ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE - Partie D

TITRE :

SOMMATION NON ENTIÈRE

Temps de préparation : ……………………………….2 h 15 minutes
Temps de présentation devant les examinateurs : …….10 minutes
Entretien avec les examinateurs : ………………………..10 minutes

GUIDE POUR LES CANDIDAT(E)S :
Le dossier ci-joint comporte au total : 14 pages (dont celle-ci).
Le document « Sommation non entière » est issu des textes proposés à l'épreuve d'ADS de l'école polytechnique.

TRAVAIL SUGGÉRÉ :

Soit au format de l'X : présenter un exposé de synthèse de l'ensemble du texte (dans ce cas il peut durer 15 minutes) ou d'une partie seulement (dans ce cas il sera limité à 10 minutes). Cet exposé doit être cohérent. Il n'est pas demandé de résoudre les exercices proposés dans le texte, mais ils peuvent aider à enrichir l'exposé.

Soit au format Tétraconcours : l'exposé se concentrera sur la section I (pages 1 à 8). Il est demandé d'illustrer les résultats et de démontrer au moins une des propriétés dites classiques évoquées dans le texte.

CONSEILS GENERAUX POUR LA PREPARATION DE L'EPREUVE :

* Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.
* Réservez du temps pour préparer l'exposé.
* Préparez une introduction <u>et</u> une conclusion.
* Ne passez pas trop de temps sur une démonstration durant l'exposé.
* Ne surchargez pas vos transparents de mathématiques : restez lisible.
* Aérez et soignez vos transparents.

- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, etc.) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêt(e) à débuter votre exposé.

<u>Le jour de l'oral, les consignes suivantes seront également présentes :</u>
- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper … mais tout sera à remettre aux examinateurs en fin d'oral.
- A la fin de l'oral, vous devez remettre aux examinateurs le présent dossier, les transparents et les brouillons utilisés pour cette partie de l'oral, ainsi que TOUS les transparents et autres documents présentés pendant votre prestation.

Sommation non entière

1. INTRODUCTION. Les mathématiques sont l'art de l'abstraction et de la généralisation. Historiquement, les "nombres" ont d'abord été les entiers naturels ; ensuite, les nombres rationnels, négatifs, réels, complexes ont été introduits. De même, le concept de dérivation a été généralisé aux dérivations successives, d'ordre 2, 3, ... puis au "calcul fractionnaire" avec les dérivations d'ordre non entier ; il y a de même des travaux sur les itérations d'ordre non entier.

Cependant, lorsqu'on additionne des quantités, le nombre de termes considéré est généralement un entier naturel : on sait additionner 2 nombres, 3 nombres, mais comment additionner -7 nombres, ou bien les π premiers termes de la série harmonique ?

Dans cette note, on montre qu'il y a une façon très naturelle d'étendre les sommations aux cas où le "nombre de termes" est réel, voire complexe. On pourrait penser que cette méthode a été découverte il y a au moins deux cents ans - comme nous le pensions initialement. À notre grande surprise, cette méthode ne semble pas avoir été étudiée dans la littérature, ni être connue des experts, à l'exception de quelques remarques sporadiques dans les œuvres d'Euler (cf. la relation (13)). Bien évidemment, certaines méthodes classiques d'introduction de la fonction Γ sont un exemple de sommation avec un nombre complexe de termes, comme en témoigne l'équation (5) dans le paragraphe 1.2.

Dans cette note de présentation, nous ne donnons pas toutes les démonstrations.

1.1. Les Axiomes On commence par donner des conditions naturelles pour les sommations avec un nombre complexe de termes ; dans la suite, x, y, z et s désignent des nombres complexes et f et g des fonctions à valeurs complexes définies sur $\mathbb{C}$ ou des parties de $\mathbb{C}$, éventuellement soumises à des conditions spécifiées ultérieurement.

(S1) Relation de Chasles.

$$\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) + \sum_{\nu=y+1}^{z} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{z} f(\nu).$$

(S2) Invariance par translation.

$$\sum_{\nu=x+s}^{y+s} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+s)$$

(S3) Linéarité. Pour λ et μ dans $\mathbb{C}$,

$$\sum_{\nu=x}^{y} (\lambda f(\nu) + \mu g(\nu)) = \lambda \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) + \mu \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu).$$

(S4) Cohérence.

$$\sum_{\nu=1}^{1} f(\nu) = f(1)$$

(S5) Monômes. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, l'application

$$z \mapsto \sum_{\nu=x}^{z} \nu^d$$

est polynômiale dans $\mathbb{C}$.

($\overrightarrow{\mathbf{S6}}$) Continuité de la translation à droite. Si pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(z+n) = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n) = 0; \tag{1}$$

plus généralement, pour toute suite de polynômes de degré fixé, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \ : \ \lim_{n\to+\infty} |f(z+n) - p_n(z+n)| = 0,$$

on demande d'avoir

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n) - \sum_{\nu=x}^{y} p_n(\nu+n) \right| = 0. \tag{2}$$

Les quatre premiers axiomes (S1) - (S4) sont si naturels qu'il est difficile d'imaginer une méthode de sommation qui ne les satisfasse pas. Ils impliquent facilement que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ et on assure une généralisation de la notion classique de sommation.

L'axiome (S5) est motivé par les relations classiques

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{\nu=1}^{n} \nu^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

et les formules similaires pour les puissances supérieures. On montrera ci-dessous que nos axiomes impliquent la validité de ces formules [1].

Enfin, l'axiome ($\overrightarrow{\text{S6}}$) est également naturel. Le premier cas, (1), exprime le fait que si f tend vers 0 à l'infini, la somme sur le domaine de longueur constante $[x+n, y+n]$ doit également tendre vers 0. La relation (2) exprime un phénomène semblable, à cela près qu'une approximation polynômiale a été introduite (cf. la discussion après la Proposition 1).

1.2. Des Axiomes à une Définition. Pour voir comment ces conditions déterminent une méthode de sommation de façon univoque, on commence par sommer des fonctions polynômiales. Le cas le plus simple est celui de la somme $\sum_{\nu=1}^{1/2} c$, où $c \in \mathbb{C}$. D'après l'axiome (S1), on doit avoir

$$\sum_{\nu=1}^{1/2} c + \sum_{\nu=3/2}^{1} c = \sum_{\nu=1}^{1} c.$$

En appliquant les axiomes (S2) au membre de gauche et (S4) au membre de droite, on obtient

$$\sum_{\nu=1}^{1/2} c + \sum_{\nu=1}^{1/2} c = c.$$

Il en résulte que $\sum_{\nu=1}^{1/2} c = c/2$. Ce calcul élémentaire peut être étendu pour couvrir toute somme d'une fonction polynômiale avec un nombre rationnel de termes.

Proposition 1. *Soit $p \in \mathbb{C}[X]$ et P l'unique polynôme tel que $P(0) = 0$ et $P(z) - P(z-1) = p(z)$, pour tout z complexe. Alors :*

1. Avec le même résultat, on peut remplacer la conditions que les sommes de monômes soient polynômiales par la condition *a priori* plus faible que ce soient des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui sont somme de leur série de Taylor.

– *La définition*

$$\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu) = P(y) - P(x-1) \tag{3}$$

satisfait les axiomes (S1)-($\overrightarrow{S6}$) , dans le cas où f est un polynôme.

– *Réciproquement, toute sommation qui satisfait les axiomes (S1)-(S4) satisfait également (3) pour tout polynôme $p \in \mathbb{Q}[X]$ et tout couple de complexes x et y dont la différence est dans $\mathbb{Q}$.*

– *Toute sommation qui satisfait les axiomes (S1)-(S5) satisfait également (3) pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$ et tout couple de complexes x et y.*

Démonstration. Pour démontrer la première assertion, on considère (3) comme une définition. On vérifie aisément les propriétés (S1), (S3), (S4) et (S5). Pour vérifier (S2), on associe au polynôme p les polynôme q et r définis par $q(x) = p(x+s)$ et $r(x) = P(x+s) - P(s)$. On montre d'abord que "$r = Q$" : on a $r(0) = 0$ et $r(z) - r(z-1) = P(z+s) - P(z+s-1) = q(z)$; on pourra donc appliquer (3) au couple (q, r). On a

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu+s) &= \sum_{\nu=x}^{y} r(\nu) = q(y) - q(x-1) \\ &= P(y+s) - P(x+s-1) = \sum_{\nu=x+s}^{y+s} p(\nu).\end{aligned}$$

Montrons finalement que ($\overrightarrow{S6}$) est satisfait. On considère l'espace vectoriel V_d constitué des polynômes complexes de degré au plus égal d, muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|q\| = \sum_{i=0}^{d} |q(i)|$. La forme linéaire s_x^y sur V_d qui associe à un polynôme q le complexe $s_x^y(q) = \sum_{\nu=x}^{y} q(\nu)$ est continue et si une suite $(q_n)_n$ tend vers 0, alors la suite $s_x^y(q_n)$ tend vers 0. Pour montrer la relation (2), on définit q_n par $q_n(z) = p(x+n) - p_n(x+n)$. Par hypothèse, la suite q_n tend vers 0 au sens de la convergence simple ; elle tend donc vers 0 au sens de la norme $\|\cdot\|$ et on a donc (3).

Pour démontrer le deuxième point, on va développer l'idée utilisée pour démontrer que $\sum_{\nu=1}^{1/2} c = c/2$. D'après (S1), on a pour tout entier $r \geq 1$

$$\sum_{\nu=1}^{r} \nu^d = \sum_{\nu=1}^{r/s} \nu^d + \sum_{\nu=r/s+1}^{2r/s} \nu^d + \cdots + \sum_{\nu=(s-1)r/s+1}^{r} \nu^d.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, le membre de gauche garde son sens classique. En utilisant (S2) et (S3), on en déduit

$$\sum_{\nu=1}^{r} \nu^d = \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\nu=1}^{r/s} (\nu + kr/s)^d = s \sum_{\nu=1}^{r/s} \nu^d + \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\nu=1}^{r/s} q_{d-1,k}(\nu),$$

où $q_{d-1,k}(\nu) = (\nu + kr/s)^d - \nu^d$ est un polynôme nul si $d = 0$ et de degré $d - 1$ sinon.
Cette relation étant établie, on raisonne par récurrence. Si $d = 0$, l'équation précédente détermine $\sum_{\nu=1}^{r/s} 1$ et par linéarité la somme $\sum_{\nu=1}^{r/s} c$, pour n'importe quel nombre complexe c. Une fois qu'on a évalué la somme $\sum_{\nu=1}^{r/s} f(\nu)$ sur tous les polynômes de degré $d-1$, la relation que l'on vient d'établir détermine $\sum_{\nu=x}^{y} \nu^d$, et par linéarité, cela détermine $\sum_{\nu=1}^{r/s} f(\nu)$ pour tous les polynômes de degré d. Si p est un polynôme et $x - y$ est dans $\mathbb{Q}$, les axiomes (S1)-(S4) impliquent que $\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu) = \sum_{\nu=1}^{y-x+1} p(\nu + x - 1)$. Mais on a déjà montré que l'équation (3) est une définition admissible pour une méthode de sommation sur les polynômes ; ainsi, si une méthode de sommation satisfait les relations (S1)-(S4), pour tout polynôme p et tout couple de complexes (x, y) de différence rationnelle, la relation (3) est satisfaite.

Le troisième point résulte du fait que deux polynômes qui coïncident sur les rationnels sont égaux. □

Soit maintenant f une fonction arbitraire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Si on cherche à définir $\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu)$ pour x et y dans $\mathbb{C}$, on peut écrire

$$\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) + \sum_{\nu=y+1}^{y+n} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{x+n-1} f(\nu) + \sum_{\nu=x+n}^{y+n} f(\nu),$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier positif arbitraire. On en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) &= \sum_{\nu=x}^{x+n-1} f(\nu) - \sum_{\nu=y+1}^{y+n} f(\nu) + \sum_{\nu=x+n}^{y+n} f(\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} (f(\nu + x - 1) - f(\nu + y)) + \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu + n). \end{aligned} \tag{4}$$

À quoi nous sert ce réarrangement élémentaire ? Dans la dernière ligne, la première somme du membre de droite porte sur un nombre entier de termes : elle peut être évaluée de façon classique. Pour ce qui est de la seconde somme, l'avantage est que nous avons translaté le somme par n vers la droite. Puisque

(4) a lieu pour tout n, on peut utiliser $(\overrightarrow{\text{S6}})$ pour évaluer la limite quand n tend vers l'infini : si pour tout z, la suite $(f(n+z))_n$ tend vers 0, alors $(\overrightarrow{\text{S6}})$ implique que la limite de la dernière somme est nulle quand n tend vers l'infini, et on obtient dans ce cas

$$\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(f(\nu + x - 1) - f(\nu + y) \right).$$

C'est bien sûr une condition particulière à imposer à f, mais cette idée peut être généralisée. Considérons par exemple la fonction$f = \ln$; pour $\nu \in [x, y] \subset \mathbb{R}^+$, les valeurs $f(\nu + n)$ sont bien approchées par la fonction constante $f(n)$, avec une erreur qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini ; on dira dans ce cas que f est "approximativement constante". En utilisant (S3), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{\nu=x}^{y} \ln(\nu + n) = \sum_{\nu=x}^{y} \ln(n) + \sum_{\nu=x}^{y} \left(\ln(\nu + n) - \ln n \right).$$

Mais, par $(\overrightarrow{\text{S6}})$, la dernière somme s'annule quand n tend vers l'infini, tandis que le sommant de la première somme est constant et on peut donc évaluer celle-ci par la Proposition 1. En passant à la limite en n, on obtient nécessairement

$$\sum_{\nu=x}^{y} \ln \nu = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \left(\ln(\nu + x - 1) - \ln(\nu + y) \right) + (y - x + 1) \ln n \right).$$

Avant de généraliser encore plus notre définition, observons que notre méthode interpole la fonction factorielle de façon classique. On définit

$$\prod_{\nu=x}^{y} f(\nu) := \exp \left(\sum_{\nu=x}^{y} \ln f(\nu) \right)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} z! = \prod_{\nu=1}^{z} \nu &= \lim_{n \to \infty} \exp \left(\sum_{\nu=1}^{n} \ln \left(\frac{\nu}{\nu + z} \right) + z \ln n \right) \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(n^z \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{\nu + z} \right) = \Gamma(z+1), \end{aligned} \tag{5}$$

en utilisant une représentation classique de la fonction Γ.

Nous pouvons maintenant nous appuyer sur le calcul heuristique (4), la Proposition 1 et l'axiome $(\overrightarrow{\mathrm{S6}})$ pour donner une définition générale : tout ce dont nous avons besoin est de pouvoir approximer $f(n+z)$ par une suite de valeurs $p_n(n+z)$ de polynômes p_n de degré fixé.

Les domaines de définition nécessitent quelque soin : l'exemple du logarithme montre que l'on ne doit pas se limiter à des fonctions définies sur $\mathbb{C}$. Ce dont nous avons besoin, c'est de considérer des domaines de définition U stables par la translation $u \mapsto u+1$. Cela nous conduit à la définition suivante (le degré du polynôme nul est par convention $-\infty$).

Définition 1 (Fonctions fractionnairement sommables)**.** *Soit U une partie non vide de $\mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite* fractionnairement sommable de degré d *si les conditions suivantes sont satisfaites.*

- *L'ensemble U est stable par la translation $u \mapsto u+1$.*
- *Il existe une suite de polynômes de degré d telle que*

$$\text{pour tout } x \in U \text{ on a } \lim_{n\to\infty} |f(n+x) - p_n(n+x)| = 0.$$

- *Pour tout x dans U et tout y tel que $y+1$ est dans U, la limite*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=n+x}^{n+y} p_n(\nu) + \sum_{\nu=1}^{n}\left(f(\nu+x-1) - f(\nu+y)\right)\right)$$

existe, où la première somme est définie en (3).

Dans ce cas, on note cette limite

$$\overrightarrow{\sum_{\nu=x}^{y}} f(\nu) \quad \text{ou plus simplement} \quad \overrightarrow{\sum_{x}^{y}} f.$$

Si la fonction $\ln f$ est fractionnairement sommable, on pose

$$\overrightarrow{\prod_{\nu=x}^{y}} f(\nu) = \exp\left(\overrightarrow{\sum_{\nu=x}^{y}} f(\nu)\right).$$

On notera que cette définition ne dépend pas du choix des polynômes approximants. Soit en effet $(q_n)_n$ une autre famille de polynômes approximants ; pour tout $x \in U$ on a $\lim_{n\to\infty}(p_n(n+x) - q_n(n+x)) = 0$; puisque $\mathbb{C}_d[X]$ est de dimension finie $d+1$, cette dernière relation est valable pour tout x de $\mathbb{C}$. Comme on l'a montré dans la Proposition 1, les sommes de polynômes satisfont l'axiome $(\overrightarrow{\mathrm{S6}})$; en substituant 0 à f et $q_n - p - n$ à p_n dans $(\overrightarrow{\mathrm{S6}})$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=n+x}^{n+y} p_n(\nu) - \sum_{\nu=n+x}^{n+y} q_n(\nu)\right) = 0.$$

En outre, cette définitions est la seule qui satisfasse les axiomes (S1)-($\overrightarrow{\text{S6}}$) , comme on l'établit dans le théorème suivant

Théorème 1. *La Définition 1 satisfait les axiomes (S1)-($\overrightarrow{\text{S6}}$) (pour des domaines de définition convenables) et c'est la seule définition avec cette propriété, pour les classes de fonctions considérées.*

Démonstration. On a déjà montré l'unicité en dérivant la Définition 1 des axiomes (S1)-($\overrightarrow{\text{S6}}$) . Il nous reste à vérifier que la Définition 1 induit les axiomes (S1)-($\overrightarrow{\text{S6}}$) . Les axiomes (S3) et (S5) sont automatiquement satisfaits. Les axiomes (S1), (S2) et (S4) sont facilement vérifiés. Pour vérifier ($\overrightarrow{\text{S6}}$) , on utilise la définition et les autres axiomes, en particulier (S1), et on calcule

$$\begin{aligned}
\Delta &:= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n) - \sum_{\nu=x}^{y} p_n(\nu+n)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n) - \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) + \sum_{\nu=x}^{y}\left(f(\nu+x-1)-f(\nu+y)\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=x+n}^{y+n} f(\nu) - \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) + \sum_{\nu=x}^{n+x-1} f(\nu) - \sum_{\nu=y+1}^{y+n} f(\nu)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Cela montre que la Définition satisfait tous les axiomes. □

2. PROPRIÉTÉS DES SOMMES FRACTIONNAIRES.

Maintenant que nous avons une définition de sommes avec un nombre non entier de termes, il est intéressant de rechercher les propriétés des sommes finies classiques qui se concervent dans ce cadre, et d'en trouver de nouvelles.

2.1. Proprétés classiques généralisées.

Une des identités les plus fondamentales pour les sommes finies est la sommation des progressions géométriques. Pour simplifier, on considère un rél $q \in [0,1[$. La fonction $\nu \mapsto q^\nu$ est approximativement nulle et la définition donne

$$\sum_{\nu=0}^{x} q^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(q^{\nu-1}-q^{\nu+x}\right) = \left(1-q^{x+1}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu-1} = \frac{1-q^{x+1}}{1-q}. \tag{6}$$

La formule de sommation des séries géométriques est donc valable pour tout $x \in \mathbb{C}$.

Un calcul similaire montre que la formule du binôme reste valable dans le nouveau cadre : pour tout $c \in \mathbb{C}\backslash\{-1,-2,\ldots\}$ et $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| < 1$, on a

$$(1+x)^c = \sum_{\nu=0}^{c} \binom{c}{\nu} x^\nu. \tag{7}$$

On peut étendre la formule (6) au cas $q > 1$ et la formule (7) au cas $|x| > 1$, mais cela implique la "sommation à gauche" que nous introduirons dans la troisième partie.

La multiplication des sommes fractionnaires fournit un exemple d'identité avec une structure plus compliquée. Pour $x \in \mathbb{C}$, et sous réserve que toutes les sommes non entières existent, on a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\nu=1}^{x} f(\nu)\right) \quad \cdot \quad \left(\sum_{\nu=1}^{x} g(\nu)\right) & \\ = \sum_{\nu=1}^{x} \left(f(\nu)g(\nu) + f(\nu)\sum_{k=1}^{\nu-1} g(k) + g(\nu)\sum_{k=1}^{\nu-1} f(k) \right), & \quad (8)\end{aligned}$$

ce qui généralise les formules du type $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_2b_1 + b_2a_1$.

2.2. Proprétés nouvelles et fonctions spéciales. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.2, notre définition interpole la fonction factorielle par la fonction Γ,

$$z! \equiv \prod_{\nu=1}^{z} = \Gamma(z+1). \tag{9}$$

Une conséquence amusante est la relation

$$\prod_{\nu=1}^{-1/2} (\nu^2 + 1) = \tanh \pi\,; \tag{10}$$

que l'on obtient en utilisant la relation classique $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z) = i\pi/\sin(\pi i z)$:

$$\begin{aligned}\prod_{\nu=1}^{-1/2} (\nu^2+1) &= \prod_{\nu=1}^{-1/2} (\nu+i) \prod_{\nu=1}^{-1/2} (\nu-i) = \frac{\Gamma(1/2+i)\Gamma(1/2-i)}{\Gamma(1+i)\Gamma(1-i)} \\ &= \frac{\Gamma(1/2+i)\Gamma(1/2-i)}{i\Gamma(i)\Gamma(1-i)} = \frac{\sin(\pi i)}{i\sin(\pi(1/2+i))} = \frac{\sin i\pi}{i\cos i\pi} \\ &= \frac{\sinh \pi}{\cosh \pi} = \tanh \pi. \end{aligned} \tag{11}$$

Plusieurs sommes non entires sont liées aux fonctions spéciales. Nous prendrons la série harmonique comme exemple. Puisque $\nu \mapsto \nu^{-1}$ est approximativement nulle, on a

$$\sum_{\nu=1}^{x} \frac{1}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+x} \right), \tag{12}$$

et en particulier, on a

$$\sum_{\nu=1}^{-1/2} \frac{1}{\nu} = -2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdots\right) = -2\ln 2, \tag{13}$$

ce qui avait déjà été remarqué par Euler.

La fonction ζ d'Hurwitz est une fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\} \times \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$ et qui vérifie

$$\zeta(s,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+x)^s} \text{ pour } \Re(s) > 1 \text{ et } x > 0. \tag{14}$$

On note

$$\zeta'_s(s,x) = \frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x).$$

On peut montrer que l'on a

$$\sum_{\nu=1}^{x} \nu^a = \zeta(-a,1) - \zeta(-a,x+1) \text{ pour } x \in \mathbb{C}\backslash\{-1,-2,-3,\ldots\} \text{ et } a \neq -1, \tag{15}$$

avec le cas particulier

$$\sum_{\nu=1}^{-1/2} \nu^a = \left(2 - 2^{-a}\right)\zeta(-a,1), \text{ pour } a \neq -1. \tag{16}$$

En dérivant (15) b fois (où b est un entier naturel), on obtient

$$\sum_{\nu=1}^{x} \nu^a (\ln\nu)^b = (-1)^b \left(\zeta^{(b)}(-a,1) - \zeta^{(b)}(-a,x+1)\right) \tag{17}$$

ce qui conduit à quelques valeurs particulières inattendues, comme

$$\sum_{\nu=1}^{-1/2} \nu\ln\nu = -\frac{\ln 2}{24} - \frac{3}{2}\zeta'(-1,1). \tag{18}$$

2.3. Séries mirroir et sommation à gauche. L'identité

$$f(-10) + f(-9) + f(-8) + f(-7) = \sum_{\nu=-10}^{-7} f(\nu) = \sum_{\nu=7}^{10} f(-\nu)$$

semble si triviale qu'elle n'est presque jamais mentionnée. S'étend-elle aux sommes fractionnaires ? Il y a là un problème crucial puisqu'avec notre définition, la seconde somme implique de connaître le comportement de f au voisinage de $-\infty$. Nous traitons ce point dans le paragraphe suivant.

3. UN AUTRE AXIOME ET LA SOMMATION À GAUCHE. On peut modifier l'axiome $(\overrightarrow{\mathrm{S6}})$ en s'intéressant aux limites quand $n \to -\infty$. On obtient ainsi l'axiome de "continuité de la translation à gauche" :

$(\overleftarrow{\mathrm{S6}})$ Continuité de la translation à gauche. Si pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(z-n) = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu - n) = 0; \tag{19}$$

plus généralement, pour toute suite de polynômes de degré fixé, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \ : \ \lim_{n\to+\infty} |f(z-n) - p_n(z-n)| = 0,$$

on demande d'avoir

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu - n) - \sum_{\nu=x}^{y} p_n(\nu - n) \right| = 0. \tag{20}$$

En répétant les calculs du sous-paragraphe 1.2. on obtient une définition alternative que l'on ne donne pas ici formellement : c'est exactement la Définition 1, à cela près que toute limite $n \to \infty$ est remplacée par $n \to -\infty$.

On montre de même que cette définition est la seule qui satisfasse (S1)-(S5) et $(\overleftarrow{\mathrm{S6}})$. On remarque qu'en général l'existence de $\overrightarrow{\sum}$ et $\overleftarrow{\sum}$ sont indépendantes ; en outre, si l'une et l'autre existent, elles peuvent avoir des valeurs différentes. Par exemple, pour tout z avec $\Re(z) > 0$, on a

$$\overleftarrow{\sum_{\nu=1}^{-1/2}} \nu^z = (-1)^{z+1} \left(2 - 2^{-z}\right) \zeta(-z, 1), \tag{21}$$

tandis que

$$\overrightarrow{\sum_{\nu=1}^{-1/2}} \nu^z = \left(2 - 2^{-z}\right) \zeta(-z, 1). \tag{22}$$

En revanche, on a la relation

$$\overrightarrow{\sum_{\nu=a}^{b}} f(\nu) \ = \overleftarrow{\sum_{\nu=-b}^{-a}} f(-\nu). \tag{23}$$

4. UN PRODUIT INFINI. Les sommes non entières ne sont pas qu'un nouvel environnement peuplé d'énoncés dénués de sens dans le contexte classique. En fait, quelques unes des formules obtenues sont bien connues et d'autres semblent nouvelles. Bien sûr, toutes les identités obtenues peuvent en principe être calculées sans recours aux sommes non entières. Mais les démonstrations fondées sur la sommation non entière peuvent être assez intuitives et simples, puisque la plupart des étapes ne sont que des généralisations de propriétés de sommation très classiques. Nous en donnons un exemple en donnant une forme close pour le produit infini

$$P(x) := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{2x}{k}\right)^{-k(-1)^k} \tag{24}$$

pour $x > -/2$. Ce produit a été étudié en premier par Borwein et Dykshoorn en 1993. En prenant les logarithmes, on obtient

$$\ln P(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(2k \ln\left(1 + \frac{2x}{k}\right) - 2\left(k - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{2x}{2(k-1/2)}\right)\right).$$

On considère la fonction $\nu \mapsto 2\nu \ln(1 + x/\nu)$ qui tend vers $2x$ quand $\nu \to \infty$. D'après la Définition 1, on a

$$\begin{aligned}
&\mathop{\sum\!\!\!\!\!\!\rightarrow}_{\nu=1}^{-1/2} 2\nu \ln\left(1 + \frac{x}{\nu}\right) \\
= \;& \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{2} \cdot 2x + \sum_{k=1}^{n} 2k \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - 2\left(k - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{x}{k-1/2}\right)\right].
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$
\begin{aligned}
\ln P(x) &= -x-\sum_{\nu=1}^{-1/2} 2\nu \ln\left(1+\frac{x}{\nu}\right) = -x-2\sum_{\nu=1}^{-1/2} \nu \ln\left(\frac{\nu+x}{\nu}\right) \\
&= -x-2\sum_{\nu=1}^{-1/2} \nu \ln(\nu+x) + 2\sum_{\nu=1}^{-1/2} \nu \ln \nu \\
&= -x-2\sum_{\nu=1+x}^{-1/2+x} (\nu-x)\ln\nu - \frac{\ln 2}{12} - 3\zeta_s'(-1,1) \\
&= -x-2\sum_{\nu=1+x}^{-1/2+x} \nu\ln\nu + 2x\sum_{\nu=1+x}^{-1/2+x} \ln\nu - \frac{\ln 2}{12} - 3\zeta_s'(-1,1) \\
&= -x-2\left(\zeta_s'\left(-1,x+\frac{1}{2}\right) - \zeta_s'(-1,x+1)\right) \\
&\quad +2x\left(\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)!\right) - \ln(x!)\right) - \frac{\ln 2}{12} - 3\zeta_s'(-1,1),
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé l'équation (18), le décalage d'indices, l'équation (17), l'équation (5) et la sommation continue. En prenant l'exponentielle des deux membres extrêmes, on obtient finalement

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 2^{-1/12}\left(\frac{\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(x+1)}\right)^{2x} \times \\
&\times \exp\left(-x-2\zeta_s'(-1,x+\frac{1}{2}) + 2\zeta_s'(-1,x+1) - 3\zeta_s'(-1,1)\right).
\end{aligned}
$$

[...]