

## Semaine 11 – 03/01 – 06/01

MPSI, chapitres 1 à 5 – Révisions

### 6 Topologie

1. Espaces vectoriels normés, boules, convexité des boules.
2. Distance d'un point à un ensemble, de deux ensembles, parties bornées.
3. Suites et séries dans un EVN, convergence, produit (scalaire, vectoriel, matriciel), espace produit.
4. Topologie : ouverts, fermés, parties denses. Points adhérents, points intérieurs, adhérence, intérieur, frontière. Topologie relative.
5. Compacts : définition séquentielle. Caractère fermé et borné, parties compactes d'un compact, produit de compacts, intersection de compacts. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS et réciproque partielle. Théorème de HEINE-BOREL (caractérisation en dimension finie).
6. Équivalence des normes en dimension finie (résultat temporairement admis) :  $N_1$  est dominée par  $N_2$  si  $N_1 \prec N_2$ , i.e.  $\exists a \in \mathbf{R}_+^* d N_1 \leq aN_2$ , i.e. (la topologie induite par)  $N_2$  est plus fine que (la topologie induite par)  $N_1$ . Invariance des propriétés topologiques par changement de normes équivalentes, interprétation en terme de continuité de l'application identité. Exemples et contre-exemples en dimension infinie.

### 7 Polynômes :

1. Arithmétique dans  $\mathbf{K}[X]$ , idéaux, ppcm, pgcd. Théorème de BÉZOUT, lemme de GAUSS. Polynômes irréductibles, décomposition en irréductibles unitaires.
2. Matrice compagnon, calculs algébriques avec les racines d'un polynôme via sa matrice compagnon.
3. Polynômes d'endomorphismes. Structure de  $\mathbf{K}[u]$ , polynôme annulateur, polynôme minimal.
4. Spectre et polynôme minimal, inversibilité de  $P(u)$ . Théorèmes de CAYLEY-HAMILTON et de décomposition des noyaux. Critère de diagonalisabilité par un polynôme annulateur simplement scindé.
5. Sous-espaces caractéristique ( $\chi_u$  est scindé), critère de trigonalisation. Forme de JORDAN. **La décomposition de JORDAN-CHEVALLEY, improprement appelée de DUNFORD, est hors-programme.**

### 8 Analyse Fonctionnelle

1. Continuité d'une fonction définie entre deux parties d'EVN : définition par les boules (avec ou sans quantification), caractérisations séquentielle et topologique, limites. Compatibilité au produit, à la composition, cas des fonctions à valeurs dans un corps. Caractérisation sur une partie dense.
2. Applications lipschitziennes. Continuité uniforme, critère séquentiel. Théorèmes de HEINE et WEIERSTRASS.
3. Applications linéaires et multilinéaires continues, cas de la dimension finie, norme subordonnée. Équivalence des normes en dimension finie. Continuité des fonctions polynomiales. Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.
4. Fractions rationnelles, déterminant. Caractère ouvert de  $GL_n(\mathbf{K})$ , densité, caractère fermé de  $SL_n(\mathbf{K})$ , de  $P^{-1}(a)$ .

Groupe de colles :

Interrogateur(trice) :

Nom	Énoncés
Note	Commentaires
Nom	Énoncés
Note	Commentaires
Nom	Énoncés
Note	Commentaires