Il existe beaucoup de résultats mathématiques très intéressants que l'on ne rencontre pas dans le cursus scolaire habituel. La formule de Pick en est un excellent exemple.

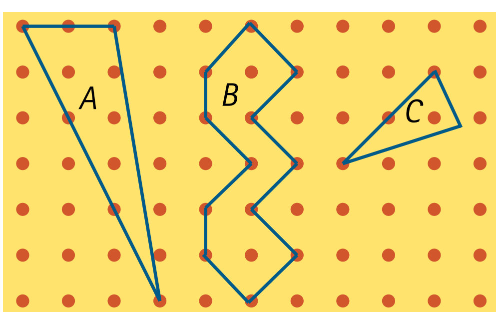
La formule de Pick

Isabelle Jalliffier-Verne, Marc Laforest
École Polytechnique
Montréal

Simple mais peu intuitif, la formule de Pick relie ensemble des quantités de nature complétement différentes. L'aire d'un objet, comme un carré ou un triangle à angle droit, est proportionnel au produit de la longueur de deux de ses côtés. Par opposition, la formule de Pick propose une manière de mesurer l'aire qui n'utilise aucune multiplication ! Le hic c'est que la formule ne s'appliquera qu'aux polygones dit simples. La question est donc, si on ne fait que des additions, qu'est-ce qu'on additionne au juste ?

Aire de polygones simples

Nous commençons avec une description précise de la formule de Pick. Considérons le treillis $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de points (x, y) dans le plan réel dont les coordonnées (x, y) sont entières. Un polygone est une figure géométrique plane formée de segments de droites qui ne se coupent pas et qui délimitent une région fermée. On dira qu'un polygone est simple si tous les segments de droite sur son contour relient des points du treillis $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Par exemple, sur la figure ci-dessous, les polygones *A* et *B* sont simples tandis que *C* ne l'est pas.

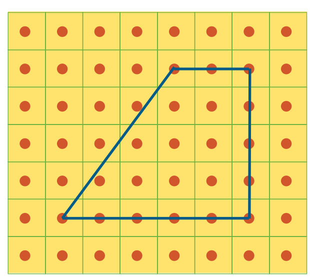


Théorème de Pick

Soit un polygone simple *P* dont *i* est le nombre de points de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ à l'intérieur du polygone et *b* le nombre de points de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sur le bord du polygone. Alors, l'aire A_P du polygone est :

$$A_P = i + \frac{b}{2} - 1$$

Bien que la formule de Pick soit a priori inhabituelle, on peut quand même proposer une première explication informelle. Si on suppose pour un moment que chaque point intérieur de *P* est loin du bord, alors autour de chaque point intérieur on pourra dessiner un petit carré d'aire 1 entièrement compris à l'intérieur du polygone. En gros, chaque point intérieur contribuera donc une unité d'aire à l'aire totale du polygone. En revanche, si un point est au bord du polygone et que ce bord est une droite horizontale ou verticale, alors cette droite coupera en deux le petit carré centré en ce point. Seulement la moitié du carré à l'intérieur du polygone pourra donc contribuer à l'aire totale du polygone : d'où la raison pour le facteur *b*/2 dans la formule de

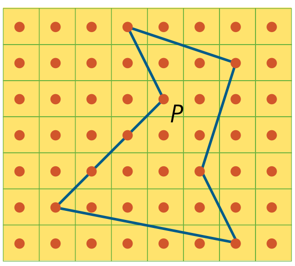


Pick. Ceci explique en partie la contribution de i et $b/2$ à l'aire d'un polygone simple, mais ceci est loin d'être une explication complète pour tous les polygones simples !

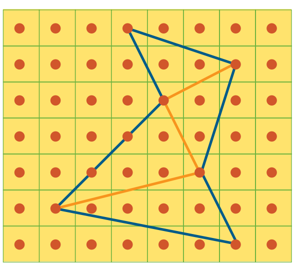
Décomposition des polygones

Comme bien des problèmes en géométrie, il est très difficile de démontrer quelque chose en étudiant des objets complexes. Bien souvent, un mathématicien ou une mathématicienne tente de simplifier son problème en démontrant qu'il est équivalent à un problème beaucoup plus simple. C'est ce que nous ferons en démontrant que si la formule de Pick est vraie pour un **triangle simple**, alors la formule doit aussi être vraie pour un **polygone simple**.

La première étape dans ce raisonnement est d'observer qu'il est possible de découper tout polygone simple Q en une famille de triangles simples[1]. À partir de cette décomposition, on peut donc reconstruire le polygone simple Q en commençant avec un triangle simple et en y rattachant, un par un, les autres triangles simples qui l'avoisinent. Conceptuellement, chaque étape de cette reconstruction sera le rattachement d'un triangle simple T à un polygone simple P.



Tout polygone se décompose en triangles.



1. *Ceci nous rappelle la très fameuse preuve (2006) de Gregory Perelman de la Conjecture de Poincaré (1900). Perelman a réussi à démontrer cette vieille conjecture en établissant que tout espace de dimension 3 peut s'écrire comme l'union de tétraèdres possédant l'une des 8 géométries élémentaires – dont les géométries eucledienne, sphérique et hyperbolique sont les mieux connues. Cette décomposition était connue sous le nom de la Conjecture de Géométrisation de Thurston (1982). La preuve de Perelman était un coup de force incroyable et la majorité des experts s'entendent pour dire que la preuve nécessitait beaucoup plus de nouvelles idées qu'ils avaient anticipé.*

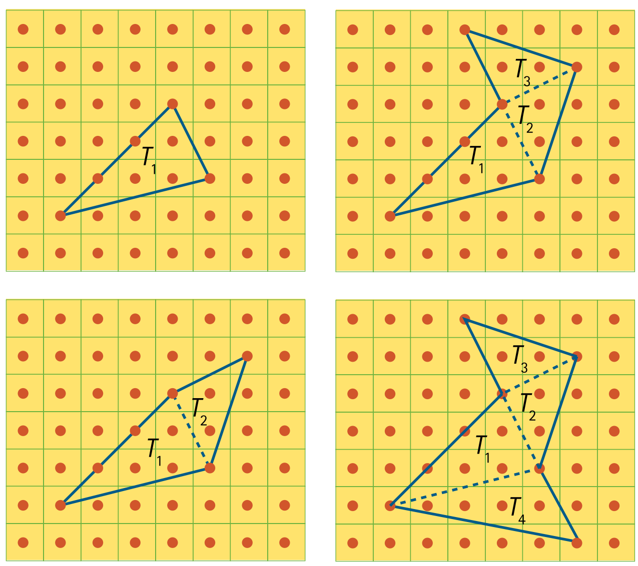
Étapes de la démonstration

On propose donc de vérifier la formule de Pick de la manière suivante :

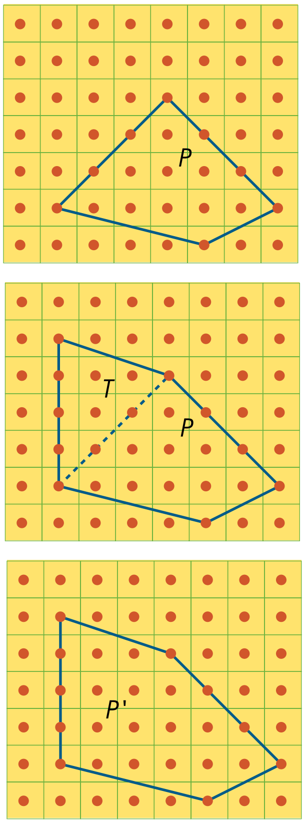
1. Démontrer que la formule de Pick est valide pour tous les triangles simples.
2. Démontrer que si la formule est valide pour un polygone simple P, alors elle le sera aussi pour le polygone simple $P' = P \cup T$.

Une fois que nous aurons démontré ces deux résultats, alors la partie 1 impliquera que la formule de Pick est valide pour le premier triangle simple dans la construction précédente de P, et la partie 2 impliquera que la formule est valide pour chaque polygone simple intermédiaire dans la construction de P, et en particulier pour P lui-même.

Nous verrons la preuve de la partie 1 dans un deuxième temps. Pour le moment, supposons que la démonstration de cette partie est faite et démontrons la deuxième.



Tout polygone simple est formé en joignant des triangles simples.



Ajout d'un triangle simple à un polygone simple $P' = P \cup T$.

Preuve de 2 :

les polygones simples

Soit un polygone simple P auquel on ajoute un triangle simple T pour obtenir $P' = P \cup T$. Le segment de droite partagé par P et T relie deux points sur le treillis et traverse, disons, k autres points. Ces autres points se retrouveront à l'intérieur du polygone simple P' et les points intérieurs de P' sont les points intérieurs de P et de T auxquels on ajoute les points de la frontière commune, soit

$$i_{P'} = i_P + i_T + k.$$

Déterminons le nombre de points sur le bord de P'. On additionne d'abord les points du bord de P et de T $(b_P + b_T)$. Ce faisant, on a compté deux fois les points aux extrémités du segment partagé $P \cap T$, il faut donc les soustraire $(b_P + b_T - 2)$. De plus, les k autres points du segment $P \cap T$, qui sont maintenant comptés comme des points intérieurs, apparaissent deux fois dans $b_P + b_T - 2$, puisqu'ils sont sur le bord à la fois du polygone et du triangle. Il faut donc les soustraire deux fois et le nombre de points sur le bord de P' est

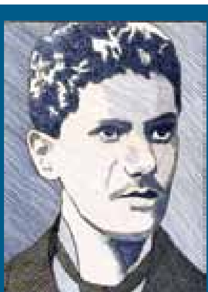
$$b_{P'} = b_P + b_T - 2 - 2k.$$

On vérifie maintenant que la formule de Pick est aussi valide pour P'.

La formule de Pick s'applique au polygone P'

$$\text{Aire}(P') = \text{Aire}(P) + \text{Aire}(T) = \left(i_P + \frac{b_P}{2} - 1\right) + \left(i_T + \frac{b_T}{2} - 1\right)$$

$$= (i_P + i_T + k) + \frac{1}{2}(b_P + b_T - 2 - 2k) - 1 = i_{P'} + \frac{b_{P'}}{2} - 1.$$



Georg Alexander Pick

(1859-1942)

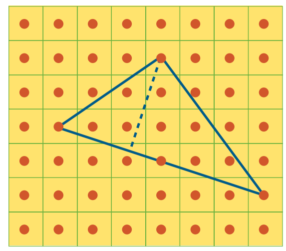
Le mathématicien autrichien Georg Alexander Pick a contribué de manière significative à la géométrie des variétés algébriques, selon la tradition de l'école italienne de géométrie algébrique.

Il a notamment participé à l'embauche de Albert Einstein à l'Université Allemande de Prague en 1911 et a initié Einstein à la géométrie différentielle qui a joué un rôle essentiel dans la théorie de la relativité générale d'Einstein (1915). Pick est décédé en 1942 dans le camp de concentration Theresienstadt.

Preuve de 1 :

autre stratégie de décomposition

Il ne nous reste plus qu'à démontrer la formule de Pick pour les triangles simples. Malheureusement, les triangles simples sont encore trop complexes et il serait préférable de s'attaquer à des objets géométriques encore plus simples !

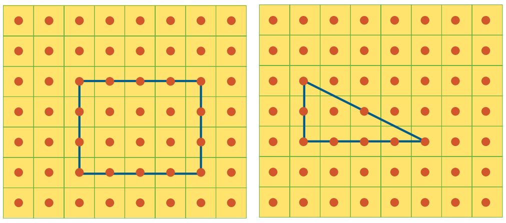


En abaissant la hauteur, on forme deux triangles rectangles qui ne sont pas simples car un des sommets n'est pas sur un point du treillis.

Comme auparavant, les triangles simples peuvent être obtenus à partir de rectangles simples et de triangles rectangles simples. La figure à la prochaine page illustre bien comment cette décomposition peut avoir lieu. Soit un triangle simple T quelconque, alors puisque les sommets de T doivent être sur le treillis, on peut donc tracer deux droites horizontales qui touchent la partie supérieure et inférieure du triangle, ainsi que deux droites verticales qui touchent le triangle à gauche et à droite. Les quatres droites définissent ainsi un rectangle simple R qui circonscrit le triangle simple T et le reste $R \backslash T$ est formé de soit 2 ou 3 triangles rectangles simples.

Cette décomposition nous permet donc de démontrer la partie 1, c'est-à-dire la formule de Pick pour les triangles simples, en procédant ainsi :

3. Démontrer que la formule de Pick est valide pour tous les rectangles simples.
4. Démontrer que la formule de Pick est valide pour tous les triangles rectangles simples.



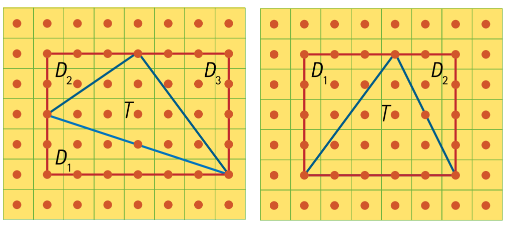
Un rectangle et un triangle rectangle simples.

5. Démontrer que 3 et 4 impliquent que la formule de Pick est valide pour tous les triangles simples.

Preuve de V :

les triangles simples

Prenant pour acquis la validité des énoncés 3 et 4, nous démontrerons maintenant 5 dans le cas particulier où le triangle simple T est circonscrit par un rectangle simple R et $R\backslash T$ est formé de trois triangles rectangles simples D_1, D_2 et D_3, comme pour le triangle à gauche de la figure suivante.



On considère qu'un triangle simple est obtenu en soustrayant d'un rectangle simple deux ou trois triangles rectangles simples.

Les nombres de points à l'intérieur et au bord de R et T sont identifiés par les indices R et T et les nombres associés aux triangles rectangles sont identifiés par les indices 1, 2 et 3. Chaque sommet de T est un nœud au bord de deux triangles rectangles et sur le bord du rectangle R. Quant au k nœuds sur le bord de T qui ne sont pas des sommets, chacun d'eux est sur le bord d'exactement un triangle rectangle tout en étant des nœuds intérieurs de R. Ces deux remarques impliquent les deux identités

$$b_R + b_T = b_1 + b_2 + b_3$$
$$i_R = i_T + i_1 + i_2 + i_3 + k.$$
$$b_T = k + 3$$

On en déduit donc que

La formule de Pick s'applique à un triangle simple

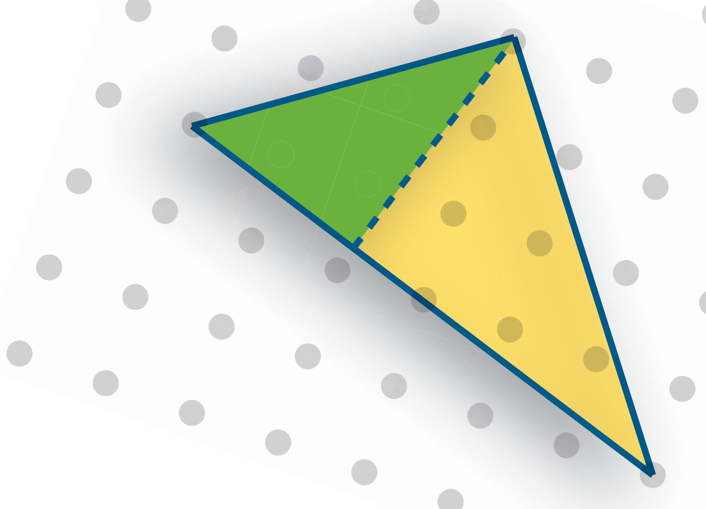
$$\begin{aligned}\text{Aire}(T) &= \text{Aire}(R) - \text{Aire}(D_1) - \text{Aire}(D_2) - \text{Aire}(D_3)\\ &= \left(i_R + \frac{b_R}{2} - 1\right) - \left(i_1 + \frac{b_1}{2} - 1\right) - \left(i_2 + \frac{b_2}{2} - 1\right) - \left(i_3 + \frac{b_3}{2} - 1\right)\\ &= \left((i_T + k) - \frac{(b_T - 6)}{2} - 1\right) = \left(i_T + \frac{2k + 6 - b_T}{2} - 1\right) = i_T + \frac{b_T}{2} - 1.\end{aligned}$$

Par conséquent, la formule de Pick est valide pour un triangle simple obtenu en retranchant trois triangles rectangles d'un rectangle comme dans l'illustration de gauche dans la figure précédente. La preuve est semblable pour les triangles simples comme celui de droite dans la figure précédente.

Conclusion

Nous avons expliqué comment une décomposition judicieuse de notre figure géométrique nous permet de réduire un problème complexe à l'analyse de figures géométriques plus simples. Maintenant, c'est au lecteur de compléter la preuve en étudiant les rectangles simples et les triangles rectangles simples ! Pouvez-vous trouver une décomposition d'un rectangle simple qui vous aidera à étudier les triangles rectangles simples ?

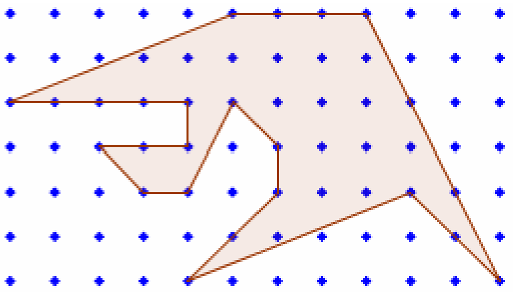
La démarche proposée n'est certainement pas la seule possible et nous invitons les étudiants ambitieux à chercher d'autres preuves, comme par exemple en tentant de formaliser l'explication vague mentionnée au tout début. Une analyse plus fine du résultat, permetterait aussi de faire apparaître la très célèbre formule d'Euler pour les graphes dans le plan ! Ces deux formules sont en fait de proches cousines. Il serait intéressant de savoir si la formule de Pick peut aussi s'appliquer aux polygones simples avec des trous.



Pick et Pick et Colégram

D'habitude, pour mesurer l'aire d'un polygone, on utilise des formules de la forme longueur × longueur (du genre "longueur du côté au carré" ou "petite base plus grande base fois hauteur divisé par 2"). C'est qu'une histoire d'analyse dimensionnelle : pour trouver une aire, c'est mieux de multiplier des longueurs. La formule de Pick, elle propose mieux : mesurer des aires sans avoir recours à des multiplications !

Pour ça, il faut considérer des polygones simples, du genre de celui-ci :

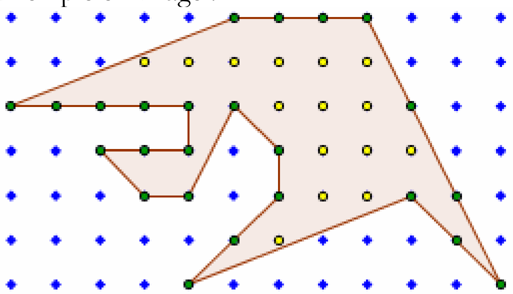


Un polygone simple

Ici, simple signifie que tous les sommets tombent pile-poil sur le quadrillage. Il faut aussi que le polygone ne soit pas "croisé". A partir de là, on compte le nombre n_{int} de points à l'intérieur du polygone, et n_{bd} le nombre de points sur le bord du polygone. Le théorème de Pick dit tout simplement que l'aire A du polygone est donné par la formule :

$$A = n_{\text{int}} + \frac{1}{2} n_{\text{bd}} - 1$$

Bref : on peut calculer une aire seulement en comptant les points. Exemple en image :



On a 15 points intérieurs (en jaune), 24 points sur le bord (en vert), ce qui donne une aire de 15+24/2-1 = 26 (unités carré).

C'est le moment parfait pour parler de la vie de Mr Pick, qui a établit ce théorème en 1899 : il s'appelle Georg, il est autrichien, il est né en 1859, il a appris la géométrie différentielle à Albert Einstein et il est mort en 1942 dans le camp de concentration de Theresienstadt.

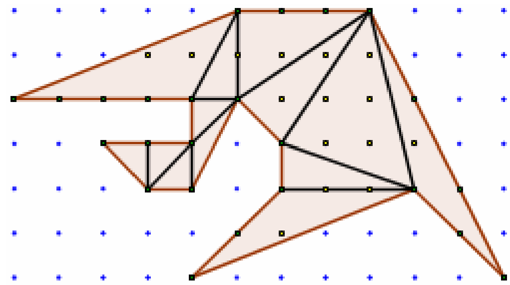
Démonstration !

On a de la chance, ce théorème n'est difficile ni contractuellement, ni dans sa démonstration (d'où sa présence sur ce blog, dans cette série de note sur les petits théorèmes de géométrie combinatoire) !

La démonstration repose sur deux faits essentiels :

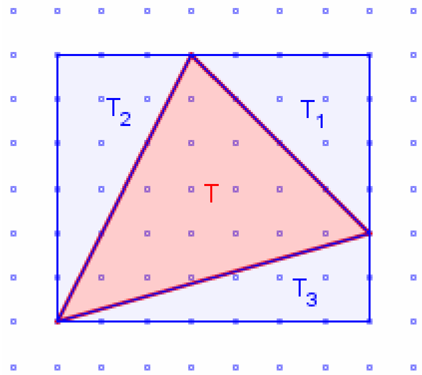
(1) le théorème est vrai sur les triangles
(2) si le théorème est vrai sur un polygone, il reste vrai quand on ajoute un triangle à ce polygone

Puisque tout polygone peut être découpé en plein de petits triangles (une triangulation, cf là), la récurrence montre que le théorème est tout à fait vrai.

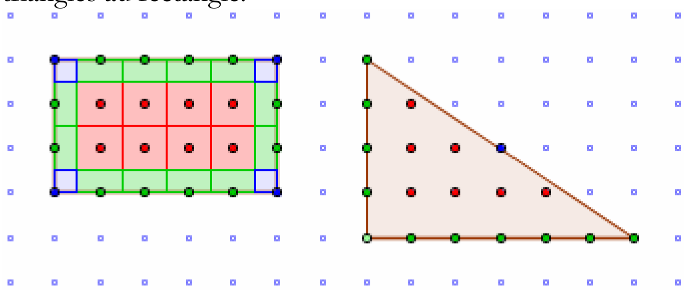


Une triangulation du polygone :
si on montre que le théorème est vrai sur les petits triangles et que la formule peut s'additionner, ça sera gagné

(1) Prenons un triangle simple : par une habile adjonction de triangles, on peut le transformer en rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes.



Il n'y a plus qu'à montrer que la formule est vraie sur les rectangles, sur les triangles rectangles, et quand on enlève les triangles au rectangle.



Pour le rectangle simple, on trouve

$$A_{rectangle} = n_{int} + (n_{bd}\text{-}4)/2 + 1$$

Pour le triangle rectangle simple, on trouve

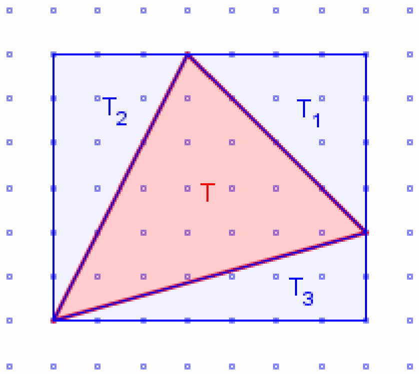
$$n_{bd} = 1 + m+n + k$$

Sur les rectangles, la formule est à peu près claire : les n_{int} points intérieurs (rouge) donnent chacun un carré unité, les (n_{bd}-4) points du bord (verts) donnent chacun un demi-carré unité, et les 4 points dans les coins (bleus) donnent chacun un quart d'unité, d'où $A_{rectangle} = n_{int}+(n_{bd}-4)/2+1 = n_{int}+n_{bd}/2-1$. Ca, c'était la façon intuitive de procéder.

Autre façon de faire, plus rapide : on suppose que c'est un rectangle m×n. On a alors $n_{int}=(m-1)(n-1)$ et $n_{bd}=2m+2n$. En développant $n_{int}+n_{bd}/2-1$, on trouve bien mn.

Pour le triangle rectangle, on utilise grosso-modo la même technique, en supposant que sa base est de longueur m et sa hauteur de longueur n. Ce qui est embêtant, c'est de savoir quels sont les points intérieurs du rectangle qui tombent sur la diagonale. Disons qu'il y en a k (sans compter les deux extrémités). Pour ce qui est des points sur le bord, on peut compter qu'il y en a **n_{bd}=1+m+n+k**. Les points à l'intérieur du triangle, c'est la moitié des points de l'intérieur du rectangle qui ne sont pas sur la diagonale, autrement dit, **n_{int} = [(m-1)(n-1)-k]/2**. Il n'y a plus qu'à développer $n_{int}+n_{bd}/2-1$ pour trouver mn/2.

La dernière étape, c'est de montrer que la formule est valable par soustraction.



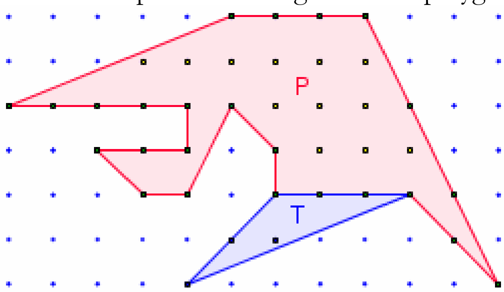
On a donc encadré notre triangle T par trois autres triangles T_1, T_2 et T_3, pour former le rectangle R. On va appeler i, i_1, i_2, i_3 et i_R le nombre de points intérieurs à T, T_1, T_2, T_3 et R, et on appelle b, b_1, b_2, b_3 et b_R les points des bords. Il nous faut vérifier Aire(T) = i+b/2-1.

Premier chose à dire : il y a autant de points sur les bords de T_1, T_2 et T_3 qu'il y en a sur les bords de T et R, ce qui donne **$b+b_R=b_1+b_2+b_3$**.

Deuxième chose à dire : les points intérieurs de R, c'est les points intérieurs de tous les triangles présents, plus ceux sur les bords de T sans être au sommet (il y en a b-3). Autrement dit : **$i_R = i_1+i_2+i_3+i + (b-3)$**.

La formule **$A(T)$=Aire(R)-Aire(T_1)-Aire(T_2)-Aire(T_3)**, après application des formules de Pick vus dans le cas particulier des rectangles et des triangles rectangles et des deux égalités juste au-dessus permettent de conclure...

(2) Bref, la formule de Pick est vraie sur tous les triangles... La plus grosse étape de la récurrence est passée, (l'initialisation) il n'y a plus qu'à montrer l'hérédité. On suppose donc que le polygone Q sur qui on veut démontrer la formule est découpé en un triangle T et un polygone P :



On suppose que la formule est vraie sur le polygone P : **Aire(P) = $i_P+b_P/2-1$**

La formule est vraie aussi sur le triangle : **Aire(T) = $i_T+b_T/2-1$**

On va appeler k le nombre de points intérieurs sur lequel passe le segment séparateur, ce qu permet de trouver une formule pour le nombre de points intérieurs à Q, **$i_Q=i_P+i_T+k$**. Puisque ces k points ne sont pas sur le bord de Q, et que deux points sont comptés deux fois, on trouve que **$b_Q=b_T-k + b_P-k - 2$** ($=b_T+b_P-2k - 2$).

On termine en développant **Aire(Q)=Aire(T)+Aire(P)** :

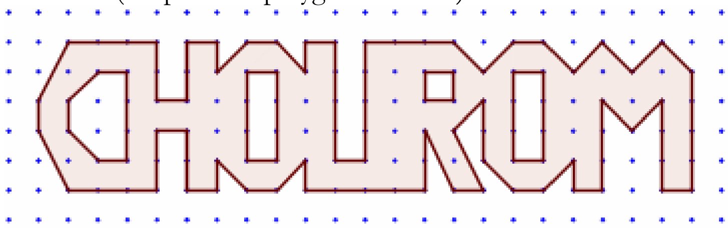
Aire(Q) = Aire(T) + Aire(P)
= $i_T+b_T/2-1 + i_P+b_P/2-1$
= $[i_P+i_T+k]$ + []/2 -1
= $i_Q+b_Q/2-1$

Fin de la démonstration : la formule de Pick est indubitablement vraie sur n'importe quel polygone simple !

Généralisations ?

Comme toujours, un théorème aussi cool ne peut pas rester sans être généralisé !

D'abord, il y a la généralisation aux polygones (simples) avec des trous (simplement polygonaux aussi) :



S'il y a n trous, la formule devient tout simplement :

$$A = n_{\text{int}} + \frac{1}{2} n_{\text{bd}} - 1 + n$$

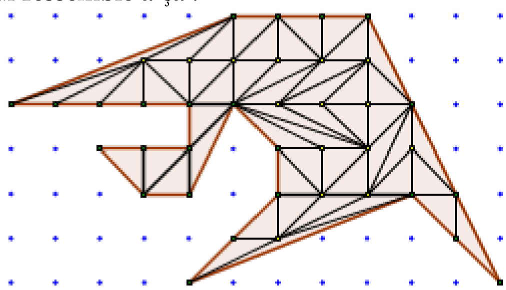
Dans le cas présent, puisqu'il y a 4 trous, 16 points intérieurs et 110 points sur le bord (si j'ai bien compté), on peut dire que l'aire du polygone est de... 74 !

Et une généralisation en 3 dimensions, pour les polyèdres ? On en 4 dimension, ou plus ? On aimerait bien, mais... non... Et on peut même le prouver ! Il suffit de regarder les tétraèdres de Reeve, dont les sommets sont (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) et (1,1,n), où n est entier. Quand on change la valeur de n, on change le volume du polyèdre ; par contre, il y aura toujours seulement 4 points sur le bord, et 0 points à l'intérieur...

Une autre démonstration !

La démonstration était sympa, mais un peu longue, quand même... On peut le démontrer bien plus rapidement, en utilisant la formule d'Euler ! (Celle qui dit que sur un graphe planaire, si on appelle s le nombre de sommets, a le nombre d'arrêtes et f le nombre de faces (en comptant la face formé par l'extérieur), on a l'égalité **f-a+s=2**)

Bref. Partageons le polygone en plein de petits triangles qui utilisent tous les points du réseau. Ca peut donner quelque chose qui ressemble à ça :



Cette triangulation fait apparaître f-1 petits triangles, chacun d'aire 1/2. D'où **Aire(Q)=(f-1)/2**.

Les sommets du graphe, c'est l'ensemble des points intérieurs et des points du bord : **$s=n_{bd}+n_{int}$** .

Chacun des f-1 triangles possède 3 arrêtes ; chacun des a_{int} arrêtes intérieures bordent 2 triangles, et chacune des a_{bd} arrêtes du bord n'en borde qu'un seul. Autrement dit, $3(f-1)=2a_{int} + a_{bd}$. (et donc, **$f=3-2(a-f)-a_{bd}$** (*))

D'un autre côté, on peut voir qu'il y a autant d'arêtes sur le bords que de points sur le bords : $a_{bd}=n_{bd}$

Il n'y a plus qu'à mélanger toutes les égalités en gras : en appliquant Euler sur (*), on trouve

$f = 3 - 2(s-2) - a_{bd}$
$= 3 - 2(n_{bd}+n_{int}-2) - n_{bd}$
$= 2\, n_{int} + n_{bd} -1$

Et, finalement, Aire(Q) = (f-1)/2 = $n_{int} + n_{bd}/2 -1$...