n-1)^2}$. En la multipliant par la probabilité précédente $\frac{n-1}{n}$, et par les produits des probabilités $1-p$ et $1-p'$ que les témoins trompent; on aura $\frac{(1-p) \cdot (1-p')}{n \cdot n-1}$ pour la probabilité de

l'événement observé, dans la seconde hypothèse.

Maintenant on aura la probabilité de la sortie du numéro i , en divisant la probabilité relative à la première hypothèse, par la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses; on aura donc pour cette probabilité,

$$\frac{pp'}{pp' + \frac{(1-p) \cdot (1-p')}{n-1}}; \quad (o)$$

si $n=2$, alors la sortie du numéro i est aussi probable que sa non sortie; et la probabilité de sa sortie, résultante de l'accord des témoignages, est

$$\frac{pp'}{pp' + (1-p) \cdot (1-p')}.$$

C'est généralement la probabilité d'un fait attesté par deux témoins, lorsque l'existence du fait est aussi probable que sa non-existence. Si les deux témoins sont également véridiques, ce qui donne $p'=p$, cette probabilité devient

$$\frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}.$$

En général, si un nombre r de témoins également véridiques affirment l'existence d'un fait de ce genre, sa probabilité résultante des témoignages sera

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r}.$$

Mais cette formule n'est applicable qu'au cas où l'existence du fait et sa non-existence sont en elles-mêmes également probables.

Si le nombre n des numéros de l'urne est très-grand, la formule (o) devient à très-peu près l'unité; et par conséquent la sortie du numéro i est extrêmement probable. Cela tient à ce qu'il est très-peu vraisemblable que les témoins voulant tromper, s'accordent à énoncer le même numéro, lorsque l'urne en contient un grand nombre. Le simple bon sens indique ce résultat du calcul; mais on voit en même temps que la probabilité de la sortie du numéro i est beaucoup diminuée, si les deux témoins cherchant à tromper, ont pu s'entendre.

Supposons maintenant que le premier témoin affirme la sortie du numéro i , et que le second témoin affirme la sortie du numéro i' . On peut former alors les trois hypothèses suivantes. Le premier témoin dit la vérité et le second trompe. Dans ce cas, le numéro i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. De plus, le second témoin qui trompe, doit choisir parmi les autres numéros non sortis, le numéro i' , et la probabilité de ce choix est $\frac{1}{n-1}$. Le produit de ces deux probabilités, par le produit des probabilités p et $1-p'$, que le premier témoin ne trompe pas et que le second trompe, sera la probabilité de l'événement observé, ou de l'énonciation de la sortie des numéros i et i' , dans cette hypothèse; probabilité qui est ainsi $\frac{p \cdot (1-p')}{n \cdot n-1}$.

Dans la seconde hypothèse, le premier témoin trompe, et le second ne trompe pas. Alors le numéro i' est sorti; et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. De plus, le premier témoin choisit le numéro i sur les $n-1$ numéros non sortis, et la probabilité de ce choix est $\frac{1}{n-1}$. En multipliant le produit de ces deux probabilités,

par le produit des probabilités $1-p$ et p' , que le premier témoin trompe et que le second ne trompe pas, on aura $\frac{(1-p) \cdot p'}{n \cdot n-1}$.

Enfin, dans la troisième hypothèse, les deux témoins trompent à la fois. Alors aucun des deux numéros i et i' n'est sorti. La probabilité de cet événement est $\frac{n-2}{n}$. De plus, le premier témoin doit choisir le numéro i , et le second doit choisir le numéro i' , parmi les $n-1$ numéros non sortis, et la probabilité de cet événement composé est $\frac{1}{(n-1)^2}$. En multipliant le produit de ces deux probabilités, par le produit des probabilités $1-p$ et $1-p'$ que le premier et le second témoin trompent, on aura $\frac{n-2 \cdot 1-p \cdot 1-p'}{n \cdot (n-1)^2}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Maintenant on aura la probabilité de la sortie du numéro i , en divisant la probabilité relative à la première hypothèse, par la somme des probabilités relatives aux trois hypothèses; la probabilité de cette sortie est donc

$$\frac{p \cdot (1-p')}{1-pp' - \frac{(1-p) \cdot (1-p')}{n-1}}.$$

Si $n=2$, c'est-à-dire si l'existence de chaque fait attesté par les deux témoins est, *a priori*, aussi probable que sa non-existence; alors la probabilité précédente devient $\frac{1}{2}$, lorsque $p=p'$; ce qui est visible d'ailleurs, les deux témoignages se détruisant réciproquement. En général, si un fait de ce genre est attesté par r témoins, et nié par r' témoins, tous également véridiques, il est facile de voir que sa probabilité sera

$$\frac{p^{r-r'}}{p^{r-r'} + (1-p)^{r-r'}};$$

c'est-à-dire, la même que si le fait était attesté par $r-r'$ témoins.

48. Considérons présentement une chaîne traditionnelle de r témoins, et supposons que le fait transmis soit la sortie du numéro i d'une urne qui renferme n numéros. Désignons par y_r sa probabilité. L'addition d'un nouveau témoin changera cette probabilité en y_{r+1} , probabilité qui sera formée, 1° du produit de y_r par la véracité du nouveau témoin, véracité que nous désignerons par p_{r+1} ; 2° du produit de la probabilité $1-p_{r+1}$ que ce nouveau témoin trompe, par la probabilité $1-y_r$ que le témoin précédent n'a pas dit la vérité, et par la probabilité $\frac{1}{n-1}$ que le nouveau témoin choisira le numéro sorti, dans le nombre des $n-1$ numéros autres que celui qui lui a été indiqué par le témoin précédent; on aura donc

$$y_{r+1} = p_{r+1} \cdot y_r + \frac{1}{n-1} \cdot (1-p_{r+1}) \cdot (1-y_r);$$

équation dont l'intégrale est

$$y_r = \frac{1}{n} + C \cdot \frac{(np_1-1) \cdot (np_2-1) \cdot \dots \cdot (np_r-1)}{(n-1)^r},$$

C étant une constante arbitraire. Pour la déterminer, on observera que la probabilité du fait, d'après le premier témoignage, est, par ce qui précède, égale à p_1 ; on a donc $y_1 = p_1$; ce qui donne $C = \frac{n-1}{n}$; partant

$$y_r = \frac{1}{n} + \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(np_1-1) \cdot (np_2-1) \cdot \dots \cdot (np_r-1)}{(n-1)^r}.$$

Si n est infini, on a

$$y_r = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r.$$

Si $n=2$, c'est-à-dire, si l'existence du fait est aussi probable que sa non-existence, on a

$$y_r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (2p_1-1) \cdot (2p_2-1) \cdot \dots \cdot (2p_r-1).$$

En général, à mesure que la chaîne traditionnelle se prolonge, y_r approche indéfiniment de sa limite $\frac{1}{n}$, limite qui est la probabilité *à priori*, de la sortie du numéro i . Le terme $\frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{np_i-1}{n-1}\right)$, etc. de l'expression de y_r , est donc ce que la chaîne des témoins ajoute à cette probabilité. On voit ainsi comment la probabilité s'affaiblit à mesure que la tradition se prolonge. A la vérité, les monuments, l'imprimerie et d'autres causes peuvent diminuer cet effet inévitable du temps; mais ils ne peuvent jamais entièrement le détruire.

Si l'on a deux chaînes traditionnelles, chacune de r témoins; si l'on suppose les témoins de ces chaînes, également véridiques, et si le dernier témoin de l'une des chaînes s'accorde avec le dernier de l'autre à affirmer la sortie du numéro i ; on aura la probabilité de cette sortie, en substituant y_r pour p et p' , dans la formule (o) du numéro précédent, qui devient par là,

$$\frac{y_r^2}{y_r^2 + \frac{(1-y_r)^2}{n-1}}.$$

49. Considérons deux témoins dont p et p' soient les véracités respectives. On sait que tous deux, ou du moins l'un d'eux, sans être contredit par l'autre qui, dans ce cas, n'a point prononcé, affirment que le numéro i est sorti d'une urne qui en renferme le nombre n . En supposant toujours qu'on n'a extrait qu'un seul numéro, on demande la probabilité de la sortie du numéro i .

Soient r et r' les probabilités respectives que les témoins prononcent. On ne peut faire ici que les quatre hypothèses suivantes : 1° les deux témoins prononcent et disent la vérité; 2° les deux témoins prononcent et trompent; 3° l'un des témoins prononce et dit la vérité, et l'autre témoin ne prononce pas; 4° l'un des témoins prononce et trompe, et l'autre ne prononce point.

Dans la première hypothèse, le numéro i est sorti, et la probabi-

lité de cet événement est $\frac{1}{n}$. Il faut la multiplier par le produit des probabilités r et r' que les deux témoins ont prononcé, et par le produit des probabilités p et p' qu'ils disent la vérité; on aura ainsi

$$\frac{pp'.rr'}{n}$$

pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Dans la seconde, le numéro i n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{n-1}{n}$. Mais si les deux témoins trompent sans s'entendre, la probabilité qu'ils s'accorderont à énoncer le même numéro i , est $\frac{1}{(n-1)^2}$. Il faut multiplier le produit de ces probabilités par la probabilité rr' que les deux témoins prononcent à la fois, et par la probabilité $(1-p).(1-p')$ qu'ils trompent tous deux. On aura ainsi

$$\frac{(1-p).(1-p').rr'}{n.n-1}$$

pour la probabilité de l'événement observé dans la seconde hypothèse.

Dans la troisième, le numéro i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. Il faut la multiplier par la probabilité $pr.(1-r') + p'r'.(1-r)$, que l'un des témoins prononce en disant la vérité, tandis que l'autre témoin ne prononce point. On aura ainsi

$$\frac{pr.(1-r') + p'r'.(1-r)}{n}$$

pour la probabilité de l'événement observé dans cette hypothèse.

Enfin, dans la quatrième, le numéro i n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{n-1}{n}$; mais le témoin qui trompe doit le choisir dans les $n-1$ numéros non sortis, et la probabilité

de ce choix est $\frac{1}{n-1}$. Il faut multiplier le produit de ces probabilités par la probabilité $(1-p).r.(1-r')+(1-p').r'.(1-r)$ que l'un des témoins prononçant, trompe, tandis que l'autre témoin ne prononce point. On a ainsi

$$\frac{(1-p).r.(1-r')+(1-p').r'.(1-r)}{n}$$

pour la probabilité correspondante à la quatrième hypothèse.

Maintenant on aura la probabilité de la sortie du numéro i , en divisant la somme des probabilités relatives à la première et à la troisième hypothèse, par la somme des probabilités relatives à toutes les hypothèses; ce qui donne pour cette probabilité

$$\frac{pp'.rr'+pr.(1-r')+p'r'.(1-r)}{pp'.rr'+r.(1-r')+r'.(1-r)+\frac{(1-p).(1-p').rr'}{n-1}}.$$

Ces exemples indiquent suffisamment la méthode d'assujettir au calcul des probabilités, les témoignages.

50. On peut assimiler le jugement d'un tribunal qui prononce entre deux opinions contradictoires, au résultat des témoignages de plusieurs témoins de l'extraction d'un numéro d'une urne qui ne contient que deux numéros. En exprimant par p la probabilité que le juge prononce la vérité; la probabilité de la bonté d'un jugement rendu à l'unanimité sera, par ce qui précède,

$$\frac{p^r}{p^r+(1-p)^r},$$

r étant le nombre des juges. On peut déterminer p par l'observation du rapport des jugements rendus à l'unanimité par le tribunal, au nombre total des jugements. Lorsque ce nombre est très-grand, en le désignant par n , et par i le nombre des jugements rendus à l'unanimité, on aura à fort peu près

$$p^r+(1-p)^r=\frac{i}{n};$$

la résolution de cette équation donnera la véracité p des juges. Cette équation se réduit à un degré de moitié moindre, en faisant $p=\frac{1+\sqrt{u}}{2}$. Elle devient alors

$$\frac{(1+\sqrt{u})^r+(1-\sqrt{u})^r}{2^r}=\frac{i}{n};$$

équation qui, développée, est du degré $\frac{r}{2}$, ou $\frac{r-1}{2}$, suivant que r est pair ou impair.

La probabilité de la bonté d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité sera

$$1-\frac{n}{i}.(1-p)^r.$$

Si l'on suppose le tribunal formé de trois juges, on aura

$$p=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{4i-n}{12.n}}.$$

Nous adopterons le signe $+$, car il est naturel de supposer à chaque juge une plus grande probabilité pour la vérité que pour l'erreur. Si la moitié des jugements rendus par le tribunal a été rendue à l'unanimité, alors $\frac{i}{n}=\frac{1}{2}$, et l'on trouve $p=0,789$. La probabilité d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité sera 0,981. Si ce jugement n'est rendu qu'à la pluralité, sa probabilité sera p ou 0,789.

En général, on voit que la probabilité $1-\frac{n}{i}.(1-p)^r$ de la bonté d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité est d'autant plus grande que r est un plus grand nombre, et que les valeurs de p et de $\frac{i}{n}$ sont plus grandes, ce qui dépend des lumières des juges. Il y a donc un grand avantage à former des tribunaux d'appel, composés d'un grand nombre de juges choisis parmi les personnes les plus éclairées.

$$\frac{1}{3512,3} \pm \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{3534,08}$$

est égale à $\frac{11327}{11328}$.

Newton avait trouvé, par les observations de Pound, sur la plus grande élongation du quatrième satellite de Saturne, la masse de cette planète égale à $\frac{1}{3012}$; ce qui surpasse d'un sixième le résultat précédent. Il y a des millions de milliards à parier contre un, que celui de Newton est en erreur; et l'on n'en sera point surpris, si l'on considère la difficulté d'observer les plus grandes élongations des satellites de Saturne. La facilité d'observer celles des satellites de Jupiter a rendu, comme on l'a vu, beaucoup plus exacte la valeur que Newton a conclue des observations de Pound.

De la probabilité des jugements.

J'ai assimilé, dans le n° 50 du second livre, le jugement d'un tribunal qui prononce entre deux opinions contradictoires, au résultat des témoignages de plusieurs témoins de l'extraction du numéro d'une urne qui ne contient que deux numéros. Il y a cependant, entre ces deux cas, cette différence, savoir, que la probabilité du témoignage est indépendante de la nature de la chose attestée, parce que l'on suppose que le témoin n'a pu se tromper sur cette chose, au lieu qu'un objet en litige peut être environné d'obscurités telles que les juges, en leur supposant toute la bonne foi désirable, peuvent être cependant d'avis contraires. La nature de l'affaire qui leur est soumise doit donc influer sur leur jugement. Je vais faire entrer cette considération dans les recherches suivantes, en l'appliquant aux jugements en matière criminelle.

Il faut sans doute aux juges, pour condamner un accusé, les

plus fortes preuves de son délit; mais une preuve morale n'est jamais qu'une probabilité, et l'expérience n'a que trop fait connaître les erreurs dont les jugements criminels, ceux même qui paraissent être les plus justes, sont encore susceptibles. La possibilité de réparer ces erreurs est le plus solide argument des philosophes qui ont voulu proscrire la peine de mort. Nous devrions donc nous abstenir de juger, s'il nous fallait attendre l'évidence mathématique. Mais lorsque les preuves ont une force telle que le produit de l'erreur à craindre, par sa faible probabilité, soit inférieure au danger qui résulterait de l'impunité du crime, le jugement est commandé par l'intérêt de la société. Ce jugement se réduit, si je ne me trompe, à la solution de la question suivante : la preuve du délit de l'accusé a-t-elle le haut degré de probabilité nécessaire pour que les citoyens aient moins à redouter les erreurs des tribunaux, s'il est innocent et condamné, que ses nouveaux attentats, et ceux des malheureux qu'enhardirait l'exemple de son impunité, s'il était coupable et absous? La solution de cette question dépend de plusieurs éléments très-difficiles à connaître. Telle est l'imminence du danger qui menacerait la société, si l'accusé criminel restait impuni. Quelquefois ce danger est si grand, que le magistrat se voit obligé de renoncer aux formes sagement établies pour la sûreté de l'innocence. Mais ce qui rend presque toujours la question dont il s'agit insoluble est l'impossibilité d'apprécier exactement la probabilité du délit, et de fixer celle qui est nécessaire pour la condamnation de l'accusé. Chaque juge, à cet égard, est forcé de s'en rapporter à son propre tact. Il forme son opinion, en comparant les divers témoignages et les circonstances dont le délit est accompagné, aux résultats de ses réflexions et de son expérience; et, sous ce rapport, une longue habitude d'interroger et de juger les accusés donne beaucoup d'avantages pour saisir la vérité, au milieu d'indices souvent contradictoires.

La question précédente dépend encore de la grandeur de la peine appliquée au délit; car on exige naturellement, pour prononcer la mort, des preuves beaucoup plus fortes que pour infliger une détention de quelques mois. C'est une raison de proportionner la peine au délit, une peine grave, appliquée à un léger délit, devant inévitablement faire absoudre beaucoup de coupables. Le produit de la probabilité du délit, par sa gravité, étant la mesure du danger que l'absolution de l'accusé peut faire éprouver à la société, on pourrait penser que la peine doit dépendre de cette probabilité. C'est ce que l'on fait indirectement dans les tribunaux, où l'on retient pendant quelque temps l'accusé contre lequel s'élèvent des preuves très-fortes, mais insuffisantes pour le condamner. Dans la vue d'acquérir de nouvelles lumières, on ne le remet point sur-le-champ au milieu de ses concitoyens, qui ne le reverraient pas sans de vives alarmes. Mais l'arbitraire de cette mesure, et l'abus qu'on en peut faire, l'ont fait rejeter dans les pays où l'on attache un très-grand prix à la liberté individuelle.

Maintenant, quelle est la probabilité que la décision d'un tribunal, qui ne peut condamner qu'à une majorité donnée, sera juste, c'est-à-dire conforme à la vraie solution de la question posée ci-dessus? Ce problème important, bien résolu, donnera le moyen de comparer entre eux les tribunaux divers. La majorité d'une seule voix, dans un nombreux tribunal, indique que l'affaire dont il s'agit est à peu près douteuse. La condamnation de l'accusé serait donc alors contraire aux principes d'humanité protecteurs de l'innocence. L'unanimité des juges donnerait une très-grande probabilité d'une décision juste; mais, en s'y astreignant, trop de coupables seraient absous. Il faut donc, ou limiter le nombre des juges, si l'on veut qu'ils soient unanimes, ou accroître la majorité nécessaire pour condamner, lorsque le tribunal devient plus nombreux. Je vais essayer d'appliquer le calcul

à cet objet, persuadé que les applications de ce genre, lorsqu'elles sont bien conduites et fondées sur des données que le bon sens nous suggère, sont toujours préférables aux raisonnements les plus spécieux.

La probabilité que l'opinion de chaque juge est juste entre comme élément principal dans ce calcul. Cette probabilité est évidemment relative à chaque affaire. Si dans un tribunal de mille et un juges, cinq cent un sont d'une opinion et cinq cents sont d'une opinion contraire, il est visible que l'opinion de chaque juge surpasse bien peu $\frac{1}{2}$; car, en la supposant sensiblement plus grande, une seule voix de différence serait un événement invraisemblable. Mais si les juges sont unanimes, cela indique dans les preuves ce degré de force qui entraîne la conviction. La probabilité de l'opinion de chaque juge est donc alors très-près de l'unité ou de la certitude, à moins que des passions ou des préjugés communs n'égarent tous les juges. Hors de ces cas, le rapport des voix pour ou contre l'accusé doit seul déterminer cette probabilité. Je suppose ainsi qu'elle peut varier depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à l'unité, mais qu'elle ne peut être au-dessous de $\frac{1}{2}$. Si cela n'était pas, la décision du tribunal serait insignifiante comme le sort: elle n'a de valeur qu'autant que l'opinion du juge a plus de tendance à la vérité qu'à l'erreur. C'est ensuite par le rapport des nombres de voix favorables ou contraires à l'accusé que je détermine la probabilité de cette opinion.

Ces données suffisent pour avoir l'expression générale de la probabilité que la décision du tribunal, jugeant à une majorité donnée, est juste. Dans nos tribunaux spéciaux, composés de huit juges, cinq voix sont nécessaires pour la condamnation d'un accusé: la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision surpasse alors $\frac{1}{4}$. Si le tribunal était réduit à six membres, qui ne pourraient condamner qu'à la pluralité de quatre voix, la probabilité de l'erreur à craindre serait alors au-dessous

de $\frac{1}{4}$; il y aurait donc, pour l'accusé, un avantage à cette réduction du tribunal. Dans l'un et l'autre cas, la majorité exigée est la même et égale à deux. Ainsi cette majorité demeurant constante, la probabilité de l'erreur augmente avec le nombre des juges. Cela est général, quelle que soit la majorité exigée, pourvu qu'elle reste la même. En prenant donc pour règle le rapport arithmétique, l'accusé se trouve dans une position de moins en moins avantageuse, à mesure que le tribunal devient plus nombreux. Ce rapport est suivi dans la chambre des pairs d'Angleterre. On y exige, pour la condamnation, une majorité de douze voix, quel que soit le nombre des juges. Si l'on a cru que les voix opposées, se détruisant réciproquement, les douze voix restantes représentent l'unanimité d'un jury de douze membres, exigée dans le même pays pour la condamnation d'un accusé, on a été dans une grande erreur. Le bon sens fait voir qu'il y a différence entre la décision d'un tribunal de deux cent douze juges, dont cent douze condamnent l'accusé, tandis que cent l'absolvent, et celle d'un tribunal de douze juges unanimes pour la condamnation. Dans le premier cas, les cent voix favorables à l'accusé autorisent à penser que les preuves sont loin d'atteindre le degré de force qui entraîne la conviction; dans le second cas, l'unanimité des juges porte à croire qu'elles ont atteint ce degré. Mais le simple bon sens ne suffit pas pour apprécier l'extrême différence de la probabilité de l'erreur dans ces deux cas; il faut alors recourir au calcul, et l'on trouve à très-peu près un cinquième pour la probabilité de l'erreur dans le premier cas, et seulement $\frac{1}{8192}$ pour cette probabilité dans le second cas, probabilité qui n'est pas un millième de la première. C'est une confirmation du principe que le rapport arithmétique est défavorable à l'accusé, quand le nombre des juges augmente. Au contraire, si l'on prend pour règle le rapport géométrique, la probabilité de l'erreur de la décision diminue quand le nombre des juges

s'accroît. Par exemple, dans les tribunaux qui ne pourraient condamner qu'à la pluralité des deux tiers des voix, la probabilité de l'erreur à craindre est à peu près un quart, si le nombre des juges est de six; elle est au-dessous de $\frac{1}{7}$ si ce nombre s'élève à douze. Ainsi l'on ne doit se régler, ni sur le rapport arithmétique, ni sur le rapport géométrique, si l'on veut que la probabilité de l'erreur ne soit jamais au-dessus ni au-dessous d'une fraction déterminée.

Mais à quelle fraction doit-on se fixer? C'est ici que l'arbitraire commence, et les tribunaux offrent à cet égard de grandes variétés. Dans les tribunaux spéciaux, où cinq voix sur huit suffisent pour la condamnation de l'accusé, la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté du jugement est $\frac{65}{256}$, ou au-dessus de $\frac{1}{4}$. La grandeur de cette fraction est effrayante; mais, ce qui doit rassurer un peu, c'est la considération que, le plus souvent, le juge qui absout un accusé ne le regarde pas comme innocent: il prononce seulement qu'il n'est pas atteint par des preuves suffisantes pour qu'il soit condamné. On est surtout rassuré par la pitié que la nature a mise dans le cœur de l'homme, et qui dispose l'esprit à voir difficilement un coupable dans l'accusé soumis à son jugement. Ce sentiment, plus vif dans ceux qui n'ont point l'habitude des jugements criminels, compense les inconvénients attachés à l'inexpérience des jurés. Dans un jury de douze membres, si la pluralité exigée pour la condamnation est de huit voix sur douze, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1093}{8192}$, ou un peu moindre qu'un huitième; elle est à peu près $\frac{1}{22}$ si cette pluralité est de neuf voix. Dans le cas de l'unanimité, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1}{8192}$, c'est-à-dire plus de mille fois moindre que dans nos jurys.

La solution du problème que nous venons de considérer ne suffit pas pour fixer la majorité convenable, dans un tribunal d'un nombre quelconque de juges. Il faut pour cela connaître la

probabilité du délit au-dessous de laquelle un accusé ne peut être condamné, sans que les citoyens aient plus à redouter les erreurs des tribunaux que les attentats qui pourraient naître de l'impunité d'un coupable absous. Il faut ensuite déterminer la probabilité du délit résultante de la décision du tribunal, et fixer la majorité de manière que ces probabilités soient égales. Mais il est impossible de les obtenir. La première est, comme nous l'avons dit, relative à la position dans laquelle la société se trouve, position variable, très-difficile à bien définir, et toujours trop compliquée pour être soumise au calcul; la seconde dépend d'une chose entièrement inconnue, la loi de probabilité de l'opinion de chaque juge dans l'estimation qu'il fait de la probabilité du délit. Vu notre ignorance de ces deux éléments du calcul, quoi de plus raisonnable que de partir de la solution du seul problème que nous puissions résoudre dans cette matière, celui de la probabilité de l'erreur de la décision d'un tribunal? Cette probabilité me paraît trop forte dans nos tribunaux, et je pense qu'à cet égard il convient de se rapprocher du jury anglais, où elle n'est que de $\frac{1}{8192}$. En la fixant à la fraction $\frac{1}{1024}$, et en déterminant la majorité nécessaire pour l'atteindre, on place l'accusé dans la position où il serait vis-à-vis d'un jury de neuf membres dont on exigerait l'unanimité; ce qui me paraît garantir suffisamment l'innocence des erreurs des tribunaux, et la société des maux que produirait l'impunité des coupables. Il doit être extrêmement rare alors qu'un accusé soit condamné avec une probabilité moindre que celle qui est nécessaire à sa condamnation; car la majorité qui le condamne déclare que la probabilité de son délit est au moins égale à cette probabilité nécessaire; la minorité qui l'absout déclare que la première de ces probabilités lui paraît inférieure à la seconde; mais il est naturel de croire que cette infériorité est peu considérable. Il devra donc rarement arriver que la probabilité moyenne, qui résulte de l'ensemble des juge-

ments des membres du tribunal, soit inférieure à la probabilité requise pour la condamnation de l'accusé, si l'on réduit, par une majorité convenable, la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision, à la fraction $\frac{1}{1024}$. L'analyse fournit, pour avoir cette majorité, des formules que je vais exposer ici, et qu'il est facile de réduire dans une table dépendante du nombre des juges. Mais une pareille table paraîtra trop arbitraire au commun des hommes, qui préféreront toujours l'un ou l'autre des rapports arithmétique et géométrique, qu'ils peuvent aisément concevoir.

1. Le juge ne doit pas, pour condamner un accusé, attendre l'évidence mathématique, qu'il est impossible d'atteindre dans les choses morales; mais, lorsque la probabilité du délit est telle que les citoyens aient plus à redouter les attentats qui pourraient naître de son impunité que les erreurs des tribunaux, l'intérêt de la société exige la condamnation de l'accusé. Je nomme a ce degré de probabilité, et je suppose que le juge qui condamne un accusé prononce par là que la probabilité de son délit est au moins a . Je nomme x la probabilité de cette opinion du juge, probabilité que je supposerai égale ou supérieure à $\frac{1}{2}$ et variant par des degrés infiniment petits, égaux à dx , et également probables *a priori*. Je suppose encore que le tribunal est composé de $p+q$ juges, dont p condamnent l'accusé et q l'absolvent: la probabilité que l'opinion du tribunal est juste sera proportionnelle à $x^p(1-x)^q$, et la probabilité qu'elle ne l'est pas sera proportionnelle à $(1-x)^p x^q$. La probabilité de la bonté du jugement sera donc, par le n° 1 du second livre,

$$\frac{x^p \cdot (1-x)^q}{x^p \cdot (1-x)^q + (1-x)^p \cdot x^q} \quad (a)$$

Il faut multiplier cette quantité par la probabilité de la valeur de x , prise de l'événement observé. Cet événement est que le tribunal s'est divisé en deux parties, dont l'une, composée de p juges,

condamne l'accusé, et dont l'autre, formée de q juges, l'absout. La probabilité de x est donc la fonction $x^p(1-x)^q + (1-x)^p \cdot x^q$, divisée par la somme de toutes les fonctions semblables, relatives à toutes les valeurs de x , depuis $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à $x = 1$; elle est par conséquent

$$\frac{[x^p \cdot (1-x)^q + (1-x)^p \cdot x^q] \cdot dx}{\int x^p dx \cdot (1-x)^q},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. En multipliant cette fonction par la fonction (a), on aura

$$\frac{x^p dx \cdot (1-x)^q}{\int x^p dx \cdot (1-x)^q}$$

pour la probabilité de la bonté du jugement, relative à x . La même probabilité relative à toutes les valeurs de x est donc

$$\frac{\int x^p dx \cdot (1-x)^q}{\int x^p dx \cdot (1-x)^q}, \quad (b)$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à $x = 1$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Il suit de là que la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté du jugement est encore exprimée par la formule (b), pourvu que l'on prenne l'intégrale du numérateur, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$. On trouve ainsi cette dernière probabilité égale à

$$\frac{1}{2^{p+q+1}} \left\{ 1 + \frac{p+q+1}{1} + \frac{(p+q+1) \cdot (p+q)}{1 \cdot 2} + \frac{(p+q+1) \cdot (p+q) \cdot (p+q-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(p+q+1) \cdot (p+q) \cdot (p+q-1) \dots (p+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q} \right\}. \quad (c)$$

Si l'on exige l'unanimité, q est nul, et cette expression devient

$$\frac{1}{2^{p+1}}.$$

2. Déterminons présentement la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision d'un tribunal, lorsque p et q sont de grands nombres; ce qui rend la formule (c) très-difficile à évaluer en nombres. Il faut distinguer ici deux cas, l'un dans lequel $p-q$ est considérable; l'autre dans lequel $p-q$ est assez petit. Dans le premier cas, on fera usage de la formule (o) du n° 28 du second livre, qui donne pour la probabilité de l'erreur

$$\frac{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}{2^{p+q+\frac{1}{2}} \cdot p^{p+\frac{1}{2}} \cdot q^{q+\frac{1}{2}} \cdot (p-q) \cdot \sqrt{\pi}} \left\{ 1 - \frac{(p+q)}{(p-q)^2} - \frac{[(p+q)^2 - 1] 3pq}{12 \cdot pq \cdot (p+q)} \right\}, \quad (e)$$

π étant la circonférence dont le diamètre est l'unité.

Dans le second cas, où $p-q$ est un petit nombre relativement à p , on trouvera facilement, par l'analyse du n° 19 du second livre, la probabilité de l'erreur à craindre, égale à

$$\frac{\int dt \cdot e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}, \quad (f)$$

l'intégrale étant prise depuis

$$t = \frac{(p-q)^2 \cdot (p+q)}{8pq}$$

jusqu'à l'infini.

Pour donner un exemple de chacune de ces formules, supposons un tribunal formé de cent quarante-quatre juges, et qu'il faille les cinq huitièmes pour la condamnation de l'accusé. Alors on a

$$p = 90, \quad q = 54,$$

et la formule (e) donne $\frac{1}{75}$ pour la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté de la décision du tribunal. Dans le cas de l'unanimité d'un jury de huit membres, la probabilité de l'erreur à craindre

est $\frac{1}{512}$; l'accusé est donc alors dans une position plus favorable que vis-à-vis d'un semblable jury.

Supposons le tribunal formé de deux cent douze juges, et qu'une majorité de douze voix suffise pour la condamnation. Dans ce cas

$$p + q = 212, \quad p - q = 12,$$

et la formule (f) donne $\frac{1}{4,889}$ pour la probabilité de l'erreur à craindre.

DEUXIÈME SUPPLÉMENT.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS AUX OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES.

On détermine la longueur d'un grand arc à la surface de la terre par une chaîne de triangles qui s'appuient sur une base mesurée avec exactitude; mais, quelque précision que l'on apporte dans la mesure des angles, leurs erreurs inévitables peuvent, en s'accumulant, écarter sensiblement de la vérité la valeur de l'arc que l'on a conclue d'un grand nombre de triangles. On ne connaît donc qu'imparfaitement cette valeur, si l'on ne peut pas assigner la probabilité que son erreur est comprise dans des limites données. Le désir d'étendre l'application du calcul des probabilités à la philosophie naturelle m'a fait rechercher les formules propres à cet objet.

Cette application consiste à tirer des observations les résultats les plus probables, et à déterminer la probabilité des erreurs dont ils sont toujours susceptibles. Lorsque ces résultats, étant connus à peu près, on veut les corriger par un grand nombre d'observations, le problème se réduit à déterminer la probabilité d'une ou de plusieurs fonctions linéaires des erreurs partielles des observations, la loi de probabilité de ces erreurs étant supposée connue. J'ai donné, dans le second livre de ma Théorie analytique des probabilités, une méthode et des formules générales pour cet objet, et je les ai appliquées, dans le premier supplément, à quelques points intéressants du Système du monde. Dans les questions d'astronomie, chaque observation fournit, pour corriger les éléments, une équation de condition; lorsque ces équations sont