Semaine 13 – 16/01 – 20/01

MPSI, chapitres 1 à 7 – Révisions

8 Analyse Fonctionnelle

1. Continuité d'une fonction définie entre deux parties d'EVN : définition par les boules (avec ou sans quantification), caractérisations séquentielle et topologique, limites. Compatibilité au produit, à la composition, cas des fonctions à valeurs dans un corps. Caractérisation sur une partie dense.
2. Applications lipschitziennes. Continuité uniforme, critère séquentiel. Théorèmes de Heine et Weierstrass.
3. Applications linéaires et multilinéaires continues, cas de la dimension finie, norme subordonnée. Équivalence des normes en dimension finie. Continuité des fonctions polynomiales. Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.
4. Fractions rationnelles, déterminant. Caractère ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, densité, caractère fermé de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$, de $P^{-1}(a)$.
5. Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment et à valeurs dans un EVN, Linéarité, compatibilité aux applications linéaires. Convergence des sommes de Riemann. Inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.
6. Dérivée d'une fonction définie sur un intervalle réel et à valeurs dans un EVN. Définition de Cauchy et de Weierstrass (limite de la pente et DL1). Équivalence avec la formuluation de Carathéodory (prolongement par continuité de la fonction pente). Dérivée à gauche, à droite. Dérivation coordonnée par coordonnée. Linéarité, dérivation, compatibilité aux applications linéaires, formule de Leibniz.
7. Théorème de Leibniz-Newton. Inégalité de Lagrange (accroissements finis). Formules de Taylor-Laplace (reste intégral), Taylor-Lagrange (inégalité) et Taylor-Young.

9 Variables aléatoires

1. Procédés de sommation discrets : sommabilité, théorème de Fubini-Tonelli discret, sommation par paquets, produit de familles sommables, produit de Cauchy.
2. Variable aléatoire discrète réelle sommable, système quasi-complet d'événements, espérance d'une variable aléatoire réelle discrète sommable. Espace $\mathcal{L}^1((\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}), \mathbf{C})$. Linéarité, positivité et croissance de l'espérance. Inégalité triangulaire, comparaison. Variables centrées. Espérance d'une variable entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X \geq n\right)$.
3. Formule de transfert pour $\mathbf{E}\left(f(X)\right)$.
4. Variance, moments, écart-type, formule de König-Huyghens. Variables réduites. Exemples : $\mathcal{P}\left(\lambda\right)$, $\mathcal{G}\left(p\right)$.
5. Inégalité de Cauchy-Schwarz, espace $\mathcal{L}^2((\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}), \mathbf{R})$.
6. Inégalités de concentration : Markov, Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}\left(f(X)\right)}{f(a)} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left(|X - \mathbf{E}\left(X\right)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{V}\left(()\, X\right)}{\varepsilon^2}\ .$$

11 L^1 – Séries de fonctions

1. Modes de convergence : convergence simple, uniforme, normale, sur un voisinage, sur les segments. Continuité de la limite/somme. Convergence sur les segments. Double limite.
2. Séries géométrique et exponentielle dans une algèbre normée : continuité.

Groupe de colles : **Interrogateur(trice) :**

Nom Note	Énoncés Commentaires
Nom Note	Énoncés Commentaires
Nom Note	Énoncés Commentaires