ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE - Partie D

Un théorème de Pólya sur les polynômes

Temps de préparation : ……………………………..…………. 2 h
Temps de présentation devant les examinateurs : ………….. 10 minutes
Entretien avec les examinateurs : …………………………... 10 minutes
Commentaire sur l'épreuve après le passage : ……………… 10 minutes

Vous devez vous présenter en L101 au bout des 2h de préparation. Le trajet jusqu'à la salle est inclus dans les 2h ! Veuillez respecter l'heure précise et non la sonnerie.

GUIDE POUR L'ETUDE DU DOSSIER :

Le dossier ci-joint comporte au total : 6 pages.

Document (6 pages, dont celle-ci) *: Un théorème de Pólya sur le polynômes,* extrait du chapitre 18 de « Raisonnements divins : Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes » de Martin Aigner et Gunter M. Ziegler.

Consacrer un transparent au plan de l'exposé. Un ou deux autres transparents peuvent être utiles pour présenter des figures, des schémas ou calculs nécessaires à l'exposé.

L'exposé doit comporter une introduction et une conclusion.

Attention ! Dix minutes, c'est **très court** !

Travail **suggéré** :

Lire le texte et en dégager une synthèse.
Il est suggéré de ne pas faire une présentation linéaire du texte, mais de mener l'étude en la structurant autour des phénomènes que vous voulez particulièrement développer.
L'exposé ne doit pas comporter de démonstration complète, mais si un théorème est énoncé l'intégralité de la structure de la démonstration doit être exposée. On pourra garder du temps pendant les questions pour développer des points particulièrement techniques.
Réserver le tableau pour les questions : il est préférable de ne pas l'utiliser pendant l'exposé.

CONSEILS GENERAUX POUR LA PREPARATION DE L'EPREUVE :
* Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable (maximum 20 minutes).
* Réservez du temps pour préparer l'exposé devant les examinateurs.
* Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper …
* En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, *etc.*) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêt(e) à débuter votre exposé.
* Les transparents doivent être clairs, colorés et non surchargés.
* Il est préférable d'écrire une conclusion : les conclusions improvisées sont le plus souvent ratées.

Un théorème de Pólya sur les polynômes

Chapitre 17

Parmi les nombreuses contributions de Pólya à l'analyse, le résultat suivant a toujours été celui que préférait Erdős, à la fois pour son contenu surprenant et pour la beauté de sa preuve. Soit :

$$f(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_0$$

un polynôme complexe de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant 1. Associons à $f(z)$ l'ensemble :

$$\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq 2\}$$

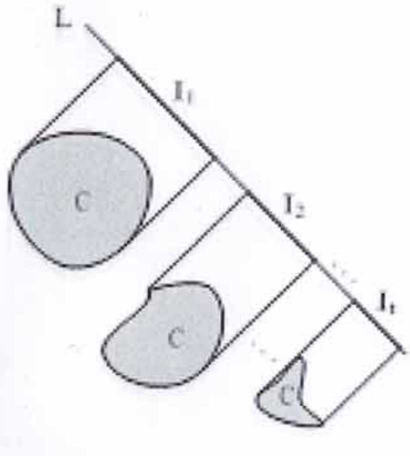
c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points qui sont envoyés par f dans le disque de rayon 2 et de centre l'origine du plan complexe. Si $n = 1$, le domaine $\mathcal{C}$ est tout simplement un disque de diamètre 4.

Par un argument étonnamment simple, Pólya a découvert que cet ensemble $\mathcal{C}$ possède la belle propriété suivante :

> *Prenons une droite quelconque L du plan complexe et considérons la projection orthogonale $\mathcal{C}_L$ de l'ensemble $\mathcal{C}$ sur L. Alors, la longueur totale d'une telle projection n'excède jamais 4.*

Que signifie le fait que la longueur totale de la projection $\mathcal{C}_L$ est au plus 4 ? Nous allons voir que $\mathcal{C}_L$ *est une réunion finie d'intervalles disjoints* $I_1, \ldots, I_t$, et la condition signifie que $\ell(I_1) + \ldots + \ell(I_t) \leq 4$, où $\ell(I_j)$ est la longueur habituelle d'un intervalle.

Quitte à faire une rotation du plan, il suffit de considérer le cas où L est l'axe réel du plan complexe. Avec ces remarques à l'esprit, énonçons le résultat de Pólya.

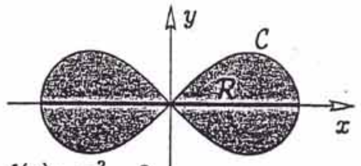


Théorème 1. *Soit $f(z)$ un polynôme complexe de degré au moins égal à 1 et de coefficient dominant 1. Soit $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq 2\}$ et $\mathcal{R}$ la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur l'axe réel. Alors, il existe des intervalles $I_1, \ldots, I_t$ de la droite réelle dont la réunion recouvre $\mathcal{R}$ et vérifiant :*

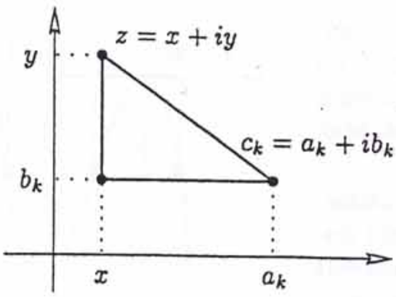
$$\ell(I_1) + \ldots + \ell(I_t) \leq 4$$

Il est clair que la borne 4 du théorème est atteinte pour $n = 1$. Pour mieux nous imprégner du problème, examinons le polynôme $f(z) = z^2 - 2$, qui atteint lui aussi la borne 4. Si $z = x + iy$ est un nombre complexe, alors x est sa projection orthogonale sur la droite réelle. Ainsi :

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} : x + iy \in \mathcal{C} \text{ pour un certain } y\}$$



$f(z) = z^2 - 2$



Le lecteur peut facilement montrer que si $f(z) = z^2 - 2$, on a : $x + iy \in C$ si et seulement si :

$$(x^2 + y^2)^2 \le 4(x^2 - y^2)$$

Par suite, $x^4 \le (x^2 + y^2)^2 \le 4x^2$, et donc : $x^2 \le 4$, c'est-à-dire $|x| \le 2$. D'autre part, tout $z = x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \le 2$ vérifie : $|z^2 - 2| \le 2$, et on voit que $\mathcal{R}$ est précisément l'intervalle $[-2, 2]$ de longueur 4.

Une première étape vers la preuve consiste à écrire $f(z)$ sous la forme $f(z) = (z - c_1) \cdots (z - c_n)$ avec $c_k = a_k + ib_k$, et à considérer le polynôme *réel* $p(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$. Soit $z = x + iy \in C$. Alors le théorème de Pythagore implique que :

$$|x - a_k|^2 + |y - b_k|^2 = |z - c_k|^2$$

et donc $|x - a_k| \le |z - c_k|$ pour tout k, c'est-à-dire :

$$|p(x)| = |x - a_1| \cdots |x - a_n| \le |z - c_1| \cdots |z - c_n| = |f(z)| \le 2$$

Ainsi, $\mathcal{R}$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \le 2\}$. Si nous pouvons montrer que ce dernier ensemble est recouvert par des intervalles de longueur totale au plus égale à 4, nous aurons terminé. Notre principal théorème 1 sera donc une conséquence du résultat suivant.

Théorème 2. *Soit $p(x)$ un polynôme réel de degré $n \ge 1$ et de coefficient dominant 1, dont toutes les racines sont réelles.*

Alors l'ensemble $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \le 2\}$ peut être recouvert par des intervalles de longueur totale au plus égale à 4.

Comme Pólya le montre dans son article [2], le théorème 2 est à son tour une conséquence du célèbre résultat suivant dû à Chebyshev. Pour que ce chapitre soit autonome, nous en proposons une preuve en appendice (en nous inspirant du bel exposé de Pólya et Szegö).

Théorème de Chebyshev.
Soit $p(x)$ un polynôme réel de degré $n \ge 1$ et de coefficient dominant 1. Alors :

$$\max_{-1 \le x \le 1} |p(x)| \ge \frac{1}{2^{n-1}}$$

Notons tout d'abord la conséquence immédiate suivante :

Corollaire. *Soit $p(x)$ un polynôme réel de degré $n \ge 1$ et de coefficient dominant 1. Supposons que $|p(x)| \le 2$ pour tout x de l'intervalle $[a, b]$. Alors : $b - a \le 4$.*

■ **Preuve.** Considérons la transformation $y = \frac{2}{b-a}(x - a) - 1$. Elle envoie l'intervalle $[a, b]$ de l'axe des x sur l'intervalle $[-1, 1]$ de l'axe des y. Le polynôme correspondant :

$$q(y) = p\left(\tfrac{b-a}{2}(y + 1) + a\right)$$

a pour coefficient dominant $(\frac{b-a}{2})^n$ et vérifie :

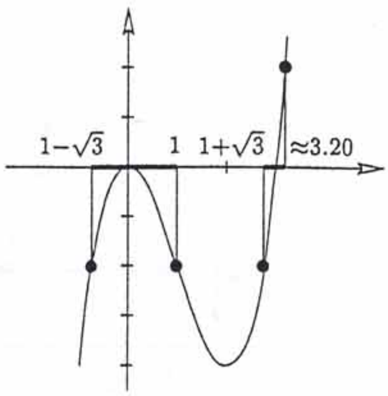
$$\max_{-1\le y\le 1} |q(y)| = \max_{a\le x\le b} |p(x)|$$

Le théorème de Chebyshev implique :

$$2 \ge \max_{a\le x\le b} |p(x)| \ge (\tfrac{b-a}{2})^n \tfrac{1}{2^{n-1}} = 2(\tfrac{b-a}{4})^n$$

et donc : $b - a \le 4$, comme nous le souhaitions. $\square$

Ce corollaire nous rapproche beaucoup de l'énoncé du théorème 2. Si l'ensemble $\mathcal{P} = \{x : |p(x)| \le 2\}$ est un *intervalle*, alors la longueur de $\mathcal{P}$ est au plus 4. Cependant, l'ensemble $\mathcal{P}$ peut ne pas être un intervalle, comme dans l'exemple représenté sur la figure ci-contre, où $\mathcal{P}$ est constitué de deux intervalles.



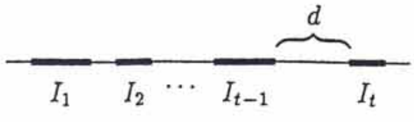
Pour le polynôme $p(x) = x^2(x-3)$ nous obtenons : $\mathcal{P} = [1-\sqrt{3}, 1] \cup [1+\sqrt{3}, \approx 3.2]$.

Que pouvons nous dire sur $\mathcal{P}$? Puisque $p(x)$ est une fonction continue, nous savons en tout cas que $\mathcal{P}$ est la réunion d'intervalles fermés disjoints $I_1, I_2, \ldots$, et que $p(x)$ prend la valeur 2 ou -2 à chaque extrémité de l'intervalle I_j. Cela implique qu'il n'y a qu'un nombre fini d'intervalles $I_1, \ldots, I_t$, puisque $p(x)$ ne peut prendre la même valeur qu'un nombre fini de fois.

L'idée prodigieuse de Pólya a été de construire un autre polynôme $\tilde{p}(x)$ de degré n, dont le coefficient dominant est 1, tel que $\widetilde{\mathcal{P}} = \{x : |\tilde{p}(x)| \le 2\}$ soit un *intervalle* de longueur au moins égale à $\ell(I_1) + \ldots + \ell(I_t)$. Le corollaire implique alors que : $\ell(I_1) + \ldots + \ell(I_t) \le \ell(\widetilde{\mathcal{P}}) \le 4$, et l'on a terminé.

■ **Preuve du théorème 2.** Considérons $p(x) = (x - a_1)\cdots(x - a_n)$ et $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \le 2\} = I_1 \cup \ldots \cup I_t$. Nous avons rangé les intervalles I_j de façon telle que I_1 soit l'intervalle qui se trouve le plus à gauche, et I_t le plus à droite. Nous affirmons d'abord que tout intervalle I_j contient une racine de $p(x)$. En effet, nous savons que $p(x)$ prend les valeurs 2 ou -2 aux extrémités de I_j. Si une valeur est 2 et l'autre -2, alors il existe certainement une racine dans I_j. Supposons donc que $p(x) = 2$ aux deux extrémités à la fois (le cas -2 étant analogue). Supposons que $b \in I_j$ soit un point tel que $p(x)$ atteigne son minimum dans I_j. Alors : $p'(b) = 0$ et $p''(b) \ge 0$. Si $p''(b) = 0$, alors b est une racine multiple de $p'(x)$, et donc une racine de $p(x)$ d'après le résultat 1 de l'encadré. D'autre part, si $p''(b) > 0$, alors $p(b) \le 0$ d'après le résultat 2 du même encadré. Ainsi, lorsque $p(b) = 0$, nous avons notre racine, et lorsque $p(b) < 0$, nous obtenons une racine dans l'intervalle qui s'étend de b à l'une des extrémités de I_j.

Voici l'idée finale de la preuve : Soit $I_1, \ldots, I_t$ les intervalles précédents. Supposons que l'intervalle qui se trouve le plus à droite I_t contienne m racines de $p(x)$, comptées avec leur multiplicité. Si $m = n$, alors I_t est le seul intervalle (d'après ce que nous venons de montrer), et la démonstration est terminée. Supposons donc $m < n$, et soit d la distance entre I_{t-1} et I_t comme l'indique la figure. Soit $b_1, \ldots, b_m$ les racines de $p(x)$



qui appartiennent à I_t et $c_1, \ldots c_{n-m}$ les racines restantes. Écrivons $p(x) = q(x)r(x)$ avec $q(x) = (x-b_1)\cdots(x-b_m)$, $r(x) = (x-c_1)\cdots(x-c_{n-m})$, et posons $p_1(x) = q(x+d)r(x)$. Le polynôme $p_1(x)$ est à nouveau de degré n et de coefficient dominant 1. Pour $x \in I_1 \cup \ldots \cup I_{t-1}$, nous avons : $|x+d-b_i| < |x-b_i|$ pour tout i, et donc $|q(x+d)| < |q(x)|$. Par suite :

$$|p_1(x)| \leq |p(x)| \leq 2 \qquad \text{si } x \in I_1 \cup \ldots \cup I_{t-1}$$

Deux résultats sur les polynômes à racines réelles

Soit $p(x)$ un polynôme non constant n'ayant que des racines réelles.

Fait 1. *Si b est une racine multiple de $p'(x)$, alors b est aussi une racine de $p(x)$.*

■ **Preuve.** Soient $b_1, \ldots, b_r$ les racines de $p(x)$ de multiplicités $s_1, \ldots, s_r$, $\sum_{j=1}^r s_j = n$. De $p(x) = (x-b_j)^{s_j} h(x)$ on déduit que b_j est une racine de $p'(x)$ si $s_j \geq 2$ et que la multiplicité de b_j dans $p'(x)$ est $s_j - 1$. En outre, il y a une racine de $p'(x)$ entre b_1 et b_2, une autre racine entre b_2 et b_3, ..., et une entre b_{r-1} et b_r. Toutes ces racines doivent être des racines *simples*, puisque $\sum_{j=1}^r (s_j - 1) + (r-1)$ atteint déjà le degré $n-1$ de $p'(x)$. En conséquence, les racines *multiples* de $p'(x)$ ne peuvent se trouver que parmi les racines de $p(x)$. □

Fait 2. *On a $p'(x)^2 \geq p(x)p''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$*

■ **Preuve.** Si $x = a_i$ est une racine de p, alors il n'y a rien à montrer. Supposons que x ne soit pas une racine de p. La formule de dérivation d'un produit implique :

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(x)}{x - a_k}$$

$$p''(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \frac{p(x)}{(x-a_k)(x-a_\ell)} = 2p(x) \sum_{\{k,\ell\}} \frac{1}{(x-a_k)(x-a_\ell)}$$

où $\{k,\ell\}$ parcourt toutes les paires $\{k,\ell\} \subseteq \{1,\ldots,n\}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} p'(x)^2 &= p(x)^2 \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-a_k}\Big)^2 \\ &> 2p(x)^2 \sum_{\{k,\ell\}} \frac{1}{(x-a_k)(x-a_\ell)} = p(x)p''(x) \end{aligned}$$

□

D'autre part, si $x \in I_t$, on voit qu'alors $|r(x-d)| \leq |r(x)|$ et donc :

$$|p_1(x-d)| \quad = \quad |q(x)||r(x-d)| \quad \leq \quad |p(x)| \quad \leq \quad 2$$

ce qui signifie que $I_t - d \subseteq \mathcal{P}_1 = \{x : |p_1(x)| \leq 2\}$.
En résumé, nous voyons que $\mathcal{P}_1$ contient $I_1 \cup \ldots \cup I_{t-1} \cup (I_t - d)$ et que sa longueur totale est donc supérieure ou égale à celle de $\mathcal{P}$. Remarquons maintenant qu'avec le passage de $p(x)$ à $p_1(x)$ les intervalles I_{t-1} et $I_t - d$ se confondent en un seul intervalle. Ainsi, les intervalles $J_1, \ldots, J_s$ de $p_1(x)$ formant $\mathcal{P}_1$ ont une longueur totale supérieure ou égale à $\ell(I_1) + \ldots + \ell(I_t)$, et que l'intervalle le plus à droite J_s contient plus de m racines de $p_1(x)$. En répétant cette procédure au plus $t-1$ fois, nous obtenons finalement un polynôme $\tilde{p}(x)$ où $\widetilde{\mathcal{P}} = \{x : |\tilde{p}(x)| \leq 2\}$ est un intervalle de longueur $\ell(\widetilde{\mathcal{P}}) \geq \ell(I_1) + \ldots + \ell(I_t)$. La preuve est terminée. $\square$