

# ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE - Partie D

## TITRE :

LE THÉORÈME DE SARKOVSKII

Temps de préparation : .....2 h 15 minutes  
Temps de présentation : ..... 10 minutes  
Entretien : ..... 10 minutes

## GUIDE POUR LES CANDIDAT(E)S :

Le dossier ci-joint comporte au total : 8 pages (dont celle-ci).

Document : ce texte de Jean-Yves Briend est paru dans le Journal de maths des élèves (de l'ENS Lyon) en 1995. Ce texte est consacré à la démonstration d'un théorème datant de 1964 visant à l'étude des itérées de fonctions continues sur un segment.

## **TRAVAIL SUGGÉRÉ :**

Lire ensuite rapidement le texte principal et en dégager une synthèse. Il est suggéré de ne pas faire une présentation linéaire du texte, mais de mettre l'accent sur certains résultats et d'en dégager un aperçu de la démonstration.

L'exposé devra comporter une démonstration, mais pas obligatoirement deux! Il est conseillé de d'abord s'attacher à comprendre la problématique et le schéma d'ensemble de la démonstration avant de plonger dans la technique proprement dite.

## **CONSEILS GÉNÉRAUX POUR LA PRÉPARATION DE L'ÉPREUVE :**

- \* Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable (maximum 30 minutes).
- \* Réservez du temps pour préparer l'exposé.
- \* Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper ...
- \* En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, etc.) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêt(e) à débiter votre exposé.

## LE THÉORÈME DE ŠARKOVSKIĀ

Jean-Yves Briend

### Travaux pratiques

Au pays des publications mathématiques, il est rare de commencer un article par une section bricolage. C'est pourtant ce que nous allons faire en vous proposant de réaliser vous-mêmes un montage facile et peu onéreux. Tout d'abord, il vous faut vous procurer deux récipients cylindriques, de même hauteur mais l'un de volume huit fois plus grand que l'autre. Placez alors le plus petit au centre du plus grand de manière à confondre leurs axes. On a ainsi réalisé un récipient annulaire. Voir la figure 1.

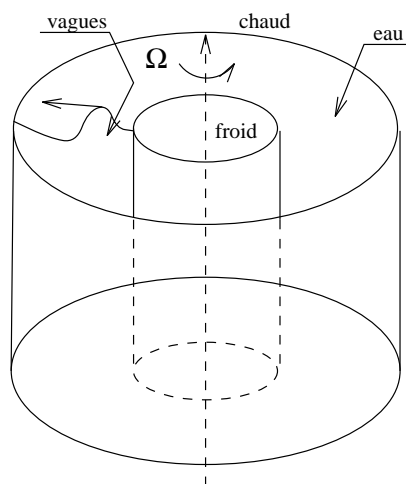


Figure 1: L'expérience de Lorentz

Une fois ce contenant réalisé, on peut le remplir d'eau et faire tourner le tout suivant son axe, mis vertical, sur un tourne-disque en position 78 tours par minutes. Il ne vous reste plus qu'à imposer entre le centre et la périphérie une forte différence de température, le tout continuant de tourner. Vous obtenez ainsi l'expérience réalisée par Lorentz dans les années 60 (voir [1]–[3]) dans son étude des phénomènes météorologiques. Si vous avez beaucoup de chance, vous observerez comme lui que des vagues d'aspect évoluant sans loi apparente se forment à un bord du récipient pour aller mourir sur l'autre. Lorentz ne se laissa pas impressionner par cet état de fait semble-t-il impénétrable à toute mise en loi et effectua des manipulations numériques sur les équations du système. Il

trouva alors pour l'évolution des vagues le modèle suivant : l'énergie cinétique maximale  $K_{n+1}$  de la  $(n+1)$ -ème vague est fonction de celle de la précédente sous la forme

$$K_{n+1} = f(K_n)$$

où  $f$  est une application continue donnée de l'intervalle  $[0, 450]$  dans lui-même. Ainsi Lorentz fut amené à étudier l'itération de la fonction  $f$ , c'est-à-dire à comprendre le comportement des orbites des points  $x$  de l'intervalle, définies par

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x), n \geq 0\}$$

où  $f^0 = id$  et  $f^n = f^{n-1} \circ f$  est la  $n$ -ième itérée de  $f$ . On se retrouve donc en partant de deux boîtes de choucroute à commencer l'étude des *systèmes dynamiques en dimension 1*, théorie qui connaît depuis deux décennies des développements considérables. Dans cet article, nous allons donner la démonstration d'un théorème dû à ŠarkovskiĀ en 1964 (voir [4]) qui a le mérite d'être tout à la fois simple à énoncer, d'avoir une démonstration s'appuyant sur des outils élémentaires, et cependant d'être un résultat profond et très plaisant.

### Enoncés des résultats

En 1975, Li et Yorke (voir [5]) publient un article qui allait avoir un certain retentissement, sous le titre accrocheur de « Période 3 Implique Chaos ». En fait, leur résultat était un corollaire du théorème général de ŠarkovskiĀ cité plus haut, et que nous nous proposons de montrer ici.

**THÉORÈME 1 (PÉRIODE 3 IMPLIQUE CHAOS).** *Si  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une application continue ayant un point périodique de période 3, alors elle a des points périodiques de toutes périodes.*

Dans la suite, on notera  $I = [0, 1]$  et on considérera une application continue  $f : I \rightarrow I$ . En général, si  $A \subseteq I$ , on notera  $fA = f(A)$  l'image de  $A$  par  $f$ .

**DÉFINITION 1.** *Un point  $x \in I$  est dit périodique de période  $n > 1$  si  $f^n x = x$  et  $f^i x \neq x$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ . On dit que  $f$  est un point fixe si  $fx = x$ .*

Ainsi quand un point est périodique, son orbite est finie mais en plus  $f$  agit sur celle-ci bijectivement, comme un cycle.

Nous pouvons maintenant passer à l'énoncé général du théorème de ŠarkovskiĀ. Pour cela, nous avons besoin de définir un ordre spécial sur l'ensemble  $\mathbf{N}^*$  des nombres entiers strictement positifs.

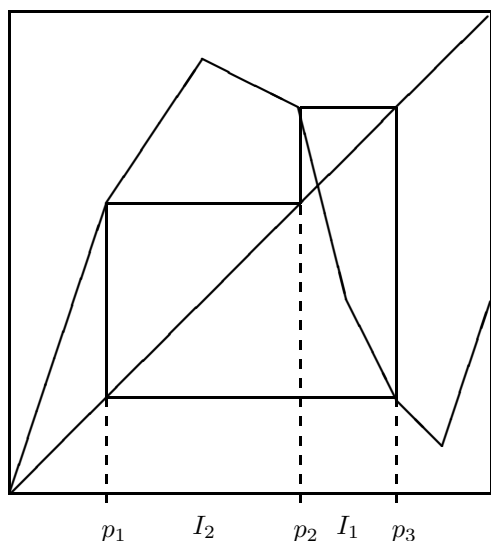


Figure 2: Le point  $p_1$  est de période 3

DÉFINITION 2. On appelle ordre de Šarkovskii sur  $\mathbf{N}^*$  l'ordre  $\succ$  défini comme suit :

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \dots \succ 2.3 \succ 2.5 \succ 2.7 \succ \dots \succ 2^n.3 \succ 2^n.5 \succ \dots \succ 2^{n+1}.3 \succ 2^{n+1}.5 \succ \dots \succ 2^n \succ 2^{n-1} \succ \dots \succ 4 \succ 2 \succ 1$$

et c'est un ordre total.

THÉORÈME 2 (ŠARKOVSKIĪ). Soit  $f : I \rightarrow I$  une application continue ayant un point périodique de période  $n$ . Alors pour tout  $m$  vérifiant  $n \succ m$ ,  $f$  admet un point périodique de période  $m$ .

Le premier théorème est donc conséquence immédiate de ce dernier.

**Un lemme facile**

Dans la suite on se donne une application continue  $f$  de  $I$  dans lui-même. Commençons par faire une remarque cruciale pour la suite, et dont la démonstration est laissée en exercice. Supposons qu'il existe dans  $I$  deux intervalles fermés  $J_0$  et  $J_1$  tels que  $f(J_0) \supseteq J_1$ . Alors il existe un intervalle  $J'_0 \subseteq J_0$  tel que  $f(J'_0) = J_1$ . Ce résultat acquis, nous pouvons énoncer le lemme 1, à la base de toute la démonstration du théorème de Šarkovskii.

LEMME 1. On a les résultats suivants :

1. soit  $J \subseteq I$  un sous-intervalle de  $I$  tel que  $J \subseteq f(J)$ . Alors  $f$  a un point fixe dans  $J$ .

2. Soit  $(I_i)_{i \in \mathbf{N}}$  une suite éventuellement finie de sous-intervalles fermés de  $I$  tels que  $f(I_i) \supseteq I_{i+1}$ . Alors il existe une suite d'intervalles fermés emboîtés  $J_n$  telle que

$$J_n \subseteq I_0 \quad \text{et} \quad f^n(J_n) = I_n.$$

De plus, il existe  $x \in I_0$  tel que  $f^n x \in I_n$  pour tout  $n$ .

DÉMONSTRATION. Posons  $\bar{J} = [a, b]$ , par hypothèse il existe un  $z \in \bar{J}$  tel que  $f(z) \leq a$  et un  $w \in \bar{J}$  tel que  $f(w) \geq b$ . Posons alors  $g(x) = f(x) - x$ . On a

$$g(z) = f(z) - z \leq f(z) - a \leq 0$$

$$g(w) = f(w) - w \geq f(w) - b \geq 0$$

et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un  $x \in \bar{J}$  tel que  $g(x) = 0$  i.e.  $f(x) = x$ . La démonstration du deuxième point se fait par récurrence sur  $n$ .

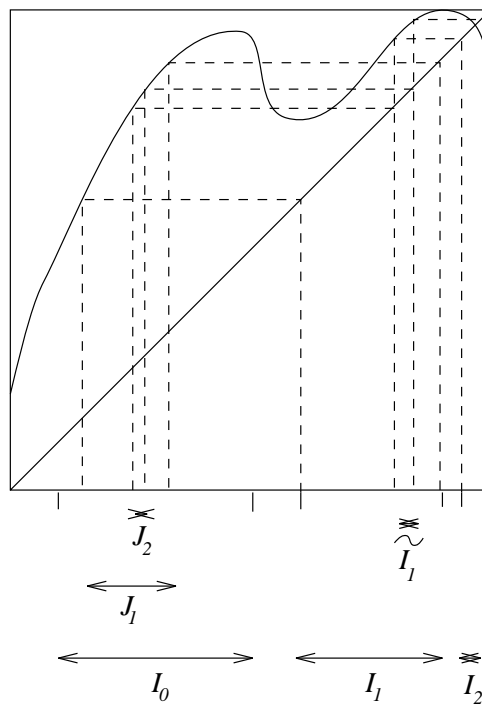


Figure 3: La récurrence

Pour  $n = 1$ ,  $fI_0 \supseteq I_1$  et donc il existe un intervalle  $J_1 \subseteq I_0$  tel que  $fJ_1 = I_1$ . Supposons maintenant  $J_1, \dots, J_n$  déjà construits. Puisque  $fI_n \supseteq I_{n+1}$  il existe un intervalle  $\tilde{I}_n \subseteq I_n$  tel que  $f\tilde{I}_n = I_{n+1}$ . Or par hypothèse de récurrence,  $f^n J_n = I_n \supseteq \tilde{I}_n$  et par le même procédé, on trouve  $J_{n+1} \subseteq J_n$  tel que  $f^n J_{n+1} = \tilde{I}_n$ . Maintenant il vient  $f^{n+1} J_{n+1} = f\tilde{I}_n = I_{n+1}$  (voir la figure 3).

Ensuite, pour avoir le point  $x$  du lemme, il suffit de prendre un point dans

$$\bigcap_{n \geq 0} J_n$$

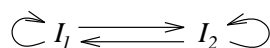
qui est non-vide par compacité. Ceci achève la démonstration du lemme 1. ■

### Le Graphe de Markov

Comme le montre le lemme 1, il y a un lien fort entre l'orbite d'un point et son cheminement dans une famille de sous-intervalles (son *itinéraire*). Cela motive la définition suivante :

**DÉFINITION 3.** Soit  $\{I_k\}_k$  un ensemble fini de sous intervalles fermés de  $I$  d'intérieurs disjoints deux à deux (on dira dans la suite une partition). Alors le graphe de Markov associé à la partition  $\{I_k\}$  et à la fonction  $f$  est le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de la partition  $\{I_k\}$  et qui comporte une arête  $I_i \rightarrow I_j$  si et seulement si  $f(I_i) \supseteq I_j$ .

**EXEMPLE 1.** L'application tente avec la partition donnée sur la figure a pour graphe de Markov :



et l'on voit qu'il peut y avoir des arêtes allant d'un sommet à lui même.

Cette définition permet de relire le lemme 1 : si l'on a un chemin dans le graphe de Markov, alors il existe un point dont l'itinéraire dans la partition est donné précisément par ce chemin.

L'idée qui sous-tend la définition du graphe de Markov est centrale dans l'étude des systèmes dynamiques. Elle consiste à découper notre système en un nombre fini de morceaux pour ensuite étudier la dynamique comme agissant sur l'ensemble de ces morceaux. On a « discrétisé » la dynamique. Pris de myopie, nous devons diviser l'image que nous avons en pièces assez grosses, et comme à la télévision, regarder le monde à travers un damier simplificateur. Ce qui est remarquable, c'est qu'un tel damier, même grossier, peut nous donner des informations très profondes sur le système dynamique étudié.

### Démonstration du premier théorème

En fait, toute la démonstration du théorème de Šarkovskii repose sur l'étude du graphe de Markov

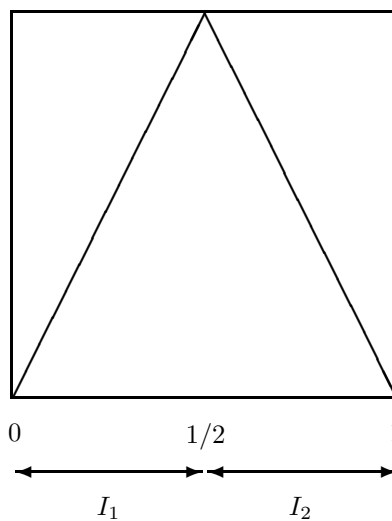
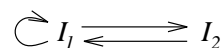


Figure 4: L'application « tente »

de  $f$  associé à une bonne partition. Cette étude est faite dans les lemmes 2-7. Cependant, nous pouvons dès maintenant démontrer le premier théorème dit « période trois implique chaos ».

**DÉMONSTRATION.** Supposons donc que  $f$  ait un point  $p_1$  de période 3. Nous ne traitons que le cas où l'orbite périodique s'ordonne en  $p_1 < p_2 < p_3$  avec  $fp_1 = p_2$ ,  $fp_2 = p_3$  et  $fp_3 = p_1$ . L'autre cas se fait de la même manière. Regardons la partition associée à cette orbite :  $I_1 = [p_2, p_3]$ ,  $I_2 = [p_1, p_2]$  (voir la figure 2). Comme alors  $fI_1 \supseteq I_1 \cup I_2$  et que  $fI_2 \supseteq I_1$ , on a un graphe de Markov donné par



Choisissons maintenant de bons chemins dans ce graphe pour produire des orbites périodiques de toutes les périodes.

Soit d'abord  $m > 3$  et montrons que  $f$  admet un point de période  $m$ . Regardons en effet dans le graphe de Markov le chemin suivant

$$\underbrace{I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1}_{m-2} \rightarrow I_2 \rightarrow I_1$$

L'intervalle  $J = J_m$  donné par la deuxième partie du lemme 1 appliqué à la famille  $(I_k)_k$  vérifie

$$\begin{aligned} f^i J &\subseteq I_1 & 0 \leq i \leq m-2 \\ f^{m-1} J &\subseteq I_2 \\ f^m J &= I_1 \end{aligned}$$

et par la première partie de ce même lemme, il existe un point  $x$  de  $J$  tel que  $f^m x = x$ .

Montrons que  $x$  est de période exactement  $m$ . Supposons par l'absurde que  $f^i x = x$ , avec  $i$  compris entre 1 et  $m - 1$ . Alors  $I_2 \ni f^{m-1} x = f^{i-1} x \in I_1$  et donc  $f^{m-1} x = p_2$  qui est l'unique point de  $I_1 \cap I_2$ . Finalement  $x = f^m x = p_3$  ce qui est impossible car  $f p_3 = p_1 \notin I_1$  ce qui contredit l'itinéraire de  $x$ .

Pour montrer que  $f$  a un point de période 2, on regarde le chemin

$$I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2$$

et l'on conclut de la même manière. ■

La manière dont on a construit notre partition est ici très importante. L'ensemble des extrémités des intervalles constituant celle-ci est en effet une orbite périodique  $\mathcal{O}(x)$ . Celle-ci est stable par  $f$ . Mais surtout, si le point périodique construit grâce à un chemin dans le graphe de Markov n'est pas de la période désirée, une de ses images par  $f$  va être 'à cheval' sur deux intervalles de la partition, et donc son orbite rencontre  $\mathcal{O}(x)$  ce qui sera une contradiction.

### Énoncé des lemmes préparatoires

Nous allons maintenant donner l'énoncé des lemmes qui, en étudiant des graphes de Markov, permettent de démontrer le théorème de Šarkovskii. Nous démontrerons ces lemmes plus loin dans l'article.

Soit donc  $f$  une application continue de  $I$  dans lui-même, ayant un point  $x$  de période  $n \geq 2$  et rangeons dans  $I$  les points de l'orbite de  $x$  par ordre croissant

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$$

Cela nous donne une partition en  $n - 1$  intervalles fermés, définie par les  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Nous allons décrire les propriétés du graphe de Markov  $\Gamma$  associé à cette partition.

LEMME 2. *Il existe un intervalle  $I_1$  de la partition tel que l'on ait une flèche de  $I_1$  vers lui-même.*

En d'autre terme, on a dans le graphe  $\Gamma$  un sommet tel que



ce qui sera bien pratique pour faire des chemins de longueur quelconque dans le graphe, en bouclant autant de fois qu'il le faut sur  $I_1$ . Dans toute la suite,  $I_1$

désignera un tel intervalle. Regardons maintenant ce qui se passe si l'on cherche à aller de  $I_1$  vers un autre sommet :

LEMME 3. *Pour tout sommet  $K$  du graphe de Markov il existe un chemin dans ce graphe partant de  $I_1$  et aboutissant en  $K$ .*

Autrement dit, en partant de  $I_1$ , on peut aller n'importe où. Que se passe-t-il en revanche lorsque l'on souhaite arriver en  $I_1$ ? Le lemme suivant nous donne la réponse :

LEMME 4. *Supposons qu'il n'existe pas de sommet du graphe de Markov distinct de  $I_1$ , duquel on puisse partir pour aboutir par un chemin du graphe en  $I_1$ . Alors  $n$  est pair, et  $f$  envoie tous les points de l'orbite de  $x$  qui sont à gauche de  $I_1$  sur ceux qui sont à droite, et vice-versa. Enfin, il existe un point de période 2.*

Cela veut dire que si l'on ne peut aboutir en  $I_1$ ,  $n$  est pair et l'on a une description combinatoire simple de l'orbite de  $x$ .

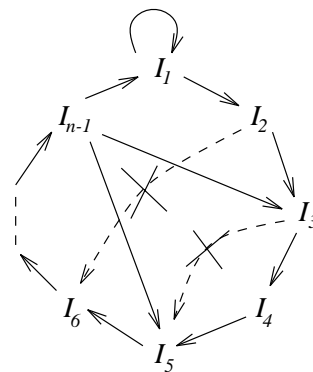


Figure 5: Le lemme à la boucle

LEMME 5. *Supposons que  $f$  ait un point de période impaire différente de 1 et supposons que  $x$  soit un tel point, de période  $n \neq 1$  prise minimale. Alors avec  $I_1$  comme dans le lemme 2, on a*

1.  $\Gamma$  contient le cycle

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1$$

2.  $\Gamma$  contient les arêtes de la forme

$$I_{n-1} \rightarrow I_{2i-1}, 2i - 1 < n$$

3. il n'existe pas d'arête de la forme

$$I_j \rightarrow I_{j+k}$$

pour  $k > 1, j \geq 1$ .

Tout devient plus clair en regardant la figure 5.

On peut immédiatement déduire de ces lemmes un corollaire simple

**COROLLAIRE 1.** *Si  $f$  a un point de période impaire  $n \neq 1$ , alors  $f$  a des points périodiques de toutes les périodes plus grandes que  $n$  et de toutes les périodes paires plus petites que  $n$ .*

La démonstration en est simple, au vu du lemme 5, en prenant un  $n$  minimal et en choisissant dans le graphe  $\Gamma$  dessiné dans la figure 5 le bon chemin. Pour les points de période plus grande que  $n$ , on boucle autant de fois qu'il le faut sur  $I_1$  puis on fait la grande boucle. Pour les points de période paire plus petites que  $n$ , on prend un raccourci  $I_{n-1} \rightarrow I_{2i+1}$ . Ensuite, la remarque concluant la démonstration du premier théorème permet de conclure.

Énonçons maintenant les derniers lemmes, qui n'ont pas à proprement parler rapport avec le graphe de Markov.

**LEMME 6.** *Si  $f$  a un point de période paire, elle a un point de période 2.*

**LEMME 7.** *Soit  $c$  un point de période  $n$  pour  $f$ , et  $h$  un entier positif quelconque. Alors  $c$  est un point de période  $n/(n,h)$  pour  $f^h$ , où  $(n,h)$  est le plus grand diviseur commun de  $h$  et  $n$ . Réciproquement, si  $c$  est un point de période  $m$  pour  $f^h$ , alors  $c$  est un point de période  $mh/d$  pour  $f$ , avec  $d$  qui divise  $h$  mais est premier avec  $m$ .*

### Démonstration du théorème de Šarkovskii

Nous pouvons maintenant procéder à la preuve du deuxième théorème. Supposons donc que  $f$  ait une orbite de période  $n$ .

1. Regardons d'abord le cas où  $n$  est une puissance de 2, i.e.  $n = 2^k$ . Soit alors  $m \prec n$ .  $m$  est de la forme  $2^e$ , avec  $0 \leq e \leq k$ . Par le corollaire 1 et le lemme 6, on peut supposer  $e > 0$ . Maintenant  $g = f^{m/2}$  a un point de période  $2^{k-e+1}$  par le lemme 7, et donc un point de période 2 par le lemme 6. Par le lemme 7, ce point est de période  $m$  pour  $f$ .

2. Reste maintenant le cas où  $n$  est de la forme  $p \cdot 2^k$  où  $p > 1$  est impair. Soit  $m \prec n$ . Il y a trois cas possibles :

- |          |                   |                  |
|----------|-------------------|------------------|
| 1er cas  | $m = q \cdot 2^k$ | $q > 0$ est pair |
| 2ème cas | $m = q \cdot 2^k$ | $q > p$ impair   |
| 3ème cas | $m = 2^l$         | $l \leq k$       |

et ces trois cas sont les seuls. Comme dans la première partie de la démonstration, nous allons regarder la bonne itérée de  $f$  pour lui appliquer soit le corollaire 1 soit la première étape de la démonstration.

Dans les deux premiers cas, regardons  $g = f^{2^k}$ . Elle a un point de période  $p$  impaire. Comme soit  $q > p$ , soit  $q$  est pair, le corollaire 1 nous donne un point de période  $q$  pour  $g$ . Dans le premier cas, ce point est de période  $q2^k$  pour  $f$ , d'après le lemme 7.

Dans le second cas, ce point est de période  $q2^e$  pour  $f$ , pour un certain  $e \leq k$ , encore par le lemme 7. Si  $e = k$  c'est fini et sinon on remplace  $n$  par  $q2^e$ . Alors comme  $m = 2^e(q2^{k-e})$ , on peut appliquer le premier cas, déjà démontré.

Dans le troisième cas, d'après le premier cas ci-dessus démontré,  $f$  a un point de période  $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ . On peut alors appliquer la première étape de la démonstration car  $l < k + 1$ .

Cela achève la démonstration du théorème de Šarkovskii. Reste maintenant à démontrer les lemmes.

### Démonstration des lemmes 2–7

#### Le lemme 2

Remarquons que l'orbite de  $x_0$  est contenue dans l'intervalle  $[x_0, x_{n-1}]$ . Comme  $n > 1$ , on a

$$fx_0 > x_0 \quad \text{et} \quad fx_{n-1} < x_{n-1},$$

on peut donc considérer

$$x_a = \max\{x_i : fx_i > x_i\}$$

et l'intervalle  $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$  convient. cqfd.

Dans la suite, c'est cet intervalle que nous prendrons égal à  $I_1$ .

#### Le lemme 3

Si l'on part de  $I_1$ , peut-on aboutir n'importe où ? Considérons pour un entier  $i$  l'ensemble  $V_i$  des sommets de  $\Gamma$  extrémités d'un chemin de longueur  $i$  partant de  $I_1$ . Il nous faut démontrer que pour  $i$  assez grand,  $V_i$  est l'ensemble de tous les sommets. Remarquons d'abord que  $V_i \neq \emptyset$  et que  $V_{i+1} \supseteq V_i$ , car on peut boucler sur  $I_1$ . Posons

$$U_i = \bigcup_{K' \in V_i} K' \subseteq I$$

On a clairement  $U_i \subseteq U_{i+1}$ .

*Affirmation :* s'il existe  $K' \in V_i$  tel que  $f(\partial K') \not\subseteq U_i$  alors  $V_{i+1} \neq V_i$ .

En effet nous remarquons d'abord que l'ensemble des extrémités des intervalles constituant la partition forme une orbite, et donc est stable par  $f$ . Soit maintenant  $w \in \partial K'$  tel que  $fw \notin U_i$ . Comme  $K' \in V_i$ ,  $fK'$  contient un intervalle  $I_j$ . en particulier il en contient un qui a  $fw$  dans son bord, et celui-ci est bien dans  $V_{i+1} - V_i$ . L'affirmation est bien démontrée.

La suite  $V_i$  est croissante et finie donc il existe un  $i$  compris entre 0 et  $n - 1$  tel que  $V_{i+1} = V_i$ . D'après l'affirmation ci-dessus,  $U_i \cap \mathcal{O}(x_0)$  est stable par  $f$ , et donc égal à toute l'orbite de  $x_0$ . Cela montre que  $V_i$  est égal à l'ensemble de tous les sommets du graphe. cqfd.

**Le lemme 4**

Rappelons que  $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$  comme dans la démonstration du lemme 2. Supposons par l'absurde qu'il existe  $x_i < x_a$  tel que  $fx_i \leq x_a$ . Soit  $x_b$  le plus grand des  $x_j < x_a$  tels que  $fx_j \leq x_a$ . Alors par définition  $fx_b \leq x_a$  et  $fx_{b+1} \geq x_{a+1}$ . Il en découle une flèche dans le graphe de Markov :

$$[x_b, x_{b+1}] \rightarrow I_1.$$

Comme  $x_b \neq x_a$  c'est impossible par hypothèse. On vérifie de la même manière que pour  $x_i \geq x_{a+1}$ , on a  $fx_i \leq x_a$ . Tout cela implique clairement la première partie du lemme, et que  $n$  est pair. Soit maintenant  $J_0 = [x_0, x_a]$  et  $J_1 = [x_{a+1}, x_{n-1}]$ . Comme  $fJ_0 \supseteq J_1$  et  $fJ_1 \supseteq J_0$ , et que  $J_0 \cap J_1 = \emptyset$ , il existe un  $x$  dans  $J_0$  tel que  $f^2x = x$ , et comme  $fx \in J_1$ ,  $x$  est bien de période 2. cqfd.

**Le lemme 5**

Par le lemme 2, on a l'intervalle  $I_1$ . Par le lemme 3 et le lemme 4, comme  $n$  est impair, il existe  $k > 1$  et des intervalles  $I_2, \dots, I_k$  de la partition tels que l'on ait dans le graphe le chemin

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$$

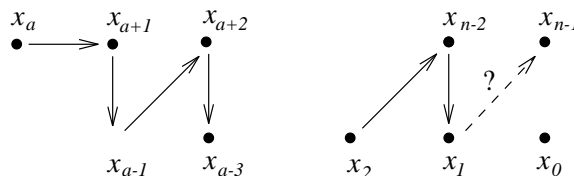
et soit prenons  $k$  minimal. Montrons que  $k = n - 1$  Pour cela supposons par l'absurde que  $k < n - 1$ . Alors si  $k$  est impair le chemin  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$  fournit un point de période  $k$  ce qui contredit la minimalité de  $n$ . Et si  $k$  est pair, le même chemin en lui rajoutant une boucle sur  $I_1$  à la fin donne un point de période impaire  $k + 1 < n$  ce qui est encore une contradiction. Donc  $k = n - 1$  et cela implique les première et troisième assertions du lemme. Reste à montrer la deuxième.

D'après le lemme 2,  $fx_a \geq x_{a+1}$  et  $fx_{a+1} \leq x_a$ , et comme  $x_a$  n'est pas de période 2, l'une au moins des deux inégalités est stricte. Supposons par exemple que  $fx_{a+1} < x_a$ . Montrons qu'alors  $fx_a = x_{a+1}$  et  $fx_{a+1} = x_{a-1}$ . En effet sinon on peut trouver un  $j > 2$  tel que  $fI_1 \supseteq I_j$ , ce qui est interdit par la troisième assertion du lemme.

Donc  $I_2 = [x_{a-1}, x_a]$ . Enfin par définition de  $x_a$  et comme  $fx_a = x_{a+1}$ , que  $fx_{a-1} > x_{a-1}$  et que  $fx_{a-1}$  ne peut être égal à  $x_a$  (par minimalité de  $k = n - 1$ ) ni à  $x_{a+1}$ , on a  $fx_{a-1} \geq x_{a+2}$ . Alors par la deuxième assertion, on a en fait égalité et  $I_3 = [x_{a+1}, x_{a+2}]$ . On peut ainsi répéter cet argument, et finalement les  $I_i$  se rangent de la manière suivante :

$$\underbrace{I_{n-1} \dots I_4 I_2}_{\text{pairs}} \quad I_1 \quad \underbrace{I_3 I_5 \dots I_{n-2}}_{\text{impairs}}$$

et en fait on a une description complète de l'orbite périodique :



Comme

$$fI_{n-3} = f([x_1, x_2]) \supseteq I_{n-2} = [x_{n-2}, x_{n-1}]$$

et aucun autre intervalle, il vient  $fx_1 = x_{n-1}$ . Comme  $fI_{n-1} \supseteq I_1$ , on a  $fI_{n-1} \supseteq [x_a, x_{n-1}]$  et donc pour  $2i + 1 = 1, \dots, n - 2$ , on a  $fI_{n-1} \supseteq I_{2i+1}$ , ce qui est la deuxième assertion du lemme. cqfd.

**Le lemme 6**

Soit  $x$  un point de période  $n > 2$  minimale. Supposons par l'absurde que  $f$  n'ait pas de point de période 2. D'après le corollaire, si  $n$  était impair, il y aurait un tel point, et donc  $n$  est pair. D'après le lemme 4, il existe un sommet  $I_k$  de la partition, différent de  $I_1$ , et tel que l'on ait  $I_k \rightarrow I_1$ . Soit maintenant  $k > 1$  le plus petit entier tel qu'il existe un cycle  $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$  injectif de longueur  $k$  dans le graphe de Markov. Comme dans la démonstration du lemme 5, on vérifie que  $k = n - 1$  et qu'il n'y a pas d'arête de la forme  $I_j \rightarrow I_j + l$ , pour  $l > 1$ . On vérifie ensuite qu'il existe des arêtes reliant  $I_{n-1}$  à tous les  $I_{2i}$ , et on a en particulier le chemin  $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$  qui nous donne un point de période 2, ce qui est impossible par hypothèse. cqfd.

**Le lemme 7**

Soit  $c$  un point de période  $n$  pour  $f$ , et posons  $m = n/(h, n)$  où  $(h, n)$  désigne le plus grand commun diviseur de  $h$  et  $n$ . Si  $f^{kh}c = c$  alors  $n$  divise  $kh$  et donc  $m$  divise  $k$ , et c'est fini.

Pour la deuxième partie du lemme, considérons  $c$  un point de période  $m$  pour  $f^h$ . Alors  $c$  est de période  $n$  pour  $f$ , où  $n$  divise  $mh$ . Donc nous pouvons écrire  $n = mh/d$ . Or d'après la première partie du lemme,  $n/(h, n) = nd/h$  et donc  $(h, n) = h/d$  ce qui nous donne  $h = de$ , et  $(de, me) = e$ . cqfd.

**Conclusion**

Voilà, nous sommes maintenant en possession d'un théorème qui donne une description complète de l'ensemble des périodes d'un endomorphisme de l'intervalle. Bien sûr, cela n'épuise pas les questions que l'on peut se poser sur l'itération des fonctions.

Tout d'abord, le théorème de Šarkovskii est-il optimal? La réponse est positive. Pour cela, on peut se reporter à [6], où il est montré que pour tout  $n$  il existe une application continue de l'intervalle dans lui-même ayant un point de période  $n$  mais pas de point de période  $m$  pour  $m \succ n$ . De même, il existe une application ayant des points de périodes toutes les puissances de 2, et aucune autre période. C'est donc un résultat optimal. On peut cependant aller plus loin dans l'analyse des orbites périodiques, et ajouter à la période une caractéristique combinatoire, i.e. la manière dont  $f$  chamboule l'ordre de l'orbite. C'est la théorie du forçage, qui cherche quels sont les types combinatoires nécessairement présents en présence d'un autre. Voir encore [6].

On peut ensuite se poser la question de savoir si le graphe de Markov ne pourrait pas nous donner d'autres informations sur la dynamique. Par exemple, dans [7], il est démontré que la plus grande valeur propre  $\lambda$  de la matrice d'adjacence du graphe de Markov est reliée à l'entropie topologique de l'application  $f$  par

$$h_{\text{top}}(f) \geq \log \lambda$$

Ainsi, l'application tente a une entropie supérieure ou égale à  $\log 2$ .

Enfin, existe-t-il des résultats de type Šarkovskii pour des applications continues sur d'autres espaces que des intervalles, par exemple des variétés compactes. Dans le cadre de la dimension 1, dans [7] il est démontré des

théorèmes de ce type pour des applications du cercle. Citons enfin [8], où est démontrée une conjecture de Misiurewicz sur les application continues des graphes : si  $f$  est une application continue d'un graphe  $Y$  dans lui-même, alors il existe un entier  $L = L(Y)$  tel que si  $f$  a des points de période  $1, \dots, L$ , alors  $f$  a des points de toutes les périodes.

Pour avoir une vue d'ensemble moderne sur les systèmes dynamiques en dimension 1, on peut consulter le livre de W. de Melo et S. van Strien [9].

**Bibliographie**

- [1] E.N. Lorentz *Deterministic non periodic flows* J. Atmosph. Sci. **20**, 1963, 130–141
- [2] E.N. Lorentz *The mechanics of vacillation* J. Atmosph. Sci. **20**, 1963, 448–464
- [3] E.N. Lorentz *The predictability of hydrodynamic flow* Trans. N-Y. Acad. Sci. Ser. II **25**, 1963, 409–432
- [4] A.N. Šarkovskii *Coexistence of cycles of a continuous mapping of the line into itself* Ukrain. Math. Ž. **16**, 1964, 61–71 (en Russe, avec résumé en Anglais)
- [5] T.Y. Li & J.A. Yorke *Period three implies chaos* Amer. Math. Monthly **82**, 1975, 985–992
- [6] L.S. Block & W.A. Coppel *Dynamics in one dimension* Springer Lect. Notes in Math. **1513**, 1992
- [7] L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz & L.S. Young *Periodic points and topological entropy of one dimensional maps* in Global theory of dynamical systems Z. Nitecki & C. Robinson ed. Springer Lect. Notes in Math. **819**, 1980
- [8] A.M. Blokh *Spectral decomposition, periods of cycles and a conjecture of M. Misiurewicz for graph maps* in Ergodic theory and related topics III U. Krengel, K. Richter & V. Warstat ed. Springer Lect. Notes in Math. **1514**, 1992
- [9] W. de Melo & S. van Strien *One-dimensional dynamics* Springer 1993
- [10] R.L. Devaney *An introduction to chaotic dynamical systems* Addison-Wesley 1987

◇ Jean-Yves Briend  
 Laboratoire Émile Picard  
 Université Paul Sabatier  
 118 route de Narbonne  
 31000 Toulouse  
 Briend@cict.fr