Le nombre d'or en mathématique

Le 14 janvier 2009, par **Pierre de la Harpe**

Professeur à l'Université de Genève (**page web**)

Texte de vulgarisation mathématique à propos du nombre d'or $\varphi \approx 1.61803\cdots$. On y montre d'abord l'équivalence de plusieurs définitions de ce nombre. Puis on décrit le rôle du nombre d'or dans quelques problèmes géométriques (proportions dans un pentagone régulier), ainsi que dans diverses considérations arithmétiques élémentaires et plus avancées (approximation diophantienne, 10ème problème de Hilbert). Les prérequis mathématiques sous–entendus varient considérablement de place en place.

Chic
J'ai
Compris
L'essentiel
Et c'est pour demain
Si le diable est dans les détails [1]

Un choix de définitions

EN mathématiques, le **nombre d'or** peut être défini de plusieurs manières, différentes, mais toutes équivalentes au sens où elles définissent le même nombre. Le choix des définitions qui suivent, ainsi que leur ordre, relève donc d'une bonne dose d'arbitraire.

Définition 1 : *Le **nombre d'or** est le nombre*

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

La notation choisie, la lettre grecque φ, prononcer « fi » , est l'un des usages courants (un autre est τ, prononcer à mi-chemin entre « tau » et « tao »). Certains auteurs affirment que le choix de φ honore le sculpteur grec Phidias, du Vème siècle avant Jésus-Christ.

Approximations décimales.

Pour les flemmards : de $4 < 5 < 9$, on déduit d'abord $2 < \sqrt{5} < 3$, et par suite $1,5 < \varphi < 2$. En poussant les calculs un peu plus loin, d'abord

$$4,84 < 5 < 5,29 \Longrightarrow 2,2 < \sqrt{5} < 2,3 \Longrightarrow 1,6 < \varphi < 1,65,$$

puis

$$4,9729 < 5 < 5,0176 \Longrightarrow 2,23 < \sqrt{5} < 2.24 \Longrightarrow 1,615 < \varphi < 1,62,$$

etc., par exemple jusqu'à ce qu'on trouve (comme dans au moins une page de Wikipedia) $\varphi \approx 1,6180339887\cdots$, ou encore un peu plus :

$$\varphi \approx 1,61803398\,87498948\,48204586\,83436563\,81177203\,09179805\,76286213\cdots.$$

Voir par exemple ce lien pour les $15\,000$ premières décimales de φ.

C'est une conséquence de la **proposition 2** (voir plus bas) qu'il n'est pas possible d'écrire une valeur exacte en notation décimale avec un nombre fini de chiffres.

Définition 2 : *Le **nombre d'or** est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.*

Equivalence avec la définition 1.

L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a deux solutions qui sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, comme on le vérifie par exemple en écrivant

$$\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{5}{4} = x^2-x-1.$$

Par ailleurs, il est (presqu') évident que le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est positif et que le nombre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est négatif.

CQFD

Remarques.

Ainsi, $\varphi^2-\varphi-1=0$; il est parfois avantageux d'écrire cela sous la forme

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1.$$

Notons par ailleurs que

$$-\frac{1}{\varphi} = \frac{-2}{\sqrt{5}+1} = \frac{-2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{-2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

c'est-à-dire que l'autre racine de l'équation de la **définition 2** est précisément

$$-\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618\cdots.$$

Définition 3 : *Le **nombre d'or** est la proportion φ telle que, étant donné deux nombres positifs L et ℓ tels que $L>\ell>0$, le rapport de $L+\ell$ à L est égal au rapport de L à ℓ.*

Équivalence avec la définition 2.

Si $\frac{L+\ell}{L} = \frac{L}{\ell} = \varphi$, alors $\frac{\varphi\ell+\ell}{\varphi\ell} = \varphi$, donc $\frac{\varphi+1}{\varphi} = \varphi$, ou encore

$$\varphi+1 = \varphi^2,$$

*de sorte que φ est bien le nombre de la **définition 2.***

*Réciproquement, soit φ le nombre de la définition 2. Choisissons arbitrairement un nombre $\ell>0$ et posons $L=\varphi\ell$. On vérifie facilement que $\frac{L+\ell}{L} = \frac{L}{\ell} = \varphi$, de sorte que φ est bien le nombre de la **définition 3.***

CQFD

Considérons sur une droite un segment d'extrémités Q et S, de longueur $L+\ell$, avec un point U sur le segment tel que la longueur de QU soit L et celle de US soit ℓ. Si $\frac{L+\ell}{L} = \frac{L}{\ell}$, la terminologie classique consiste à dire que : *le point U divise le segment QS en moyenne et extrême raison.*

Faisons d'abord de la géométrie ...

Proposition 1 : *Dans un pentagone régulier dont les côtés ont longueur 1, les diagonales ont longueur φ.*

Démonstration.

Considérons un pentagone régulier de sommets P, Q, R, S, T, dont les côtés ont longueur

$$(PQ) = (QR) = (RS) = (ST) = (TP) = 1.$$

Les cinq diagonales ont aussi même longueur, que nous notons τ :

$$(PR) = (QS) = (RT) = (SP) = (TQ) = \tau.$$

Il s'agit de montrer que $\tau = \varphi$.

INDISPENSABLE : dessiner une figure en lisant la suite !

Premièrement, notons U l'intersection des diagonales QS et RT. Les triangles UTQ et URS ont leurs côtés parallèles deux à deux ; ils sont donc semblables, et on a

$$\frac{(QU)}{(US)} = \frac{(QT)}{(RS)} = \tau.$$

Deuxièmement, le quadrilatère $PQUT$ est un losange (côtés opposés parallèles et donc de même longueur) ; par suite :

$$(QU) = (PT) = 1.$$

Il en résulte que

$$\frac{(QS)}{(QU)} = \frac{(QS)}{(PT)} = \tau = \frac{(QU)}{(US)}.$$

*Vu la **définition 3** (où on peut lire $L = (QU)$ et $\ell = (US)$), on a bien $\tau = \varphi$.*

CQFD

Cette proposition montre donc l'équivalence des définitions précédentes avec la définition suivante.

Définition 4 : *Le **nombre d'or** est le rapport entre la longueur des diagonales et la longueur des côtés dans un pentagone régulier.*

Remarque : Le nombre d'or apparaît ainsi de manière très simple dans une figure, le pentagone régulier, qui a exercé depuis la nuit des temps une très grande fascination. La découverte du fait que ce nombre soit irrationnel (voir plus bas) fut un choc considérable pour les géomètres de la Grèce ancienne ; voir [**OsWa**].

Exercice. Si vous savez ce qu'est un cosinus, montrez que

$$2\cos\frac{\pi}{5} = \varphi$$

et

$$2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{\varphi}.$$

Indication.

Dans un pentagone régulier dont les côtés ont longueur 1, on trouve un triangle rectangle dont l'hypothénuse est de longueur 1 et un côté de l'angle droit de longueur $\varphi/2$.

Remarque, pour les lecteurs qui savent manipuler l'exponentielle d'un nombre complexe.

Voici une autre manière de démontrer la relation de l'exercice précédent : si $z = e^{2i\pi/5}$ et $\gamma = (z + \frac{1}{z}) = 2\cos(2\pi/5)$, alors $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ et $\gamma^2 + \gamma - 1 = 0$, et par suite $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. On en déduit d'abord que $2\cos^2(\pi/5) = 1 + \cos(2\pi/5) = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$, et finalement que $2\cos(\pi/5) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

Voici une traduction trigonométrique des quatre lignes qui précèdent, sans nombre complexe. Choisissons l'origine du plan au centre du pentagone, et notons ses sommets dans l'ordre cyclique : z_0, z_1, z_2, z_3, z_4. Montrons d'abord que la somme $S = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ de ces quatre vecteurs est nulle.

En effet, la moitié de la somme de deux sommets consécutifs est le milieu du côté qui les joint, de sorte que, par exemple $\frac{1}{2}(z_0 + z_1) = -\rho z_3$, où ρ désigne la distance entre l'origine et le milieu d'un côté. Par suite

$$S = \frac{1}{2}(z_0 + z_1) + \frac{1}{2}(z_1 + z_2) + \frac{1}{2}(z_2 + z_3) + \frac{1}{2}(z_3 + z_4) + \frac{1}{2}(z_4 + z_0) = -\rho z_3 - \rho z_4 - \rho z_0 - \rho z_1 - \rho z_1 = -\rho S,$$

ce qui implique $S = 0$.

Les coordonnées des sommets s'écrivent

$$\begin{aligned}
z_0 &= (1, 0)\\
z_1 &= (\cos\tfrac{2\pi}{5}, \sin\tfrac{2\pi}{5})\\
z_2 &= (\cos\tfrac{4\pi}{5}, \sin\tfrac{4\pi}{5})\\
z_3 &= (\cos\tfrac{4\pi}{5}, -\sin\tfrac{4\pi}{5})\\
z_4 &= (\cos\tfrac{2\pi}{5}, -\sin\tfrac{2\pi}{5})
\end{aligned}$$

et $S = 0$ implique

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} \;=\; 0.$$

Posons provisoirement $x = 2\cos\frac{\pi}{5}$. *Alors*

$$2\cos\frac{2\pi}{5} \;=\; x^2 - 2 \quad \text{et} \quad 2\cos\frac{4\pi}{5} \;=\; (x^2-2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2,$$

de sorte que la relation précédente s'écrit

$$1 + x^2 - 2 + x^4 - 4x^2 + 2 \;=\; x^4 - 3x^2 + 1 \;=\; 0.$$

A priori, on trouve les deux solutions $x^2 = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$. *Or le signe* $-$ *ne convient pas, car* $\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{5} > \cos\frac{\pi}{3} = 1 \;\Rightarrow\; 2\cos\frac{\pi}{5} > 1 \;\Rightarrow\; x^2 > 1$. *On trouve donc bien* $x^2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, *et donc aussi* $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = \varphi$, *comme promis.*

Exercice. On considère dans le plan un cercle centré en un point O, deux rayons OP et OB perpendiculaires de ce cercle, le milieu D du rayon OB, la bissectrice de l'angle ODP qui coupe le rayon OP en un point N, la perpendiculaire à OP en N qui coupe le cercle en un point Q, et le point symétrique T de Q par rapport à la droite portant le rayon OP. Montrer que $\frac{(QT)}{(PQ)} = \varphi$, c'est-à-dire que P, Q et T sont trois des cinq sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de départ.

(La construction est celle donnée à la page 27 de [**Cox—69**] ; c'est une variante de la construction d'Euclide. Pour trouver la solution de l'exercice, il faut bien sûr commencer par faire un dessin !)

Remarque. Le nombre d'or se retrouve naturellement dans plusieurs rapports de longueurs qui apparaissent dans un *dodécaèdre régulier*, ce polyèdre de l'espace qui possède douze faces dont chacune est un pentagone régulier, et vingt sommets en chacun desquels se rejoignent trois faces.

On retrouve ces mêmes rapports dans le polyèdre cousin qui est l'icosaèdre régulier ; il a 20 faces qui sont des triangles équilatéraux et 12 sommets en chacun desquels se rejoignent 5 faces. Par exemple, les douze points de l'espace de coordonnées cartésiennes

$$(0, \pm\varphi, \pm 1), \qquad (\pm 1, 0, \pm\varphi), \qquad (\pm\varphi, \pm 1, 0)$$

sont les sommets d'un icosaèdre régulier. Ces deux polyèdres, et les trois autres polyèdres réguliers (tétraèdre, cube, octaèdre) fournissent la matière du livre XIII (le dernier) des *Éléments* d'Euclide.

Le nombre d'or entre également dans la description des *pavages de Penrose,* ces fascinants recouvrements du plan par des pavés découverts vers 1970. Dans l'une des variantes de ces pavages, chaque pavé est un triangle isocèle dont les angles sont ou bien $\pi/5, \pi/5, 3\pi/5$, ou bien $\pi/5, 2\pi/5, 2\pi/5$ (rappel : pour un angle, $\pi/5 = 36^o$). L'un des intérêts de ces pavages, il en existe d'innombrables, est de ne posséder aucune symétrie de translation. Mais ceci est toute une histoire, autre et superbe, qui nécessiterait à elle seule tout une note, et nous nous bornerons ici à signaler un article de Martin Gardner [**Gar—77**] ainsi que quelques sites ouèbes où en trouver davantage [**Pen**], [**Pen2**], [**Pen3**].

... et ensuite de l'arithmétique

Rappelons qu'un nombre (ou « nombre réel ») x est dit *rationnel* s'il existe deux entiers a, b, avec $b > 0$, tels que $x = \frac{a}{b}$. Une telle écriture est dite *réduite* si les entiers a et b sont *premiers entre eux,* c'est-à-dire s'ils n'ont pas d'autre diviseur commun que 1. Ainsi, si $x = 1,75$, alors $x = \frac{7}{4}$ est une écriture réduite et les entiers $7, 4$ sont premiers entre eux, alors que $x = \frac{14}{8}$ n'est pas une écriture réduite puisque 14 et 8 ont 2 comme diviseur commun. Il est facile de vérifier que, pour un nombre rationnel x donné, il existe *exactement une* paire réduite a, b telle que $x = \frac{a}{b}$.

Un nombre réel est *irrationnel* s'il n'est pas rationnel. Par exemple, si π est défini [2] comme le rapport entre le périmètre et le diamètre d'un cercle,

$$\pi \;\approx\; 3,14159\,26535\,89793\,23846\cdots,$$

on sait que π est un nombre irrationnel ; la première démonstration de ce fait, due à Lambert, date de 1761. (On sait même que π est un nombre transcendant, ce qui fut démontré par Lindemann en 1882, et ce qui apporte la « réponse moderne » à une question célèbre qui se posait depuis l'antiquité grecque, à savoir la *quadrature du cercle,* mais ceci aussi est une autre histoire.) De même on sait que le nombre

$$\begin{aligned} e &= 1+\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\tfrac{1}{4!}+\tfrac{1}{4!}+\tfrac{1}{5!}+\tfrac{1}{7!}+\tfrac{1}{8!}+\cdots \\ &\approx 2,71828\,18284\,59045\,23536\cdots \end{aligned}$$

est irrationnel (Euler, 1737 [**Eul—37**]), et même transcendant (Hermite, 1873). Autant que je sache, personne ne sait [3] montrer que $\pi + e$ est irrationnel (*a fortiori* transcendant). A titre de curiosité, voici néanmoins un résultat récent qui impressionne les spécialistes : les trois nombres π, e^π et $\Gamma(\frac{1}{4})$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$ (Nesterenko, 1997, voir le chapitre 10 de [**Rib—00**]).

Proposition 2 : *Le nombre φ est irrationnel.*

Première démonstration.

Pour le montrer, on suppose que φ est rationnel, $\varphi = \frac{a}{b}$ avec a et b premiers entre eux, et on va arriver à une contradiction. Posons $c = 2a - b$; on verifie que le plus grand commun diviseur de c et b est 1 ou 2. Si $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{a}{b}$, alors $\sqrt{5} = \frac{2a-b}{b} = \frac{c}{b}$, c'est-à-dire

$$5b^2 = c^2. \tag{1}$$

Il en résulte que c^2 est divisible par 5. Par suite (attention, c'est le point-clé de la démonstration !), c est divisibie par 5 (de sorte que c^2 est en fait divisible par 25). Il existe donc un entier f tel que $c = 5f$; on peut re-écrire (1) sous la forme $5b^2 = 25f^2$, de sorte que

$$b^2 = 5f^2. \tag{2}$$

En répétant le même raisonnement, on voit qu'il existe un entier g tel que $b = 5g$.

En comparant les égalités $c = 5f$, $b = 5g$ avec l'hypothèse impliquant que b et c n'ont pas de diviseur commun autre que 1 ou 2, on voit bien qu'il y a une contradiction ; c'est donc l'hypothèse de l'existence d'une paire a, b avec $\varphi = \frac{a}{b}$ qui est absurde.

CQFD

Seconde démonstration, esquisse.

*Supposons que $\varphi = \frac{a}{b}$, avec a et b premiers entre eux. Notons d'abord que les entiers a et b satisfont $a > b$. En utilisant la **définition 3**, on obtient aussi $\varphi = \frac{b}{a-b}$, et il est facile de vérifier que les entiers b et $a - b$ sont également premiers entre eux. Ceci est en contradiction avec le fait qu'un nombre rationnel (comme φ selon l'hypothèse faite au début de cette démonstration) n'a qu'une écriture réduite.*

CQFD

Remarque : L'argument de la première démonstration montre également que les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, ... , $\sqrt{2009}$, ... sont irrationnels. [Il faut parfois un tout petit peu plus de réflexion, par exemple pour $\sqrt{8}$.]

Les autres propriétés que nous voulons décrire sont plus difficiles à montrer, et nous nous bornerons ici à les énoncer. Soit x un nombre réel irrationnel. Il est facile de se convaincre du fait que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une infinité de paires (a, b) de nombres entiers premiers entre eux, paires telles que

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \epsilon.$$

C'est un peu plus difficile de montrer un énoncé plus fort : il existe une infinité de paires (a, b) de nombres entiers premiers entre eux telles que $\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2}$. En fait, on sait même montrer davantage.

Théorème 3 (Hurwitz) : *Pour tout nombre réel irrationnel x, il existe une infinité de paires (a, b) d'entiers premiers entre eux telles que*

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}.$$

Pour le théorème de Hurwitz, voir par exemple, [**HaWr—79**], chapitre XI, section 11.8 ou [**Niv—67**], *Theorems 6.1 et 6.2.* Pour le théorème suivant, qui est une partie de résultats publiés par A. Markoff (ou Markov) en 1879 et 1880, voir [**Lev—56**], *Theorem 9.10* et [**Cas—65**], *Chapters I and II.*

Théorème 4 (Markoff) :

(i) La constante $\sqrt{5}$ est la meilleure possible dans l'inégalité du théorème de Hurwitz. En d'autres termes, l'affirmation de ce théorème cesse d'être vraie si on y remplace $\sqrt{5}$ par une constante $C > \sqrt{5}$.

(ii) Soit x un nombre réel irrationnel. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- *il est impossible de trouver une constante $C > \sqrt{5}$ et une infinité de paires (a, b) d'entiers premiers entre eux telles que*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{Cb^2};$$

- *il existe des entiers p, q, r, s tels que $ps - qr = 1$ ou $ps - qr = -1$ et*

$$x = \frac{p\varphi + q}{r\varphi + s}. \tag{3}$$

(iii) Si x est irrationnel et n'est pas de la forme (3), alors il existe une infinité de paires (a, b) d'entiers premiers entre eux telles que

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{8}b^2}.$$

De plus, pour certains nombres (par exemple $x = \sqrt{2}$), il n'est pas possible de remplacer $\sqrt{8}$ par une constante plus grande.

On pourrait continuer : $\sqrt{5}$ et $\sqrt{8}$ sont les deux premiers termes d'une suite infinie $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{221}/5$, $\sqrt{1517}/13$, $\sqrt{7565}/29$, $\sqrt{2600}/17$, $\sqrt{71\,285}/89$, $\sqrt{257\,045}/168$, $\sqrt{84\,680}/97$, $\sqrt{488\,597}/233$, ... qui tend vers 3. Ce sont tous des nombres de la forme $\sqrt{9m^2 - 4}/m$, où m est un entier strictement positif, et plus précisément ceux pour lesquels il existe deux entiers m_1, m_2 tels que

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Les premiers de ces nombres m sont

$$1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, \ldots$$

Ces résultats sont dus à A. Markoff (articles de 1879 et 1880) ; le « théorème de Hurwitz » énoncé ci—dessus remonte à un article postérieur [**Hur—91**], mais dans lequel Hurwitz utilisait un argument plus direct. Voir [**CuFl—89**] pour une présentation avec démonstrations des résultats de Markoff, et en particulier [**CuFl—89**], page 2 pour quelques remarques historiques. Les nombres de la forme $\frac{p\varphi+q}{r\varphi+s}$ avec p, q, r, s entiers et $|ps - qr| = 1$ sont parfois appelés *nombres nobles*.

Cette théorie des approximations rationnelles des nombres irrationnels est intimement liée à la théorie des fractions continues, que nous n'évoquerons que via le très modeste exercice suivant.

Exercice (fractions continues). La relation $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ suggère l'écriture (infinie !)

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$$

à laquelle les mathématiciens savent donner un sens rigoureux. Ecrire les fractions rationnelles

$$1 + \frac{1}{1+1}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}$$

sous forme réduite.

Remarque géométrique importante : Ces résultats de Markoff ont beau pouvoir apparaître comme le fin du fin de l'arithmétique, ils peuvent avec profit être vus sous un aspect résolument géométrique, en termes de géodésiques sur une surface munie d'une métrique riemannienne, surface homéomorphe à un tore à un trou ou à une sphère à quatre trous [**Ser—85**].

Le nombre d'or et la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est la suite de nombres entiers $F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots$ définie par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$$

pour tout $k \geq 0$. Ses premiers termes sont donc 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, 14930352, 24157817, 39088169, ...

La terminologie se réfère à Leonardo da Pisa (vers 1170—1250), aussi dit Fibonacci (car fils de Guilielmo Bonacci). La suite qui porte son nom apparaît dans son *liber abaci* (livre des calculs), publié en 1202 ; c'est ce livre qui a fait connaître en Occident les chiffres indiens, dits aussi chiffres arabes, d'un maniement considérablement plus simple que les chiffres romains utilisés auparavant. Il semble que les nombres de Fibonacci étaient connus de certains savants indiens bien avant l'époque de Fibonacci.

C'est sans doute Kepler (1571—1630) qui a le premier explicitement noté que le rapport $\frac{F_{k+1}}{F_k}$ « tend vers φ quand k tend vers l'infini » , ou en d'autres termes se rapproche de plus en plus de φ quand k devient de plus en plus grand. Par exemple :

$\frac{F_3}{F_2} = 2$, $\frac{F_4}{F_3} = 1,5$, $\frac{F_5}{F_4} = 1,666$, $\frac{F_6}{F_5} = 1,6$, ..., $\frac{F_{10}}{F_9} \approx 1,6176$, $\frac{F_{11}}{F_{10}} \approx 1,6182$, ...

Une manière de le montrer est d'établir d'abord la « formule de Binet » , qui remonte à Euler [**Eul—65**], et qu'on pourrait prendre pour une définition des nombres de Fibonacci :

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^k - (-\varphi)^{-k}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right). \qquad \textbf{(4)}$$

Il en résulte que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F_{k+1}}{F_k} = \varphi, \qquad \textbf{(5)}$$

ce qui signifie que le défaut d'approximation $\left|\varphi - \frac{F_{k+1}}{F_k}\right|$ est aussi petit que l'on veut, pour autant que l'on choisisse pour k un entier assez grand.

Notons d'abord que les approximations de φ par les quotients successifs de nombres de Fibonacci sont alternativement par en—dessus et par en—dessous :

$$1 = \frac{1}{1} < \frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{21}{13} < \ldots < \varphi < \ldots < \frac{13}{8} < \frac{5}{3} < \frac{2}{1} < \frac{1}{0} = \infty$$

(où il faut bien sûr prendre « $< \frac{1}{0} = \infty$ » avec le grain de sel qui convient).

Notons aussi que la relation (5) n'est pas propre aux seuls nombres de Fibonacci, mais s'applique à toute une famille de suites numériques apparentées. Plus précisément :

Proposition 5 : *Soient a, b deux nombres réels positifs, l'un d'entre eux au moins étant strictement positif. On définit une suite de nombres positifs $g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots$ par*

$$g_0 = a, \quad g_1 = b, \quad g_{k+2} = g_{k+1} + g_k,$$

pour tout $k \geq 0$; par exemple :

$$g_0 = a, \quad g_1 = b, \quad g_2 = a + b, \quad g_3 = a + 2b, \ldots$$

Alors

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g_{k+1}}{g_k} = \varphi.$$

Sur la démonstration, indication pour les lectrices mathématiciennes.

On remarque d'abord que

$$\begin{pmatrix} g_k \\ g_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{k-1} \\ g_k \end{pmatrix}$$

pour tout $k \geq 1$ puis que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ possède un axe propre traversant le premier quadrant ($x > 0, y > 0$), qui est un axe propre de valeur propre φ donc un axe propre dilatant, et un axe propre contractant disjoint de ce premier quadrant, qui est un axe propre de valeur propre $-\varphi^{-1}$ donc un axe propre contractant. Ainsi, tout point du plan qui n'est pas sur l'axe propre contractant, en particulier le point P de coordonnées (a, b), fournit une orbite $(M^k P)_{k\geq 1}$ dont les points se rapprochent d'autant plus de l'axe propre dilatant que k est grand. Il reste à observer que la pente de l'axe propre dilatant est φ.

[La condition pour a et b d'être positifs n'est pas essentielle ; il suffit de supposer que le point (a, b) du plan n'est pas sur l'axe propre contractant de la matrice M.]

CQFD

Exemple. Les *nombres de Lucas* sont définis par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et $L_{k+2} = L_{k+1} + L_k$ pour $k \geq 0$. On montre par récurrence que $L_k = \varphi^k + (-\varphi)^{-k}$pour tout $k \geq 0$ et $L_k = F_{k+1} + F_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.

Exercice, pour une autre manière de voir certaines notions apparues dans la démonstration de la proposition 5. Vérifier que la transformation homographique

$$\mathbf{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

$$t \longmapsto \frac{t+1}{t}$$

possède exactement deux points fixes, φ qui est attractif et $-\varphi^{-1}$ qui est répulsif. Idem pour les itérés de cette transformation, par exemple pour le second itéré :

$$t \longmapsto \frac{2t+1}{t+1}.$$

Remarque. La proposition précédente montre qu'il existe de nombreuses suites $(g_k)_{k\geq 0}$ dont les quotients successifs $\frac{g_{k+1}}{g_k}$ tendent vers φ, suites qu'on pourrait appeler *suite fibonacoïdes* (la terminologie n'est pas standard). Toutefois, il est possible de « retrouver » la suite de Fibonacci proprement dite à partir de φ, comme nous l'expliquons plus bas (voir la **proposition 8**).

Montrons une interprétation des nombres de Fibonacci en termes de longueurs de certains « mots ». Pour cela, notons A l'alphabet $\{0, 1\}$ de taille deux et A^* l'ensemble des mots finis sur A, incluant le mot vide, autrement dit le *monoïde libre* sur A. Le *morphisme de Fibonacci* est défini par les règles de substitution

$$\sigma \,:\, 0 \longmapsto 01 \quad \text{et} \quad 1 \longmapsto 0$$

ainsi que par la règle $\sigma(w_1 w_2) = \sigma(w_1)\sigma(w_2)$ pour deux mots $w_1, w_2 \in A^*$.

Par ailleurs, soit $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ la suite de mots dans A^* définie par $\Phi_1 = 1$, $\Phi_2 = 0$ et

$$\Phi_n = \Phi_{n-1}\Phi_{n-2}$$

pour tout $n \geq 3$. Nous écrivons $|\Phi_n|$ pour la *longueur* du mot Φ_n, c'est-à-dire pour le nombre de ses lettres. Par exemple, $|\Phi_1| = |\Phi_2| = 1$ et $|\Phi_3| = |01| = 2$.

Proposition 6 : *Les notations étant comme ci—dessus,*

$$\sigma^n(1) = \Phi_{n+1} \quad \text{et} \quad \sigma^n(0) = \Phi_{n+2}$$

et

$$|\Phi_n| = F_n$$

pour tout $n \geq 1$.

Démonstration, par récurrence sur n.

(Elle est reprise de [AlSh—03], Theorem 7.1.2.)

Les assertions sont de vérification immédiate pour $n = 1$ *et* $n = 2$ *; on suppose désormais* $n \geq 3$, *et la proposition démontrée jusqu'à* $n - 1$. *Alors*

$$\sigma^n(1) = \sigma^{n-1}(0) = \Phi_{n+1}$$

et

$$\sigma^n(0) = \sigma^{n-1}(01) = \sigma^{n-1}(0)\sigma^{n-1}(1) = \Phi_{n+1}\Phi_n = \Phi_{n+2},$$

d'où la proposition.

CQFD

Le *mot infini de Fibonacci* est le mot infini

$$\Phi_\infty = \sigma^\omega(0) = 0100101001001010010 10\cdots$$

dont les F_n premières lettres sont Φ_n pour tout $n \geq 1$.

Corollaire 7 : *(i) La proportion des* 0 *dans* Φ_∞ *est* φ^{-1}.

(ii) Le mot infini de Fibonacci n'est invariant par aucun décalage.

Démonstration.

L'assertion (i) est une conséquence immédiate de la proposition (on laisse à la lectrice le soin de définir le terme de « proportion »...). L'assertion (ii) résulte du fait que, s'il existait un entier $k \geq 1$ *tel que* $x_{k+n} = x_n$ *pour tout* $n \geq 1$, *où* x_n *désigne la* n*—ième lettre du mot*

$$\Phi_\infty = x_1x_2x_3\cdots = x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\cdots = x_{2k+1}x_{2k+2}x_{2k+3}\cdots,$$

alors la proportion de 0 *dans* Φ_∞ *serait rationnelle.*

CQFD

Remarques

(1) Si on veut choisir une extension de Φ_∞ « vers la gauche » , c'est-à-dire si on cherche une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ avec $x_n \in \{0,1\}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et x_n la n—ième lettre de Φ_∞ pour tout $n \geq 0$, une exigence naturelle est de demander que la suite obtenue soit encore invariante par σ^2 (on ne peut pas avec σ). Il y a alors deux solutions, obtenues en écrivant de droite à gauche et à gauche de Φ_∞ ou bien les chiffres de $\lim_{n\to\infty}\sigma^{2n}(0)$, ce qui donne $\cdots 1001001010010\Phi_\infty$, ou bien ceux de $\lim_{n\to\infty}\sigma^{2n}(1)$, ce qui donne $\cdots 0100101001001\Phi_\infty$.

(2) Le mot infini de Fibonacci Φ_∞ et les mots de la remarque ci—dessus sont des exemples (parmi beaucoup d'autres) de mot parfaitement ordonnés (leurs définitions tiennent en peu de lignes) qui ne sont pas périodiques. En cristallographie mathématique, il existe de même des modèles ordonnés non périodiques de systèmes de points dans l'espace, dont les célèbres *pavages de Penrose*, et leurs « analogues » en dimension trois. Ces modèles sont d'une étude relativement récente, au moins en comparaison avec celle des *réseaux*, ou orbites dans le plan [respectivement dans l'espace à trois dimensions] de sous—groupes de translations de $\mathbf{R}^2$ [resp. $\mathbf{R}^3$], qui sont des sujets d'étude obligés en cristallographie classique. Les arrangements ordonnés non périodiques sont des modèles pour les *quasi—cristaux*, qui sont des formes particulières d'alliages métalliques dont la découverte expérimentale date du début des années 1980.

Revenons à la manière, promise, de « retrouver » la suite de Fibonacci à partir du φ. Soit x un nombre réel ; supposons—le irrationnel et positif pour simplifier la discussion. Un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ (écriture réduite) est dit une *approximation optimale de* x si

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \left|x - \frac{c}{d}\right|$$

pour tout nombre rationnel $\frac{c}{d}$ tel que $1 \leq d \leq b$ et $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$. Si on fait la liste de toutes les approximations optimales de x, par ordre croissant des dénominateurs, on obtient une suite de nombres rationnels qui se rapprochent de plus en plus de x. Par exemple pour $\sqrt{2}$, on trouve :

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \cdots$$

pour $\sqrt{7}$ on trouve

$$3, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{37}{14}, \frac{45}{17}, \frac{82}{31}, \frac{127}{48}, \frac{590}{223}, \cdots$$

pour π on trouve

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \frac{312689}{99532}, \cdots$$

pour e on trouve

$$3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \frac{1264}{465}, \cdots$$

(Les conventions concernant le premier terme de ces suites peuvent varier suivant le point de vue adopté (ou même les deux premiers termes si on permettait à x d'être rationnel, et alors aux suites approximantes d'être finies). Par exemple, le début de la suite pour le nombre e est souvent $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \ldots$. De même, la suite de la **proposition 8** commence avec $\frac{F_3}{F_2}$, et les quotients $\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_1}{F_0}$ n'y jouent aucun rôle.)

Proposition 8 : *Pour le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, la suite des approximations optimales au sens précédent est la suite des quotients de nombres de Fibonacci successifs, suite dont les premiers termes sont*

$$2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \cdots$$

Remarque : On pourrait utiliser la **proposition 8** pour donner encore une autre définition des nombres de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, et les nombres suivants définis à partir des approximations optimales successives de φ. Une telle définition serait peut-être défendable du strict point de vue de la logique, mais on admet qu'elle serait bien compliquée, voire tordue ...

Mentionnons encore un problème, lui aussi célèbre, dans l'histoire duquel les nombres de Fibonacci ont joué un rôle historique. En août 1900, au cours du *Deuxième Congrès International des Mathématiciens* de Paris, David Hilbert énonca une liste de 23 problèmes qu'il jugeait importants, et qui ont effectivement influencé de manière profonde les mathématiques du XXème siècle. Le dixième de ces problèmes concerne les polynômes à coefficients entiers et leurs solutions en nombres strictement positifs. Pour un tel polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, posons $V_+(P) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n | P(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$ où $\mathbb{Z}_+ = \{a \in \mathbb{Z} | a \geq 1\}$. Le dixième problème demande s'il existe un algorithme général qui, étant donné P comme ci—dessus, permet de décider en un temps fini si l'ensemble des solutions $V_+(P)$ est vide ou non.

La réponse est négative, comme l'ont montré Martin Davis, Julia Robinson, Hilary Putnam et Yuri Matiyasevich dans une série de travaux dont le dernier (de Matiyasevich) fut publié en 1970. Le point technique crucial du coup de grâce fut de trouver une fonction $k \longmapsto f(k)$ qui soit à la fois à croissance exponentielle et *diophantienne,* cette seconde exigence signifiant qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{Z}[A_1, A_2, X_1, \ldots, X_n]$ en $n+2$ variables tel que, pour des entiers k et f, l'équation en n variables $P(k, f, X_1, \ldots, X_n) = 0$ possède une solution en entiers positifs si et seulement si $f = f(k)$. Matiyasevich a montré que la fonction $k \longmapsto F_{2k}$ (= $(2k)$ième nombre de Fibonacci) convient. Depuis, on a trouvé beaucoup d'autres fonctions diophantiennes à croissance exponentielle, dont la fonction $(k, \ell) \longmapsto k^\ell$.

Démonstration au théorème 3.3 de Dav—73.

L'un des ingrédients principaux est une analyse fine des solutions $x, y \in \mathbf{Z}_+$ de l'équation de Pell

$$x^2 - dy^2 = 1$$

où $d = a^2 - 1$ et $a > 1$, solutions dont on montre que ce sont les paires x_n, y_n définies par

$x_n + y_n\sqrt{d} = (a+\sqrt{d})^n$, *avec* $n \in \mathbf{Z}_+$, *de sorte que ces solutions sont en particulier à croissance exponentielle.*

*Pour en apprendre davantage sur ce beau sujet, voir [**Dav—73**], [**Mat—93**] et [**Mat—00**].*

Pour les amateurs d'exercices

La mathématique des nombres de Fibonacci est inépuisable, au moins pour certains chercheurs. Ils apparaissent dans de nombreux livres de mathématiques plus ou moins vulgarisées, par exemple dans [**Rib—00**]. Il existe un journal expressément intitulé *The Fibonacci Quarterly*, avec environ 400 pages annuelles, publication officielle de ***The Fibonacci Association***.

A titre d'échantillon, voici pour les amateurs quelques exercices concernant ces nombres. Les éditions successives d'un livre de Vorobiev [**Vor—02**] en fournissent de très nombreux autres, variés et intéressants. Voir aussi le très recommandable livre *Concrete mathematics*, [**GrKP—89**], dès la page 285 ; son titre, « mathématiques concrètes » , est entre autres un jeu de mot tout à fait opportun sur le fait qu'il s'agit d'un subtil mélange entre mathématiques CONtinues et disCRÈTES.

Exercice. Montrer par récurrence sur k les identités suivantes :

$$F_{2k+2} = 3F_{2k} - F_{2k-2}$$

$$\varphi^k = F_k\varphi + F_{k-1},$$

$$F_{k+1} \quad \text{et} \quad F_k \quad \text{sont premiers entre eux.}$$

[Attention : il faut bien distinguer la notion de *nombre premier* de la notion *d'entiers premiers entre eux*. Dans le cas présent, il n'y a pas beaucoup de nombres de Fibonacci qui soient premiers ! Plus précisément, parmi les entiers k tels que $3 \leq k < 1000$, il y a exactement 21 valeurs telles que F_k soient un nombre premier : $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_7 = 13$, $F_{11} = 89$, $F_{17} = 1597, \cdots, F_{569}, F_{571}$. Voir [**Rib—89**], page 286.]

Exercice. Vérifier que

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n,$$

formule qui suggère encore une autre définition possible des nombres de Fibonacci. [Pour une solution de cet exercice, voir si nécessaire [**GrKP—89**], formule (6.117).]

Exercice. Montrer que tout entier $n \geq 1$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$$

$$k_1 \geq k_2 + 2, k_2 \geq k_3 + 2, ..., k_{r-1} \geq k_r + 2.$$

[C'est le *théorème de Zeckendorf* ; pour en lire un peu plus à ce sujet, voir par exemple le no 6.6 de [**GrKP—89**].]

Exercice (suggéré par le début de [Kau—04]). Il s'agit de considérer des rectangles plans qui sont réunions de carrés particuliers, ou en d'autres termes de puzzles dont toutes les pièces sont carrées, de tailles distinctes deux à deux (à une exception près, voir plus bas), et qu'il s'agit d'assembler en un rectangle.

(i) Vérifier la relation

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}.$$

En un premier temps, on pourra par exemple vérifier numériquement quelques termes de plus dans la suite d'égalités

$$1^2 + 1^2 = 1 \times 2$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \times 3$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \times 5$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5 \times 8$$

etc.

(ii) Dessiner des puzzles, successivement :

- deux carrés de côté 1 formant un rectangle de côtés 1 et 2,
- trois carrés de côtés respectivement $1, 1, 2$ formant un rectangle de côtés 2 et 3,
- quatre carrés de côtés respectivement $1, 1, 2, 3$ formant un rectangle de côtés 3 et 5,
- cinq carrés de côtés respectivement $1, 1, 2, 3, 5$ formant un rectangle de côtés 5 et 8, etc.

Exercice (sur une relation notée par Lucas). Observer que les nombres de Fibonacci se retrouvent comme sommes de nombres situés sur des droites parallèles de pente convenable passant par les points du triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

Plus généralement (et plus « techniquement ») :

$$F_{k+1} = \binom{k}{0} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-2}{2} + \dots;$$

par exemple :

$$F_6 = 8 = 1 + 4 + 3 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2}.$$

Exercice, inspiré de [S—EIS]. Vérifier que

- F_{n+2} est le nombre de suites de zéros et de uns, de longueur n, sans paire de zéros consécutifs (par exemple, $F_5 = 5$ puisque ces suites pour $n = 3$ sont $111, 110, 101, 011, 010$) ;
- F_{n+2} est le nombre de sous—ensembles de $\{1, 2, \dots, n\}$ qui ne contiennent pas d'entiers consécutifs (par exemple $F_4 = 3$ puisque ces sous—ensembles pour $n = 2$ sont $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$) ;
- F_{n+1} est le nombre de pavages d'un rectangle de côtés n et 2 par des dominos de côtés 1 et 2.

[Pour en savoir davantage sur les pavages de rectangles par des dominos, voir [GrKP—89], en particulier les paragraphes 6.6 et 7.1. Nous ne résistons pas à l'envie de recommander également le paragraphe 7.3, où les auteurs calculent le nombre u_n de pavages par dominos d'un rectangle de côtés n et 3 (nombre qui est nul si n est impair) ; pour tout $n \geq 1$, le nombre u_{2n} est le plus petit entier supérieur à $\frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}}$.]

Au delà des mathématiques

Le nombre d'or apparaît traditionnellement en phyllotaxie, cette branche de la botanique qui étudie l'ordre dans lequel sont implantées les feuilles le long de la tige d'une plante, ou l'agencement des fleurons et écailles dans diverses fleurs et fruits (pomme de pin, tournesol, ananas, choux—fleur, ...). Certains auteurs font remonter l'étude théorique de ces arrangements à un article de 1837 des frères Bravais, l'un étant physicien et l'autre botaniste ; voir par exemple : le chapitre XIV de [Tho—42] (pages 912—933), [AGH], [DoCo—96] (et les quelques pages d'introduction à cet article, pages 135—143 de [Ste—95]), [JeBa—98] et [Phy].

Plus récemment, on trouve aussi le nombre d'or jouant un rôle crucial dans des travaux de physiciens concernant les quasicristaux (voir par exemple [Riv—86]) ou ... de cardiologues [GGM—03].

Le nombre d'or a également nourri les analyses, l'imagination et les fantasmes de divers auteurs intéressés par (l'histoire de) l'art, l'architecture, ou les proportions du corps humain (statues et individus vivants). Il en est résulté une immense littérature foisonnante à profusion. Ce qu'on y trouve va de la remarque éclairante aux rumeurs aussi coriaces que fantaisistes ; il semble par exemple que toute « découverte » du nombre d'or dans les proportions du Parthénon nécessite un aveuglement intellectuel, voire une tromperie militante. Détails, par exemple, dans [Del—04].

Il y a une notion de *nombre d'or* en astronomie, qui n'a « rien à voir » avec la notion discutée ci—dessus. Chaque année possède son nombre d'or, qui est un entier entre 1 et 19, et qui permet de situer les mois lunaires par rapport au calendrier usuel. Il se trouve qu'une période de 19 années est en bonne approximation un nombre entier de mois lunaires, plus précisément 19 années =235 mois lunaires = 6940 jours selon le calendrier du *cylce métonique* introduit à Athènes en 432 avant J.-C. et connu en Babylonie vers 490 avant J.-C. Le nombre d'or de l'année 2008 était 14, et celui de 2009 est 15 [**Wik**].

Mais il est bien sûr toujours dangereux de prétendre que deux choses « n'ont rien à voir » l'une avec l'autre, puisque la relation (1) apparaît dans un article (déjà cité) [**Ser—85**] qui plaide pour un point de vue géométrique sur l'approximation des nombres irrationnels par des rationnels.

Bibliographie

Certaines des références ci—dessous sont des textes de vulgarisation : [**CoGu—98**], [**Del—04**], [**Gar—77** [**Penx**], [**Phy**], [**Ste—95**] et [**Wik**]. Les autres références sont de niveau plus avancé.

[AGH] P. Atela, C. Godé et S. Hotton : *A dynamical system for plant pattern formation : a rigorous analysis*, J. Nonlinear Sci., 12, 2002, 641—676

[AlSh—03] J.-P. Allouche et J. Shallit : *Automatic sequences*, Cambridge University Press

[ArGS] P. Arnoux, S. Giabicani et A. Siegel : *Dynamique du nombre d'or*, en préparation

[Cas—65] J.W.S. Cassels : *Introduction to Diophantine approximation*, Cambridge University Press, 1965

[CoGu—98] J.H. Conway et R.K. Guy : *Le livre des nombres*, Eyrolles, 1998

[Cox—69] H.S.M. Coxeter : *Introduction to geometry, second edition*, John Wiley, 1969 (chap. 11, pages 160-172)

[CuFl—89] T.W. Cusick et M.E. Flahive : *The Markoff and Lagrange spectra*, Mathematical Surveys and Monographs 30, Amer. Math. Soc., 1989

[Dav—73] M. Davis : *Hilbert's tenth problem is unsolvable*, The American Mathematical Monthly, 80:3, March 1973, 233-269

[Del—04] J.-P. Delahaye : *Les inattendus des mathématiques*, Belin / Pour la Science, 2004

[DoCo—96] R. Douady et Y. Couder : *Phyllotaxis as a self organizing iterative process, Parts I & II*, J. Theor. Biol., 178, 1996, 255—294

[Eul—37] L. Euler : *De fractionibus continuis dissertatio*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 9, 1737, 98-137 (Opera omnia, series 1, volume 14, pages 187—215)

[Eul—65] L. Euler : *Observationes analyticae*, Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 11, 1765, 124—143 (Opera omnia, series 1, volume 15, pages 50—69)

[GGM—03] C.M. Gibson, W.J. Gibson, S.A. Murphy et autre auteurs : *Association of the Fibonacci cascade with the distribution of coronary artery lesions responsible for ST-segement elevation myocardial infarction*, The American Journal of Cardiology, 92, September 1, 2003, 595—597

[Gar—77] M. Gardner : *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American, December 1977, 110—121 (réimpression sous le titre *Penrose tiles,* in « The colossal book of mathematics, classic puzzles, paradoxes, and problems » , W.W. Norton & Company (2001) pages 73—93)

[GrKP—89] R.L. Graham, D.E. Knuth et O. Patashnik : *Concrete mathematics*, Addison—Wesley, 1989

[HaWr—79] G.H. Hardy et E.M. Wright : *An introduction to the theory of numbers, Fifth Edition*, Oxford, Clarendon Press, 1979

[Hur—91] A. Hurwitz : *Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche*, 1991, Mathematische Werke, Band II, Birkhäuser, 1963, pages 122—128

[JeBa—98] R.V. Jean et D. Barabé (éditeurs) : *Symmetry in plants*, World Scientific, 1998

[Kau—04] L. Kauffman : *Fibonacci form and beyond*, Forma, 19:4, 2004, 315—334. Voir aussi arXiv:math/0405048v1

[Lev—56] W.J. LeVeque : *Topics in number theory, Volume I*, Addison—Wesley, 1956

[Mat—00] Yu. Matiyasevich : *Hilbert's tenth problem : What was done and what is to be done*, in « Hilbert's tenth problem : Relations with arithmetic and algebraic geometry » , Ghent University, 1999, Contemporary Mathematics, 270, 2000, 1—47

[Mat—93] Yu. Matiyasevich : *Hilbert's tenth problem*, The MIT Press, 1993

[Niv—47] I. Niven : *A simple proof that π is irrational*, Bull. Amer. Math. Soc., 53, 1947, 509

[Niv—67] I. Niven : *Irrational numbers*, Carus Mathematical Monographs 11, 1967

[OsWa] A. Ostermann et G. Wanner : *Geometry by its history*, Springer, à paraître

[Pen] Pavage de Penrose

[Pen2] Penrose tilings

[Pen3] E. Hwang *Penrose tilings and quasicrystals*

[Phy] Phyllotaxis

[Rib—89] P. Ribenboim : *The book of prime number records, Second Edition*, Springer, 1989

[Rib—00] P. Ribenboim : *My numbers, my friends, popular lectures on number theory*, Springer, 2000

[Riv—86] N. Rivier : *A botanical quasicrystal*, Journal de Physique, Colloque C3, supplément au no 7, 47, juillet 1986, C3-299—C3-309

[S—EIS] N.J.A. Sloane : *The On—Line Encyclopedia of Integer Sequences*, published electronically, **http://www.research.att.com/~njas/s...**

[Ser—85] C. Series : *The geometry of Markoff numbers*, The Mathematical Intelligencer, 7:3, 1985, 20—29

[Ste—95] I. Stewart : *Nature's numbers, the unreal reality of mathematics*, BasicBooks, 1995

[Tho—42] D'Arcy W. Thompson : *Growth and form, Second Edition reprinted*, Cambridge University Press, 1942

[Vor—02] N. Vorobiev : *Fibonacci numbers*, Birkhaüser, 2002 [voir aussi, par exemple, la seconde partie de *Caractères de divisibilité. Suite de Fibonacci,* Traduction française, Editions Mir (1973)]

[Wik] Wikipedia : *Nombre d'or (astronomie)*

P.S. :

Je remercie Jean-Paul Allouche de plusieurs références et remarques utiles.

*Juste après la rédaction de ce texte, j'ai découvert [**ArGS**], qui contient (entre autres) des développements substantiels de plusieurs points abordés ci-dessus.*

Notes

[1] Un fib est un poème de 6 vers comptant 20 syllabes, les 6 vers ayant dans l'ordre 1, 1, 2, 3, 5 et 8 syllabes. Wikipédia mentionne l'existence de fibs en sanscrit remontant à plus de 2000 ans. Pour un site sur les fibs à la Fibonacci, voir celui de **Marc Lebel**.

[2] Il y a bien sûr d'autres définitions possibles, par exemple π est le rapport entre l'aire d'un disque et le carré de son rayon.

[3] Personne ne sait non plus montrer si, parmi les chiffres apparaissant comme décimales de π (ou de e), la proportion de 0 (ou de 1, ..., ou de 9) est bien 10%. Il serait facile de multiplier des questions de théorie des nombres qui sont très simples à formuler et dont personne ne connaît la réponse ; il est autrement difficile de formuler « les bonnes questions » .

Pour citer cet article : **Pierre de la Harpe**, **Le nombre d'or en mathématique**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/Le-nombre-d-or-en-mathematique.html`